Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

*А. П. Юрачківський*

# Начала функціонального аналізу і теорії інтеграла

**Навчальний посібник
для студентів природничих факультетів**

Київ
2012

УДК 517 версія від 04.05.2012

А. П. Юрачківський
**Начала функціонального аналізу і теорії інтеграла**: Навчальний посібник для студентів природничих факультетів. — К.: 2012.-243 с.

Рецензенти: О.М. Васильєв, докт. фіз.-мат. наук,
О.В. Романенко, канд. фіз.-мат. наук
В.Л. Рябічев, канд. фіз.-мат. наук.

Затверджено вченою радою
фізичного факультету
17 квітня 2012 року

У посібнику викладено базові поняття і факти функціонального аналізу і теорії інтеграла, а також подано необхідні для розуміння предмета відомості з загальної алгебри. Для студентів фізико-математичних спеціальностей.

© А. П. Юрачківський, 2012

# Зміст

**Передмова** ..... 5

**Глава 1. Елементи теорії множин і загальної алгебри ..... 6**

§ 1. Відношення і функції ..... 6
§ 2. Упорядковані множини ..... 13
§ 3. Алгебричні системи ..... 28

**Глава 2. Метричні і топологічні простори ..... 63**

§ 4. Псевдометричні простори ..... 63
§ 5. Топологічні простори ..... 71
§ 6. Повні псевдометричні простори ..... 99
§ 7. Компактність і споріднені властивості ..... 109

**Глава 3. Напівнормовані простори ..... 119**

§ 8. Загальні напівнормовані простори ..... 119
§ 9. Евклідові простори ..... 128

**Глава 4. Елементи теорії інтеграла ..... 141**

§ 10. Міра, інтеграл і зв'язок між ними ..... 141
§ 11. Продовження інтеграла і міри ..... 157
§ 12. Інтеграл Лебега ..... 166

**Глава 5. Обмежені лінійні оператори ..... 173**

§ 13. Простір неперервних лінійних операторів ..... 173
§ 14. Спряжені простори і оператори ..... 189
§ 15. Компактні оператори ..... 199
§ 16. Ермітові оператори ..... 207

**Глава 6. Топологічні лінійні кільця ..... 220**

§ 17. Спектральна теорія ..... 220

§ 18. Фунційне числення в банахових алгебрах . . . . . 233
**Література . . . . . 242**

# Передмова

Ця книга являє собою ввідний курс функціонального аналізу і має на меті ознайомити читача з основними поняттями і результатами цього розділу математики. Вона охоплює не весь матеріал однойменної дисципліни для студентів математичних спеціальностей, зокрема, в ній не розглядаються слабкі і $*$-слабкі топології, інтегрування операторнозначних функцій, необмежені симетричні оператори і узагальнені функції. Але ті питання, які в книгу увійшли, розглядаються в ній докладніше, ніж у стандартних університетських підручниках. Викладений у § 11 і оснований на статті автора в *Доповідях НАН України* (2012, № 2) підхід до продовження інтеграла з'являється в навчальній літературі вперше.

Книгу можна умовно розділити на три частини: дальні підступи до функціонального аналізу (глава 1), ближні підступи (глави 2 – 4) і, нарешті, власне функціональний аналіз (глави 5 і 6). Перша частина призначена для тих читачів, переважно фізиків, які слухали скорочені курси математичного аналізу і алгебри, однак деякі з наведених у ній результатів (наприклад теореми Стоуна про булеві кільця) не входять в обов'язкові курси і на механіко-математичному факультеті.

# Глава 1. Елементи теорії множин і загальної алгебри

## § 1. Відношення і функції

1.1. Операції над множинами. Не всяка сукупність є множиною, а лише побудована за певними правилами. Наступні пояснення дають уявлення про них. У більшості задач теорії множин розглядаються не множини взагалі, а підмножини фіксованої множини $X$ (своєї для кожної задачі), спосіб задання якої в даному контексті не обговорюється. Множина $X$ називається *універсальною* або *універсумом*, і служить предметною областю задачі. Множини задаються або утворюються із уже заданих за допомогою принципу згортання, який стверджує, що кожна властивість $P(x)$ елемента $x \in X$ задає множину $A = \{x : P(x)\}$ тих і тільки елементів $x \in X$, яким вона притаманна (і, звичайно, навпаки – кожній множині $A$ відповідає властивість "$x \in A$"). В аксіоматичній теорії множин поняття "властивість" і сам принцип формулюються строго. Для нашого курсу достатньо інтуїтивного розуміння їх. Згорнувши властивість "$x \in A$ або $x \in B$", дістанемо об'єднання $A \cup B$ множин $A, B$. Аналогічно означуються перетин $A \cap B$ доповнення $A^c$ множини $A$ (всі ті елементи $X$, які не належать $A$). У теорії множин основну роль відіграє принцип об'ємності, який полягає в тому, що множина однозначно визначається своїм складом. Згідно з цим принципом, щоб довести рівність двох множин, наприклад, $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (перший закон двоїстості), достатньо переконатися, що всякий елемент лівої частини входить у праву і навпаки. Аналогічно доводиться еквівалентність різних означень теоретико-множинних операцій. Так, різниця $A \setminus B$ це, з одного боку, множина елементів, що належать $A$ і не належать $B$, з іншого боку, це $A \cap B^c$. Симетрична різниця $A \triangle B$ це множина елементів, приналежних або тільки $A$ або тільки $B$. Рівносильно: $A \triangle B = A \setminus B \cup B \setminus A = A \cup B \setminus A \cap B$.

Доводячи теоретико-множинні тотожності, не обов'язково щоразу звертатися до означень операцій і принципу об'ємності. Іноді можна скористатись раніше встановленими тотожностями. Наприклад, із першого закону двоїстості і закону заперечення заперечення $(A^c)^c = A$ випливає другий закон двоїстості $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Справді, $A \cup B = (A^c)^c \cap (B^c)^c = (A^c \cup B^c)^c$. Іноді виникає потреба розглядати операції над

підмножинами різних універсумів $X_i$, де $i$ пробігає визначену контекстом або довільну множну. Скрізь нижче в цьому параграфі за умовчанням $A_i \subset X_i$.

Множина $\{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$ називається *впорядкованим декартовим добутком* множин $A_1$ і $A_2$ і позначається $A_1 \times A_2$. Множини $A_1 \times (A_2 \times A_3)$, $(A_1 \times A_2) \times A_3$ і $\{(a_1, a_2, a_3) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_{2,3} \in A_3\}$, елементи яких відрізняються лише розстановкою дужок, ототожнюють між собою, позначають $A_1 \times A_2 \times A_3$ і називають упорядкованим декартовим добутком $A_1, A_2$ і $A_3$ (так що декартове множення за означенням асоціативне). Аналогічно означується декартів добуток $A_1 \times \ldots \times A_n$ (при $A_1 = \ldots = A_n = A$ записуваний як $A^n$).

Нехай $\{A_i, i \in I\}$ – деяка сукупність непорожніх множин (тут і далі слово "сукупність" вживається в значенні "непорожня множина множин"). Довільну функцію $f : I \to \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ таку, що $f(i) \in A_i, i \in I$, називають *селектором* даної сукупності. Зауважимо, що у випадку $A_i = A, i \in I$, селектори це просто відображення $I$ в $A$. Множину всіх селекторів сукупності $\{A_i, i \in I\}$ називають *симетричним декартовим добутком* її представників і позначають $\prod\limits_{i \in I} A_i$, а якщо всі $A_i$ однакові, то $A^I$. Таким чином, $A^n$ це те саме, що $A^I$, де $I$ довільна $n$-елементна множина. Ототожнимо, як це прийнято в математиці, число $n \in \mathbb{Z}_+$ із множиною передуючих йому цілих невід'ємних чисел (так що нулю відповідає порожня множина). Тоді $2^I$ є не що інше, як множина всіх відображень з $I$ в $\{0, 1\}$.

Зв'язок між симетричним і впорядкованим декартови добутками скінченного числа співмножників такий: $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ це результат ототожнення всеможливих добутків $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n}$, де $i, \ldots, i_n$ – довільна перестановка чисел $1, \ldots, n$. Очевидно, при $A_1 = \ldots = A_n = n$ симетричний декартів добуток співпадає з упорядкованим.

Існування селектора довільної сукупності непорожніх множин видається очевидним, і це враження підсилюється наведеною вище інтерпретацією селектора сукупності $\{A_i = A,\ i \in I\}$ (інший приклад – сукупність одноелементних множин, єдиний селектор якої читач випише сам). Однак у загальному випадку ніякого способу побудови селектора не існує, відтак немає й конкретних селекторів! У зв'язку з цим у теорії множин постулюється таке.

**Аксіома вибору**. *Усяка сукупність непорожніх множин має хоча б один селектор.*

Цей постулат не суперечить решті аксіом теорії множин і не виводиться з них у повній загальності (і те і те – складні теореми математичної логіки). На нього спираються, зокрема, доведення основоположних принципів функціонального аналізу, про що буде сказано в коментарях до останніх.

Деякі теоретико-множинні міркування спрощуються, якщо кодувати множини функціями. А саме, пов'яжемо з кожною підмножиною $A$ універсуму $X$ задану рівністю

$$\chi_A(x) = \left[\begin{array}{ll} 1 & \text{при } x \in A, \\ 0 & \text{при } x \in X \setminus A \end{array}\right.$$

функцію $\chi_A$, звану *індикатором* множини $A$ (вживають також термін *характеристична функція*). Очевидно, всяка функція $\chi : X \to \{0,1\}$ є індикатором деякої однозначно визначеної множини $A \subset X$ (а саме $A = \{x : \chi(x) = 1\}$). Тому сукупність усіх підмножин множини $X$ (її ще називають *булеаном* $X$) можна ототожнити з $2^X$, що й роблять у літературі (а іноді просто приймають без пояснень $2^X$ за позначення булеана $X$).

Випишемо основні формули зв'язку між операціями над множинами і над індикаторами (в тих рівностях, де аргумент відсутній, він мислиться однаковим для всіх функцій):

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B = \chi_A \wedge \chi_B, \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_A \vee \chi_B,$$

$$\chi_{A^c} = 1 - \chi_A, \chi_{A\setminus B} = (\chi_A - \chi_B)_+, \chi_{A\Delta B} = \chi_{A\cup B} - \chi_{A\cap B} = |\chi_A - \chi_B|,$$

$$\chi_{\cap A_\alpha} = \min_\alpha \chi_{A_\alpha},\ \chi_{\cup A_\alpha} = \max_\alpha \chi_{A_\alpha} \ (\alpha \text{ пробігає довільну множину}),$$

$$\chi_{A_1\times\ldots\times A_n}(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n \chi_{A_i}(x_i).$$

Елементарні доведення цих рівностей читач напише сам, а ми проілюструємо застосування їх.

**Приклад 1.1.** Тотожність $A \cap (B\triangle C) = (A \cap B)\triangle(A \cap C)$ доводиться так:

$$\chi_{A\cap(B\triangle C)} = \chi_A|\chi_B - \chi_C| = |\chi_A\chi_B - \chi_A\chi_C| = |\chi_{A\cap B} - \chi_{A\cap C}| = \chi_{(A\cap B)\triangle(A\cap C)}.$$

**Приклад 1.2.** Тотожність $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ доводиться так:

$$\chi_{(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)}(x_1, x_2) = \chi_{(A_1\times A_2}(x_1, x_2)\chi_{(B_1\times B_2}(x_1, x_2)$$

$$= \chi_{A_1}(x_1)\chi_{A_2}(x_2)\chi_{B_1}(x_1)\chi_{B_2}(x_2) = \chi_{A_1\cap B_1}(x_1)\chi_{A_2\cap B_2}(x_2) =$$

$$\chi_{(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)}(x_1, x_2).$$

1.2. Відношення. *Відношенням на множинах* $X_1, \ldots, X_n$ називається довільна підмножина впорядкованого декартового добутку їх. Підмножина множини $X^n$ називається *$n$-місним* або *$n$-арним* (при $n = 1$ – унарним, при $n = 2$ – бінарним) *відношенням на* $X$. Таким чином, усяке відношення на $X_1, \ldots, X_n$ є одномісним відношенням на $X_1 \times \ldots \times X_n$, зокрема всяке бінарне відношення на $X$ є унарним відношенням на $X^2$.

Якщо $\rho$ – відношення на $X_1, X_2$, то замість $(x_1, x_2) \in \rho$ часто пишуть $x_1 \rho x_2$.

Згідно з принципом згортання всяке відношення на $X_1 \times \ldots \times X_n$ можна ототожнити з деякою властивістю впорядкованого набору $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n$. У математичній логіці відношення ще називають предикатами – за назвою формулюючого властивість логічного висловлювання.

Наведемо приклади бінарних відношень.

**Приклад 1.3.** $\mathrm{id}_X = \{(x, x), x \in X\}$ – відношення рівності (тотожності) на $X$. Якщо множина $X$ визначається контекстом або конкретизувати її немає потреби, то пишуть просто $\mathrm{id}$.

**Приклад 1.4.** Відношення $\leqslant$ на $X \subset \mathbb{R}$.

**Приклад 1.5.** Відношення $\subset$ ("бути підмножиною") на $2^X$.

**Приклад 1.6.** Відношення "бути дільником" на множині натуральних чисел.

**Приклад 1.7.** Відношення $\parallel$ паралельності двох прямих.

Над відношеннями можна виконувати, за самим означенням цього поняття, ті ж дії, що й над множинами. Введемо, крім того, дві специфічні операції.

Відношення $\{(x_2, x_1) : x_1 \rho x_2\}$ на $X_2, X_1$ називається *оберненим* до відношення $\rho$ на $X_1, X_2$ і позначається $\rho^{-1}$.

Нехай $\rho_1$ і $\rho_2$ – відношення на $X_1, X_2$ і $X_2, X_3$ відповідно. Відношення $\{(x_1, x_3) : \exists x_2 \in X_2 \; x_1 \rho_1 x_2 \rho_2 x_3\}$ називається *композицією* відношень $\rho_1$ і $\rho_2$ і позначається $\rho_2 \circ \rho_1$. Якщо $X_1 = X_2 = X_3$, то замість $\rho \circ \rho$ пишуть $\rho^2$.

Ці операції дозволяють виділити важливі класи бінарних відношень. Бінарне відношення $\rho$ називається: *рефлексивним*, якщо $\mathrm{id} \subset \rho$; *симетричним*, якщо $\rho^{-1} = \rho$; *антисиметричним*, якщо $\rho \cap \rho^{-1} \subset \mathrm{id}$; *транзитивним*, якщо $\rho^2 \subset \rho$. Рефлексивне симетричне транзитивне відношення називається *еквівалентністю*. Рефлексивне антисиметричне транзитивне відношення називається *порядком*.

Еквівалентностями є відношення id і $\|$, порядками – $\mathrm{id}, \leqslant, \subset$ і $\vdots$. Абстрактне відношення порядку докладно розглядатиметься в § 2, а до вивчення відношення еквівалентності приступаємо вже.

Нехай $\sim$ – еквівалентність на множині $X$. Для довільного елемента $x \in X$ позначимо $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$ і назвемо $[x]$ *класом еквівалентності* цього елемента. Сукупність усіх класів еквівалентності в $X$ називається *фактор-множиною* множини $X$ по даній еквівалентності і позначається $X/\!\sim$.

**Лема 1.1.** *Класи еквівалентності різних елементів множини $X$ або не перетинаються, або співпадають.*

◀ Нехай $[x_1]$ і $[x_2]$ мають спільний елемент $x$. Тоді $x_1 \sim x \sim x_2$, звідки за властивістю транзитивності $x_1 \sim x_2$. Тоді довільний елемент $y \in X$ або еквівалентний обом елементам $x_1$ і $x_2$ (і тоді $y \in [x_1] \cap [x_2]$), або не еквівалентний жодному з них (і тоді $y$ не належить ні $[x_1]$, ні $[x_2]$). Отже $[x_1] \triangle [x_2] = \varnothing$, що й означає рівність $[x_1] = [x_2]$. ▶

Сукупність $\mathfrak{D} \subset 2^X$ така, що кожний елемент $x \in X$ належить рівно одній $D \in \mathfrak{D}$, називається *розбиттям* множини $X$. Інакше кажучи, сукупність підмножин множини $X$ утворює розбиття останньої в точності тоді, коли ці підмножини попарно не перетинаються і об'єднання їх дорівнює $X$.

**Теорема 1.1.** *Усяка еквівалентність на множині $X$ породжує розбиття її на класи еквівалентності, і навпаки, всяке розбиття $\mathfrak{D} \subset 2^X$ задає*

*еквівалентність на $X$ за правилом*

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists\, D \in \mathfrak{D}\ (x \in D\ \&\ y \in D). \tag{1}$$

◀ Перше твердження теореми це переформульована лема 1.1. Друге твердження полягає в тому, що задане формулою (1) відношення рефлексивне, симетричне і транзитивне. Перші дві властивості випливають безпосередньо з (1). Перевіримо третю.

Нехай $\mathfrak{D}$ розбиття, $\{x_1, x_2\} \in D_1 \in \mathfrak{D}$, $\{x_2, x_3\} \in D_2 \in \mathfrak{D}$. Оскільки $x_2$ входить як у $D_1$, так і в $D_2$, то $D_1 = D_2$, а значить $\{x_1, x_3\} \in D_1$. Таким чином, співвідношення $x_1 \sim x_2$ і $x_2 \sim x_3$ зумовлюють $x_1 \sim x_3$. ▶

На завершення цього пункту означимо кілька важливих понять.

Нехай $\rho$ – відношення на $X, Y$. Множина $\{y \in Y : \exists\, x \in A\ x\rho y\}$ називається *образом* множини $A \subset X$ відносно $\rho$ і позначається $\rho(A)$. Множина $\{x \in X : \exists\, y \in B\ x\rho y\}$ називається *прообразом* множини $B$ відносно $\rho$ і позначається $\rho^{-1}(B)$. Очевидно, прообраз $B$ відносно $\rho$ це образ $B$ відносно $\rho^{-1}$, що узгоджує друге позначення з першим. Замість $\rho(\{x\})$ і $\rho^{-1}(\{y\})$ пишуть $\rho(x)$ і $\rho^{-1}(y)$.

Множини $\rho^{-1}(Y)$ і $\rho(X)$ називають відповідно *областю визначення* і *областю значень* відношення $\rho \subset X \times Y$. Першу позначають іще $\operatorname{dom}\rho$ або $D(\rho)$, а другу – $\operatorname{im}\rho$ або $R(\rho)$.

`1.3. Функції як відношення`. Вище було показано, що симетричний декартів добуток можна означити через поняття функції, розуміючи останню інтуїтивно як закон чи правило, що задає відповідність між елементами двох множин. Проте можливий і зворотний шлях: спираючись на поняття декартового добутку, означити функцію як відношення спеціального виду. Плануючи стати на нього, ми зводили до поняття функції лише нескінченні декартові добутки, які в наступних означеннях не фігурують.

*Функцією* або *відображенням* (у деяких контекстах – *оператором*) з *областю відправлення* $X$ і *областю прибуття* $Y$ називається відношення $f \subset X \times Y$ таке, що образ усякої одноелементної множини в $X$ містить не більше одного елемента (може бути порожнім!). Говорять також "функція (відображення, оператор) з $X$ в $Y$", "відображення $X$ в $Y$" (без прийменника перед $X$).

Якщо $f$ функція, то замість $f \subset X \times Y$ і $xfy$ пишуть $f : X \to Y$

і $y = f(x)$ відповідно. Дане вище означення ототожнює функцію $f$ із множиною пар $(x, f(x))$, тобто з тим, що в шкільному курсі математики називають графіком функції. У цьому є певна методологічна натяжка: функція постає як статичний об'єкт, тоді як поняття функції було введено в математику насамперед для опису процесів.

Усяка функція $f$, будучи відношенням, має обернене відношення $f^{-1}$. Якщо $f^{-1}$ також функція (тоді замість "обернене відношення" говорять "обернена функція"), то функцію $f$ називають *ін'єкцією* або *ін'єктивним відображенням*. Відображення $f : X \to Y$ називається: *сюр'єкцією* або *сюр'єктивним відображенням*, якщо $\operatorname{dom} f = X,\ \operatorname{im} f = Y$; *бієкцією* або *бієктивним відображенням*, якщо воно ін'єктивне і сюр'єктивне.

**Лема 1.2.** *Нехай $f : X \to Y$ – ін'єкція. Тоді для всякої множини $A \subset X$ $f(A^c) \subset f(A)^c$.*

◀ Нехай $y = f(x)$, де $x \in A^c$. Якби $y$ належав $f(A)$, то в $A$ знайшовся б елемент $x'$ (відмінний від $x$, раз $x \notin A$) такий, що $y = f(x')$. А це суперечить ін'єктивності $f$. ▶

**Лема 1.3.** *Нехай $f : X \to Y$ – сюр'єкція. Тоді для всякої множини $A \subset X$ $f(A)^c \subset f(A^c)$.*

◀ Нехай $y \in f(A^c)$, тобто $y \neq f(x)$ для всіх $x \in A$. Тоді за умовою сюр'єктивності $f$ знайдеться $x' \in A$ такий, що $y = f(x')$. ▶

**Наслідок 1.1.** *Нехай $f : X \to Y$ – бієкція. Тоді для всякої множини $A \subset X$ $f(A^c) = f(A)^c$.*

Як видно з означення функції, ми допускаємо до розгляду частково визначені функції: область визначення може бути вужчою за область відправлення. Це виправдовує себе, коли розглядається ціла сім'я частково визначених відображень із наперед заданою достатньо простою областю відправлення, але складно описуваними або не відомими наперед областями визначення. Такі сім'ї операторів становлять значний інтерес у функціональному аналізі, але в нашому короткому курсі не вивчатимуться. Тому, пишучи $f : X \to Y$, вважаємо за умовчанням, що $\operatorname{dom} f = X$.

Для відображення $f : X_1 \times \ldots \times X_n$ і множин $A_1 \subset X_1, \ldots A_n \subset X_n$ позначають $f(A_1, \ldots A_n) = \{f(x_1), \ldots, f(x_n),\ x_1 \in X_1, \ldots, x_1 \in X_n\}$.

Це не що інше, як $f(A_1 \times \ldots \times A_n)$ – образ множини $A_1 \times \ldots \times A_n$. Щойно введене альтернативне позначення зручніше в тих випадках, коли деякі з множин $A_i$ одноелементні. У такому разі символи цих множин замінюють символами відповідних елементів, наприклад, $f(x_1, A_2) = \{f(x_1, x_2),\ x_2 \in A_2\}$.

Відображення $f : X^n \to X$ називається $n$-місною (або $n$-арною) *операцією* на $X$. Відношення $\rho \subset X^m$ називається *інваріантним* відносно $n$-місної операції $f$ на $X$, якщо для будь-яких

$$(x_{11}, \ldots, x_{1m}) \subset \rho,\ \ldots\ , (x_{n1}, \ldots, x_{nm}) \subset \rho$$

впорядкований набір $(f(x_{11}, \ldots, x_{n1}), \ldots, f(x_{1m}, \ldots, x_{nm}))$ також належить $\rho$.

**Приклад 1.8.** Відношення $\leqslant$ на $\mathbb{R}$ інваріантне відносно додавання. Справді, нерівності $x_1 \leqslant y_1,\ x_2 \leqslant y_2$ зумовлюють $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$.

Оскільки підмножина множини $X$ це унарне відношення на $X$, то окремим випадком інваріантного відношення є інваріантна множина. У введених вище позначеннях властивість інваріантності множини $A \subset X$ відносно $n$-місної операції $f$ записується так: $f(A, \ldots, A) \subset A$.

## § 2. Упорядковані множини

2.1. `Загальні властивості`. Наділена відношенням порядку множина називається *впорядкованою*. Абстрактний порядок позначатимемо символом $\prec$ .

Елементи $x$ і $y$ упорядкованої множини $X$ називаються *порівнянними*, якщо справджується хоча б одна з двох нерівностей $x \prec y$, $y \prec x$. Порядок називається *лінійним*, а наділена ним множина – *лінійно впорядкованою*, якщо всякі два елементи порівнянні. Лінійно впорядкована підмножина впорядкованої множини називається *ланцюгом*.

Порядок $\leqslant$ в $\mathbb{R}$ лінійний, а в $\mathbb{R}^d$ $(d > 1)$ – ні. Так само не лінійні порядки $\subset$ у $2^X$ (якщо $X$ містить більше одного елемента) і $\vdots$ в $\mathbb{N}$.

Елемент $a$ впорядкованої множини $X$ називається *нижньою* (*верхньою*) *межею* підмножини $A \subset X$, якщо для всякого $x \in A$ $a \prec x$ (відповідно $x \prec a$). Множину всіх нижніх (верхніх) між підмножини $A$ позначають $A^{\mathrm{i}}$ (відповідно $A^{\mathrm{s}}$). Підмножину $A$ називають: *обмеженою*

*знизу*, якщо $A^{\mathrm{i}} \neq \emptyset$; *обмеженою зверху*, якщо $A^{\mathrm{s}} \neq \emptyset$; *обмеженою*, якщо $A^{\mathrm{i}} \neq \emptyset \neq A^{\mathrm{s}}$. Послідовність $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ називають обмеженою, якщо такою є множина $\{x_n\} \subset X$.

Елемент $x$ упорядкованої множини $X$ називається: *максимальним мінімальним*, якщо $\{x\}^{\mathrm{s}} = \{x\}$ (відповідно $\{x\}^{\mathrm{i}} = \{x\}$ ), тобто не існує відмінного від $x$ елемента $y$ такого, що $x \prec y$ (відповідно $y \prec x$); *найбільшим* (*найменшим*), якщо для будь-якого $y \in X \;\; y \prec x$ (відповідно $x \prec y$). Очевидно, в упорядкованій множині може бути не більше одного найбільшого (і так само найменшого) елемента.

**Приклад 2.1.** У множині $\{q, b, c\}$ з відношенням порядку $\{(a, b), (a, c)\} \cup \mathrm{id}$ максимальними елементами є $b$ і $c$, а найбільшого елемента немає; найменшим елементом є $a$.

**Приклад 2.2.** Мінімальними відносно порядку з прикладу 1.6 елементами множини $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ є прості числа і тільки вони. Найменшого і максимальних елементів немає.

**Теорема 2.1 (**Цорн**).** *Нехай у впорядкованій множині $X$ кожний ланцюг обмежений зверху. Тоді для будь-якого $x \in X$ існує максимальний елемент $x^*$ такий, що $x \prec x^*$.*

Доведення цього фундаментального результату (званого традиційно л е м о ю Цорна) читач знайде у [В] і [Кур].

Якщо серед верхніх меж підмножини $A$ деякої впорядкованої множини є найменша, то вона називається *точною верхньою межею* або *верхньою гранню* множини $A$ і позначається $\sup A$. Якщо серед нижніх меж підмножини $A$ є найбільша, то вона називається *точною нижньою межею* або *нижньою гранню* множини $A$ і позначається $\inf A$. Замість $\sup\{x, y\}$ пишуть $x \vee y$, а замість $\inf\{x, y\}$ – $x \wedge y$. Ці позначення наводять на думку розглядати $\vee$ і $\wedge$ як бінарні операції. Без додаткових припущень про множину $X$, із якої беруться операнди, це не приводить до змістовних висновків, оскільки області визначення операцій можуть бути вужчими за область відправлення $X^2$ (і навіть порожніми). Однак цей підхід дозволяє вивчати алгебричними методами ті впорядковані множини, у яких операції $\vee$ і $\wedge$ визначені на всій області відправлення.

**Приклад 2.3.** Якщо елементи $x$ і $y$ порівнянні, то $x \vee y$ це більший, а $x \wedge y$ менший з них.

**Приклад 2.4.** У впорядкованому відношенням $\subset$ булеані $A \vee B = A \cup B$, $A \wedge B = A \cap B$.

Цей приклад пояснює походження знаків $\vee$ і $\wedge$ : вони є стилізаціями символів $\cup$ і $\cap$.

**Приклад 2.5.** У впорядкованій відношенням "бути дільником" множині натуральних чисел $m \vee n$ це найменше спільне кратне, а $m \wedge n$ найбільший спільний дільник чисел $m$ і $n$.

**Приклад 2.6.** Нехай $(X, \prec)$ – впорядкована множина, а $T$ – довільна непорожня множина. Наділимо множину $X^T$ всіх $X$-значних функцій на $T$ порядком, який позначимо тим же символом $\prec$:

$$x(\cdot) \prec y(\cdot) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall\, t \in T \quad x(t) \prec y(t)$$

(перевірте рефлексивність, антисиметричність і транзитивність). Його називають *поточковим*, а у випадку скінченної $T$ – *покоординатним*.

Замість $\sup\{a_t, t \in T\}$ пишуть $\sup\limits_t a_t$ і так само для $\inf$. Таким чином, $\sup A$ можна ще записати як $\sup\limits_{x \in A} x$.

Підмножину $A$ впорядкованої множини назвемо: *точно обмеженою зверху*, якщо існує $\sup A$; *точно обмеженою знизу*, якщо існує $\inf A$; *точно обмеженою*, якщо існують обидві її грані.

**Лема 2.1.** *Нехай $\{A_t, t \in T\}$ – сім'я непорожніх підмножин деякої впорядкованої множини $X$. Припустимо, що кожна $A_t$ має в $X$ верхню грань $a_t$. Тоді*

$$\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)^{\mathrm{s}} = \{a_t, t \in T\}^{\mathrm{s}}.$$

◀ Позначимо $A = \bigcup\limits_{t \in T} A_t$. Нехай $a \in A^{\mathrm{s}}$. Тоді для будь-яких $t \in T$ і $x \in A_t$ справджується нерівність $x \prec a$, тобто при кожному $t$ $a$ є мажорантою множини $A_t$. Оскільки $a_t$ – найменша з таких мажорант, то $a_t \leqslant a$, $t \in T$, і, таким чином, $a \in \{a_t, t \in T\}^{\mathrm{s}}$. Цим доведено включення $A^{\mathrm{s}} \subset \{a_t, t \in T\}^{\mathrm{s}}$.

Нехай $a \in \{a_t, t \in T\}^{\mathrm{s}}$, тобто $a_t \prec a, t \in T$. Тоді $a$ є мажорантою кожної з множин $A_t$, а значить і мажорантою $A$. Цим доведено включення $\{a_t, t \in T\}^{\mathrm{s}} \subset A^{\mathrm{s}}$. ▶

Двоїстий варіант цього твердження – для нижніх граней і мінорант – читач сформулює сам.

**Наслідок 2.1.** *Нехай* $\{A_t, t \in T\}$ *– сім'я непорожніх точно обмежених зверху (знизу) підмножин деякої впорядкованої множини. Тоді точна обмеженість зверху (знизу) множини* $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ *рівносильна цій же властивості множини* $\{\sup A_t, t \in T\}$ *(відповідно* $\{\inf A_t, t \in T\}$*). Якщо верхні (нижні) грані цих множин існують, то вони співпадають:*

$$\sup \bigcup_{t\in T} A_t = \sup_{t\in T} \sup A_t, \quad \inf \bigcap_{t\in T} A_t = \inf_{t\in T} \inf A_t.$$

Якщо $(x_n)$ – спадна послідовність в упорядкованій множині $X$ така, що $\inf x_n = x$ для деякого $x \in X$, то цей факт записують так: $x_n \searrow x$ або так: $x_n \downarrow x$. Для зростаючої послідовності $(x_n)$ запис $x_n \nearrow x$ (або $x_n \uparrow x$) означає, що $\sup x_n = x$.

Нехай $(x_n)$ – послідовність в упорядкованій множині така, що при кожному $n$ ця множина містить елемент $x_{*n} \equiv \inf\limits_{k\geqslant n} x_k$ (очевидною необхідною умовою для цього є обмеженість $(x_n)$ знизу). За побудовою послідовність $(x_{*n})$ зростає. Якщо вона має верхню грань, то останню називають *нижньою границею* послідовності $(x_n)$ і позначають $\underline{\lim}\, x_n$. Таким чином, за означенням

$$\underline{\lim}\, x_n = \sup_n \inf_{k\geqslant n} x_k$$

за умови, що права частина рівності визначена. Якщо при кожному $n$ множина, з якої вибрано послідовність $(x_n)$, містить елемент $x_n^* \equiv \sup\limits_{k\geqslant n} x_k$ (для чого, очевидно, необхідно, щоб $(x_n)$ була обмеженою зверху) і послідовність (за побудовою спадна) $(x_n^*)$ має нижню грань, то останню називають *верхньою границею* послідовності $(x_n)$ і позначають $\overline{\lim}\, x_n$. Таким чином, за означенням

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_n \sup_{k\geqslant n} x_k$$

за умови, що права частина рівності визначена. Якщо нижня і верхня границі $(x_n)$ існують і співпадають, то спільне значення $\underline{\lim}\, x_n$ і $\overline{\lim}\, x_n$ називають *порядковою границею* послідовності $(x_n)$ (у впорядкованій множині!) і позначають $(os)\ \lim x_n$ ($os$ – від ordinal sequential) або просто

$\lim x_n$, якщо пояснено, який смисл вкладається в цей символ. Рівність $x = \lim x_n$ записують іще як $x_n \to x$. Окремими випадками цього співвідношення є $x_n \searrow x$ і $x_n \nearrow x$.

**Лема 2.2.** *Нехай $(x_n)$ і $(y_n)$ – збіжні монотонні послідовності в упорядкованій множині такі, що $x_n \prec y_n$ при всіх $n$. Тоді $\lim x_n \prec \lim y_n$.*

◀ Нехай перше припущення конкретизується так: $x_n \nearrow x,\ y_n \nearrow y$. Тоді з другого припущення маємо $x_m \prec y_n$ при $m \leqslant n$, звідки $x_m \prec y,\ m \in \mathbb{N}$, а значить $x \prec y$. Так само, помінявши ролями $m$ і $n$, міркуємо у випадку $x_n \searrow x,\ y_n \searrow y$.

Нехай тепер перше припущення конкретизується так: $x_n \nearrow x,\ y_n \searrow y$. Тоді з другого припущення маємо $x_n \prec y,\ n \in \mathbb{N}$, звідки $x \prec y$.

І нарешті, випадок $x_n \searrow x,\ y_n \nearrow y$ тривіальний. ▶

Упорядкована множина називається *напрямленою вверх* (*вниз*), якщо вона містить верхню (нижню) грань кожної своєї двоелементної підмножини. Нехай $x, y, z$ – елементи напрямленої вверх множини $X$. Тоді $X$ містить $y \vee z$ і $x \vee (y \vee z)$. Відтак, узявши в наслідку 2.1 $T = \{1, 2\}$, $A_1 = \{x\},\ A_2 = \{y, z\}$, дістанемо $\sup\{x, y, z\} = x \vee (y \vee z)$, а при $A_1 = \{x, y\},\ A_2 = \{z\}$ одержимо $\sup\{x, y, z\} = (x \vee y) \vee z$. Порівняння двох виразів $\sup\{x, y, z\}$ у напрямленій уверх множині і аналогічних (із $\wedge$ замість $\vee$) виразів $\inf\{x, y, z\}$ у напрямленій униз множині дає сполучні, або асоціативні, закони в таких множинах

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z. \tag{1}$$

Таким чином, ліві і праві частини цих рівностей можна записувати без дужок, а замість $\sup\{x, y, z\}$ і $\inf\{x, y, z\}$ можна писати $x \vee y \vee z$ і $x \wedge y \wedge z$. Наведені міркування очевидним чином приводять до такого висновку:

*Напрямлена вверх (вниз) множина містить верхню (нижню) грань усякої скінченної множини своїх елементів.*

**Лема 2.3.** *Якщо елемент напрямленої вверх (вниз) множини максимальний (мінімальний), то він і найбільший (найменший).*

◀ Нехай $x_0$ – максимальний елемент напрямленої вверх множини $X$. Якби він не був максимальним, то знайшовся б елемент $x \in X$ такий, що $x \not\prec x_0$. Тоді $x_0 \neq x \vee x_0$. При цьому за означеннями верхньої грані і

верхньої межі $x_0 \prec x \vee x_0$. Разом останні два співвідношення суперечать максимальності $x_0$. ►

Найбільший (найменший) елемент напрямленої вверх (вниз) обмеженої зверху (знизу) множини позначають **1** (відповідно **0**). Шрифтове виділення дозволяє відрізняти їх від чисел 1 і 0. Так, у прикладі 2.5 **0**=1.

Напрямлена і вверх і вниз множина називається *ґраткою*. З огляду на вищесказане *ґратка містить обидві грані всякої скінченної множини своїх елементів*, що також можна покласти в основу означення.

Упорядковану множину, що містить точні межі всіх своїх скінченних і обмежених зліченних підмножин, назвемо *$\delta$-ґраткою* (знявши вимогу обмеженості, дістанемо означення *$\sigma$-ґратки*). Порівнявши це означення з означенням нижньої та верхньої границь, бачимо, що *$\delta$-ґратка містить нижню і верхню границі всякої обмеженої послідовності своїх елементів*. Це спільно з лемою 2.2 приводить до такого висновку.

**Наслідок 2.2.** *Нехай $(x_n)$ і $(y_n)$ – обмежені монотонні послідовності в $\delta$-ґратці такі, що $x_n \prec y_n$ при всіх $n$. Тоді* $\lim x_n \prec \lim y_n$.

Приклади 2.3 – 2.5 ілюструють поняття ґратки (а приклад 2.4 – навіть поняття $\sigma$-ґратки). Упорядкована множина $T^X$ із прикладу 2.6 буде ґраткою в точності тоді, коли нею є $X$. У такому разі породжені порядком операції переносяться, як і сам порядок, з $X$ на $T^X$ поточково: $(x(\cdot) \vee y(\cdot))(t) = x(t) \vee y(t)$ і так само для $\wedge$.

2.2. Відображення впорядкованих множин. Відображення $\varphi$ одної впорядкованої множини в іншу називається *зберігаючим порядок* або *ізотонним* (вживають також терміни *ізотонія*, *порядковий гомоморфізм*), якщо нерівність $x_1 \prec x_2$ в області визначення зумовлює $\varphi(x_1) \prec \varphi(x_2)$. Очевидно, *ізотонія переводить усяку обмежену множину в обмежену.*

**Лема 2.4.** *Для того щоб відображення $\varphi$ впорядкованої множини $X$ у деяку впорядковану множину було ізотонним, необхідно і достатньо, щоб для будь-якої множини $A \subset X$ мало місце включення*

$$\varphi(A^{\mathrm{s}}) \subset (\varphi(A))^{\mathrm{s}}. \tag{2}$$

◄ Необхідність випливає з означення ізотонії.

Нехай $x_1 \prec x_2$. Тоді $x_2 \in \{x_1, x_2\}^{\mathrm{s}}$, відтак за умовою (2) $\varphi(x_2) \subset \{\varphi(x_1), \varphi(x_2)\}^{\mathrm{s}}$, тобто $\varphi(x_1) \prec \varphi(x_2)$ . ►

Такі ж міркування показують, що включення $\varphi(A^{\mathrm{i}}) \subset (\varphi(A))^{\mathrm{i}}$, де $A$ – довільна підмножина $X$, також необхідне і достатнє для ізотонності $\varphi$.

**Лема 2.5.** *Нехай $X$ і $Y$ – напрямлені вверх множини. Тоді для ізотонності відображення $\varphi : X \to Y$ необхідно і достатньо, щоб для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ було*

$$\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) \prec \varphi(x_1 \vee x_2). \tag{3}$$

◄ Необхідність. Нехай $\varphi$ ізотонне. Тоді $\varphi(x_i) \prec \varphi(x_1 \vee x_2)$, $i = 1, 2$, а значить справджується (3).

Достатність. Нехай $x_1 \prec x_2$. Тоді $x_1 \vee x_2 = x_2$, звідки за умовою (3) $\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) \prec \varphi(x_2)$. З іншого боку, $\varphi(x_2) \prec \varphi(x_1) \vee \varphi(x_2)$, що разом із попередньою нерівністю і з урахуванням антисиметричності порядку дає $\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) = \varphi(x_2)$. А це означає, що $\varphi(x_1) \prec \varphi(x_2)$. ►

Аналогічно доводиться

**Лема 2.6.** *Нехай $X$ і $Y$ – напрямлені вниз множини. Тоді для ізотонності відображення $\varphi : X \to Y$ необхідно і достатньо, щоб для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ було*

$$\varphi(x_1 \wedge x_2) \prec \varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2). \tag{4}$$

**Лема 2.7.** *Нехай $X$ і $Y$ – напрямлені вверх множини. Тоді для того щоб бієкція $\varphi : X \to Y$ була порядковим ізоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ мала місце рівність*

$$\varphi(x_1) \vee \varphi(x_2) = \varphi(x_1 \vee x_2), \tag{5}$$

◄ Достатність. Оскільки рівність (5) – окремий випалок нерівності (3), то лема 2.5 стверджує, що $\varphi$ ізотонія. Бієктивність $\varphi$ дозволяє, позначивши $y_i = \varphi(x_i)$, переписати (5) у вигляді $\varphi^{-1}(y_1) \vee \varphi^{-1}(y_2) = \varphi^{-1}(y_1 \vee y_2)$. Із цієї ж причини змінна $y_i$ пробігає всю множину $Y$, коли $x_i$ пробігає $X$. Тому за лемою 2.5 остання рівність зумовлює ізотонність $\varphi^{-1}$.

Необхідність. Якщо $\varphi$ і $\varphi^{-1}$ ізотонії, то за лемою 2.5 при всіх значеннях змінних справджуються нерівності (3) і $\varphi^{-1}(y_1) \vee \varphi^{-1}(y_2) \prec \varphi^{-1}(y_1 \vee y_2)$. Поклавши в останній $y_i = \varphi(x_i)$ і скориставшись ізотонністю $\varphi$, дістанемо $\varphi(x_1 \vee x_2) \prec \varphi(x_1) \vee \varphi(x_2)$, що разом із (3) дає (5). ►

Аналогічно доводиться

**Лема 2.8.** *Нехай $X$ і $Y$ – напрямлені вниз множини. Тоді для того щоб бієкція $\varphi : X \to Y$ була порядковим ізоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ мала місце рівність*

$$\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) = \varphi(x_1 \wedge x_2). \tag{6}$$

Відображення $\varphi$ з одної ґратки в іншу таке, що для будь-яких $x_1$ і $x_2$ з області визначення справджуються рівності (5) і (6), називається *булевим гомоморфізмом.*

**Наслідок 2.3.** *Усякий булів гомоморфізм ґраток є порядковим гомоморфізмом (ізотонією). Для того щоб булів гомоморфізм був порядковим ізоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб він був бієкцією.*

◀ Перше твердження випливає безпосередньо з означення булевого гомоморфізму і лем 2.5, 2.6. Друге твердження в частині необхідності очевидне, а в частині достатності повторює леми 2.7 і 2.8. ▶

Відзначимо, що в загальному випадку бієктивності порядкового (не булевого) гомоморфізму недостатньо для того, щоб він був порядковим ізоморфізмом – навіть якщо він відображає ґратку на ґратку.

Завершимо цей пункт двома принципово важливими в теорії інтеграла твердженнями.

**Теорема 2.2.** *Нехай $X$ і $Y$ – $\delta$-ґратки, $(x_n)$ – обмежена послідовність в $X$, а $\iota : X \to Y$ – ізотонія. Тоді*

$$\iota(\underline{\lim}\, x_n) \prec \underline{\lim}\, \iota(x_n) \prec \overline{\lim}\, \iota(x_n) \prec \iota\left(\overline{\lim}\, x_n\right).$$

◀ Доведення потребують тільки дві крайні нерівності, а насправді тільки одна з них, бо інша з двох утворюється з неї заміною порядків в $X$ і $Y$ оберненими відношеннями (“зворотними порядками”).

Користуємося введеними після наслідку 2.1 позначеннями. За побудовою $x_{*n} \prec x_n$ і послідовність $(x_{*n})$ зростає. Тому $x_{*n} \prec x_k$ при $k \geqslant n$, що спільно з ізотонністю $\iota$ дає

$$\iota(x_{*n}) \prec \inf_{k \geqslant n} \iota(x_k).$$

Щоб вивести звідси за наслідком 2.2 крайню ліву нерівність, достатньо зауважити, що для довільної обмеженої зростаючої послідовності $(u_n)$ у $\delta$-ґратці $\sup u_n = \lim u_n = \underline{\lim}\, u_n$. ▶

**Наслідок 2.4.** *Нехай $X$ і $Y$ – $\delta$-ґратки, $(x_n)$ – порядково збіжна послідовність в $X$, а $\iota : X \to Y$ – ізотонія. Тоді $\iota(\lim x_n) = \lim \iota(x_n)$.*

2.3. Дистрибутивні ґратки. У довільній ґратці мають місце нерівності

$$x \vee (y \wedge z) \prec (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$
$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \prec x \wedge (y \vee z),$$

які читач легко доведе сам. У лінійно впорядкованій множині вони справджуються у формі рівностей

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \tag{7}$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \tag{8}$$

що легко перевірити перебравши всі 3! випадків: $x \prec y \prec z$, $x \prec z \prec y$ і т.д. Ґратка, в якій рівності (7) і (8) мають місце для всіх $x, y, z$, називається *дистрибутивною* (так що попереднє речення стверджує дистрибутивність лінійно впорядкованої ґратки), а самі ці рівності називаються *розподільчими законами*. Неважко переконатися, що ґратка з прикладу 2.4 дистрибутивна, а ґратка $X^T$ з прикладу 2.6 матиме цю властивість у точності тоді, коли її має $X$.

**Теорема 2.3.** *У дистрибутивній ґратці співвідношення $x_n \searrow x$, $y_n \searrow y$ зумовлюють $x_n \wedge y_n \searrow x \wedge y$, $x_n \vee y_n \searrow x \vee y$; співвідношення $x_n \nearrow x$, $y_n \nearrow y$ тягнуть за собою $x_n \wedge y_n \nearrow x \wedge y$, $x_n \vee y_n \nearrow x \vee y$.*

◀ За наслідком 2.1 для довільних обмежених послідовностей $(x_n)$ і $(y_n)$

$$\inf(x_n \wedge y_n) = \inf x_n \wedge \inf y_n, \quad \sup(x_n \vee y_n) = \sup x_n \vee \sup y_n,$$

що відразу доводить імплікації

$$x_n \searrow x \quad \& \quad y_n \searrow y \implies x_n \wedge y_n \searrow x \wedge y,$$
$$x_n \nearrow x \quad \& \quad y_n \nearrow y \implies x_n \vee y_n \nearrow x \vee y.$$

Нехай $y_n \searrow y$. Візьмемо довільний $w$ і позначимо $z_n = w \vee y_n$, $z = w \vee y$. За побудовою

$$z \prec z_n, \ n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

З іншого боку, якщо $u \prec z_n,\ n \in \mathbb{N}$, то для кожного $n\quad u \wedge y \prec z_n \wedge y = w \wedge y \vee y_n \wedge y = w \wedge y \vee y = y,\ u \wedge w \prec z \wedge w = w \wedge w \vee y_n \wedge w = w$, тобто $u \prec y,\ u \leqslant w$, а значить і $u \prec z$. Це в поєднанні з (9) означає, що $z = \inf z_n$. Ми довели імплікацію

$$y_n \searrow y \Longrightarrow\ w \vee y_n \searrow w \vee y. \tag{10}$$

Нехай тепер $x_n \searrow x,\ y_n \searrow y$. Тоді

$$x \vee y \prec x_n \vee y_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Візьмемо довільний елемент $u$ такий, що $u \prec x_n \vee y_n,\ n \in \mathbb{N}$. Тоді за умовою спадання $(x_n)\quad x_n \vee y_n \prec x_m \vee y_n$ при $n \geqslant m$, або, рівносильно, $u \vee x_m \vee y_n = x_m \vee y_n$ при $n \geqslant m$. Звідси, скориставшись по черзі умовами $y_n \searrow y,\ x_m \searrow x$ і, обидва рази, імплікацією (10), одержуємо $u \vee x \vee y = x \vee y$, тобто $u \prec x \vee y$. Це в поєднанні з (11) означає, що $x \vee y = \inf(x_n \vee y_n)$. Ми довели імплікацію

$$x_n \searrow x \quad \& \quad y_n \searrow y \ \Longrightarrow\ x_n \vee y_n \searrow x \vee y.$$

Аналогічно доводиться двоїста імплікація

$$x_n \nearrow x \quad \& \quad y_n \nearrow y \ \Longrightarrow\ x_n \wedge y_n \nearrow x \wedge y. \blacktriangleright$$

**Лема 2.9.** *В обмеженій знизу дистрибутивній ґратці для всяких двох елементів $x$ і $y$ існує не більше одного елемента $z$ такого, що*

$$x \vee z = x \vee y, \quad x \wedge z = \mathbf{0}. \tag{12}$$

◀ Нехай справджуються рівності (12), а також

$$x \vee z' = x \vee y, \quad x \wedge z' = \mathbf{0}.$$

Тоді: $z \prec x \vee y,\ z' \prec x \vee y$, відтак і $z \vee z' \prec x \vee y$; $\quad z' = (x \wedge z) \vee z' = (x \vee z) \wedge (z \vee z') = (x \vee y) \wedge (z \vee z')$, що спільно з попередньою нерівністю дає $z' = z \vee z'$, тобто $z \prec z'$. Так само, помінявши ролями $z$ і $z'$, виводимо нерівність $z' \prec z$. ▶

Задовольняючий умови (12) елемент $z$ тієї обмеженої знизу дистрибутивної ґратки, якій належать $x$ і $y$, називається *доповненням $x$ до $y$* і позначається $y \ominus x$. Очевидно, для будь-якого $x$

$$x \ominus x = \mathbf{0}, \quad x \ominus \mathbf{0} = x. \tag{13}$$

**Лема 2.10.** *Нехай $x$ і $y$ – елементи обмеженої знизу дистрибутивної ґратки такі, що $x \prec y$ і існує $y \ominus x$. Тоді $(y \ominus x) \vee x = y$.*

◀ Перше припущення перетворює першу з рівностей (12) до вигляду $x \vee z = y$. ▶

**Лема 2.11.** *Нехай $u$ і $v$ – елементи обмеженої знизу дистрибутивної ґратки такі, що існує $u \ominus v$. Тоді для будь-якого елемента $w$ цієї ґратки існує $(u \wedge w) \ominus (v \wedge w)$ і справджується рівність*

$$(u \ominus v) \wedge w = (u \wedge w) \ominus (v \wedge w).$$

◀ Позначимо $q = (u \ominus v) \wedge w$. Оскільки $v \wedge (u \ominus v) = \mathbf{0}$ і за побудовою $q \prec u \ominus v$, то $v \wedge q = \mathbf{0}$ і тим більше

$$v \wedge w \wedge q = \mathbf{0}. \tag{14}$$

Так само за побудовою $q \prec w$, тож $w \vee q = w$, звідки за розподільчим законом (7)

$$(v \wedge w) \vee q = (v \vee q) \wedge w. \tag{15}$$

За тим же законом $q \vee v = ((u \ominus v) \vee v) \wedge (w \vee v)$, а за означенням доповнення $(u \ominus v) \vee v = u \vee v$. Отже $v \vee q = (u \vee v) \wedge (w \vee v)$, звідки

$$(v \vee q) \wedge w = (u \vee v) \wedge ((w \vee v) \wedge w) = (u \vee v) \wedge w,$$

що разом із розподільчим законом (8) перетворює (15) до вигляду

$$(v \wedge w) \vee q = (u \wedge w) \vee (v \wedge w).$$

А це в поєднанні з (14) якраз і означає, що $q = (u \wedge w) \ominus (v \wedge w)$. ▶

Задамо в обмеженій знизу дистрибутивній ґратці операцію (взагалі кажучи частково визначену) *булевого додавання* рівністю

$$x \oplus y = (x \vee y) \ominus (x \wedge y). \tag{16}$$

Із цього задання і рівностей (13) відразу маємо

$$x \oplus \mathbf{0} = x, \quad x \oplus x = \mathbf{0}. \tag{17}$$

**Лема 2.12.** *Нехай $q$ і $u$ – елементи обмеженої знизу дистрибутивної ґратки такі, що $u \prec q$ і існує $q \ominus u$. Тоді $q = (q \ominus u) \oplus u$.*

◀ За означенням доповнення $(q \ominus u) \wedge u = \mathbf{0}$, $(q \ominus u) \vee u = q \vee u$; за умовою $q \vee u = q$. Із цих рівностей і (13) маємо $((q \ominus u) \vee u) \ominus ((q \ominus u) \wedge u) = q$, що з огляду на (13) рівносильно твердженню леми. ▶

**Лема 2.13.** *Нехай $x$ і $y$ – елементи обмеженої знизу дистрибутивної ґратки такі, що існують $x \ominus y$ і $y \ominus x$. Тоді існує $x \oplus y$ і справджується рівність*

$$x \oplus y = (x \ominus y) \vee (y \ominus x).$$

◀ Позначимо $q = (x \ominus y) \vee (y \ominus x)$. За означенням доповнення одного елемента до іншого

$$(y \ominus x) \vee x = x \vee y, \quad (x \ominus y) \vee y = x \vee y.$$

З останньої рівності маємо $x \ominus y \prec x \vee y$, що разом із передостанньою рівністю дає $(x \ominus y) \vee (y \ominus x) \vee x = x \vee y$, або, рівносильно, $q \vee x = x \vee y$. Оскільки у виразі $q$ змінні $x$ і $y$ взаємозамінні, то так само $q \vee y = x \vee y$, що спільно з попередньою рівністю і розподільчим законом (7) дає

$$(x \wedge y) \vee q = x \vee y. \tag{18}$$

Із виразу $q$ маємо за розподільчим законом (8)

$$(x \wedge y) \wedge q = (x \wedge y \wedge (x \ominus y)) \vee (x \wedge y \wedge (y \ominus x)).$$

При цьому

$$x \wedge y \wedge (x \ominus y) \prec y \wedge (x \ominus y) = \mathbf{0}, \quad x \wedge y \wedge (y \ominus x) \prec x \wedge (y \ominus x) = \mathbf{0}.$$

Отже $x \wedge y \wedge q = \mathbf{0}$, що спільно з (18) дає $q = (x \vee y) \ominus (x \wedge y)$. Цим з огляду на (15) показано, що $q = x \oplus y$. ▶

**Лема 2.14.** *Нехай $u_1$ і $u_2$ – елементи обмеженої знизу дистрибутивної ґратки такі, що існує $u_1 \oplus u_2$. Тоді для будь-якого елемента $w$ цієї ж ґратки справджується рівність*

$$(u_1 \oplus u_2) \wedge w = (u_1 \wedge w) \oplus (u_2 \wedge w).$$

◀ Із (15) маємо за лемою 2.11

$$(u_1 \oplus u_2) \wedge w = ((u_1 \vee u_2) \wedge w) \ominus (u_1 \wedge u_2 \wedge w).$$

А це з огляду на розподільчий закон (8) і очевидну рівність $u_1 \wedge u_2 \wedge w = u_1 \wedge w \wedge u_2 \wedge w$ рівносильно тому, що

$$(u_1 \oplus u_2) \wedge w = ((u_1 \wedge w) \vee (u_2 \wedge w)) \ominus ((u_1 \wedge w) \wedge (u_2 \wedge w)).$$

За означенням булевої суми права частина рівності – не що інше, як $(u_1 \wedge w) \oplus (u_2 \wedge w)$. ►

**Лема 2.15.** *Нехай $x, y$ і $z$– елементи обмеженої знизу дистрибутивної ґратки такі, що існують $x \oplus y$, $(x \oplus y) \oplus z$, $y \oplus z$ і $x \oplus (y \oplus z)$. Тоді $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.*

◄ Домовимось у цьому доведенні операцію $\wedge$ записувати як множення, так що, наприклад, $uv$ означає $u \wedge v$ (це доволі поширена практика, виправдовувана теоремами 3.4 і 3.5 нижче). Тоді сполучний закон для $\wedge$ (друга з рівностей (1)) стверджує, що "добуток" трьох "співмножників" $x_1, x_2, x_3$ можна записувати у вигляді $x_1x_2x_3$, не вказуючи за допомогою дужок, яка з двох операцій "множення" виконується першою.

Позначимо $q = x \vee y \vee z$, $u_0 = q \ominus x$, $u_1 = x$, $v_0 = q \ominus y$, $v_1 = y$, $w_0 = q \ominus z$, $w_1 = z$, $e_{ijk} = u_i v_j w_k$. За побудовою $q$ $\quad x \prec q$, $y \prec q$, $z \prec q$, звідки за лемою 2.10

$$u_0 \vee u_1 = q, \ v_0 \vee v_1 = q, \ w_0 \vee w_1 = q, \tag{19}$$

так що $u_i \prec q$, $v_i \prec q$, $w_i \prec q$ при обох значеннях індекса. Тому й $u_j v_k \prec q$. За розподільчим законом (8) $e_{ij0} \vee e_{ij1} = u_i v_j (w_0 \vee w_1)$, що разом із попереднім співвідношенням і останньою з рівностей (19) дає $e_{ij0} \vee e_{ij1} = u_i v_j$. Звідси, скориставшись першими двома рівностями (19) і ще двічі розподільчим законом (8), одержуємо

$$\bigvee_{i,j,k=0}^{1} e_{ijk} = q,$$

що спільно з тим же законом дає для довільного елемента $r$

$$rq = \bigvee_{i,j,k=0}^{1} re_{ijk}.$$

Отже, щоб довести однаковість елементів $x_1$ і $x_2$ таких, що $x_1 \prec q$, $x_2 \prec q$ (а значить $x_i q = x_i$), достатньо встановити рівності $x_1 e_{ijk} =$

$x_2e_{ijk}$ для всіх можливих значень індексів. У випадку $x_1 = (x \oplus y) \oplus z$, $x_2 = x \oplus (y \oplus z)$ лема 2.14 дозволяє записати ці рівності у вигляді

$$(xe_{ijk} \oplus ye_{ijk}) \oplus ze_{ijk} = xe_{ijk} \oplus (ye_{ijk}) \oplus ze_{ijk}). \tag{20}$$

Із (17) і очевидних рівностей $xe_{0jk} = \mathbf{0},\ ye_{i0k} = \mathbf{0},\ ze_{ij0} = \mathbf{0}$ маємо

$$(xe_{0jk} \oplus ye_{0jk}) \oplus ze_{0jk} = ye_{0jk} \oplus ze_{0jk} = xe_{0jk} \oplus (ye_{0jk} \oplus ze_{0jk}),$$

$$(xe_{i0k} \oplus ye_{i0k}) \oplus ze_{i0k} = xe_{i0k} \oplus ze_{i0k} = xe_{i0k} \oplus (ye_{i0k} \oplus ze_{i0k}),$$

$$(xe_{ij0} \oplus ye_{ij0}) \oplus ze_{ij0} = xe_{ij0} \oplus ye_{ij0} = xe_{ij0} \oplus (ye_{ij0} \oplus ze_{ij0}),$$

$$(xe_{111} \oplus ye_{111}) \oplus ze_{111} = (xyz \oplus xyz) \oplus xyz = xe_{111} \oplus (ye_{111} \oplus ze_{111}).$$

Отже рівності (20) справджуються при всіх значеннях індексів. ►

Обмежена знизу дистрибутивна ґратка, в якій для всяких двох елементів $x, y$ існує $y \ominus x$, називається *булевою ґраткою*. У ній операція булевого додавання визначена на всіх парах операндів (бо права частина (16) має смисл при всіх $x, y$) і, за лемою 2.14, асоціативна. Ілюстрацією поняття булевої ґратки є приклад 2.4, у позначеннях якого рівності (12) записуються так:

$$A \cup C = A \cup B, \quad A \cap C = \emptyset.$$

Звідси знаходимо $C = B \setminus A$. Отже, в довільній булевій ґратці підмножин (не обов'язково всіх, але обов'язково включно з порожньою підмножиною) довільного універсуму маємо $B \ominus A = B \setminus A$.

**Лема 2.16.** *Для довільних елементів $x$ і $y$ булевої ґратки*

$$x \vee y = x \oplus y \oplus (x \wedge y). \tag{21}$$

◄ Поклавши в лемі 2.12 $q = x \vee y,\ u = x \wedge y$, дістанемо з урахуванням (16) $x \vee y = (x \oplus y) \oplus (x \wedge y)$. Лема 2.15 дозволяє не писати першу пару дужок у правій частині цієї рівності. ►

Доповнення елемента обмеженої[1] дистрибутивної ґратки до найбільшого елемента $\mathbf{1}$ називають просто *доповненням* цього елемента, не вказуючи до чого. Інакше кажучи, властивість елемента $v$ бути доповненням $u$ виражається рівностями

$$u \vee v = \mathbf{1}, \quad u \wedge v = \mathbf{0}. \tag{22}$$

[1]Нагадаю, що просто обмеженість означає обмеженість і зверху, і знизу.

Позначивши доповнення елемента $x$ через $x^c$, можемо переписати їх у вигляді

$$x \vee x^c = \mathbf{1}, \quad x \wedge x^c = \mathbf{0}. \tag{23}$$

Очевидно, $\mathbf{0}^c = \mathbf{1},\ \mathbf{1}^c = \mathbf{0}$.

Випливаюча з комутативності операцій $\vee$ і $\wedge$ взаємозамінність $u$ і $v$ у (22) зумовлює рівносильність рівностей $v = u^c$ і $u = v^c$. Отже: *якщо елемент $x$ має доповнення, то $x^{cc} = x$.* Іноді цей факт формулюють так: *операція доповнювання самодвоїста.*

**Лема 2.17.** *Нехай $x$ і $y$ – елементи обмеженої дистрибутивної ґратки, із яких перший має доповнення. Тоді існує $y \ominus x$ і справджується рівність $y \ominus x = y \wedge x^c$.*

◀ Написавши $x \vee (y \wedge x^c) = (x \vee y) \wedge (x \vee x^c) = (x \vee y) \wedge \mathbf{1} = x \vee y$, $x \wedge (y \wedge x^c) = (x \wedge x^c) \wedge y = \mathbf{0} \wedge y = \mathbf{0}$, бачимо, що $y \wedge x^c$ в ролі $z$ задовольняє обидві умови (12). ▶

**Лема 2.18.** *Якщо елементи $x$ і $y$ обмеженої дистрибутивної ґратки обидва мають доповнення, то*

$$(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c, \quad (x \wedge y)^c = x^c \vee y^c. \tag{24}$$

◀ Позначимо $u = x \vee y,\ v = x^c \wedge y^c$. Із розподільчих законів (7) і (8) і рівностей (23) маємо

$$u \vee v = (x \vee y \vee x^c) \wedge (x \vee y \vee y^c) = (\mathbf{1} \vee y) \wedge (x \vee \mathbf{1}) = \mathbf{1} \wedge \mathbf{1} = \mathbf{1},$$

$$u \wedge v = (x \wedge x^c \wedge y^c) \vee (y \wedge x^c \wedge y^c) = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Отже $u$ і $v$ задовольняють обидві умови (22). Цим доведено першу з рівностей (24). Друга доводиться аналогічно (або виводиться з першої та самодвоїстості доповнювання). ▶

Рівності (24) називаються *законами двоїстості* (для ґраткових операцій) або *законами де Моргана.*

Обмежена булева ґратка (зрозуміло, що достатньо вимагати обмеженості зверху) називається *булевою алгеброю.*

**Наслідок 2.5.** *Для того щоб обмежена дистрибутивна ґратка була булевою алгеброю, необхідно і достатньо, щоб усі її елементи мали доповнення до $\mathbf{1}$. Якщо це виконано, то операція $\ominus$ виражається через $\wedge$ і $^c$ за формулою $y \ominus x = y \wedge x^c$.*

◀ Необхідність очевидна, а достатність є складовою частиною твердження леми 2.17. ▶

Упорядкована множина, поєднуюча властивості булевої ґратки і $\delta$-ґратки, називається *булевою $\delta$-ґраткою* (аналогічно означується *булева $\sigma$-ґратка*). У булевій алгебрі немає необмежених послідовностей, тому при заміні в цих означеннях слова "ґратка" словом "алгебра" відмінність між префіксами $\delta$- і $\sigma$- зникає (традиційно вживають другий з них). Таким чином, *булева $\sigma$-алгебра* це, за означенням, упорядкована множина, поєднуюча властивості булевої алгебри і $\sigma$-ґратки. Прикладом булевої $\sigma$-алгебри є впорядкований відношенням включення булеан $2^X$. Узявши одноелементну множину $X$, одержимо двоелементну булеву алгебру $\{0, 1\}$, яка відіграє важливу роль у математичній логіці і програмуванні.

## § 3. Алгебричні системи

`3.1. Поняття алгебричної системи.` Непорожня множина, на якій задано деякі відношення і/або операції, називається *алгебричною системою*. Інакше кажучи, алгебрична система це трійка $(X; \mathrm{Rel}, \mathrm{Op})$, де $X$ деяка непорожня множина, Rel деякий (можливо порожній) набір відношень на $X$, а Op – деякий (також можливо порожній) набір операцій в $X$. Набір Rel складається з пар виду $(m, \rho)$, де $\rho$ – відношення на $X$, а $m$ – його арність (додатне число); елементами Op є пари виду $(n, f)$, де $f$ – операція в $X$, а $n$ – її арність, яка може бути й нульовою (нульмісна операція це просто виділений елемент множини $X$, константа). Якщо в алгебричній системі немає операцій ($\mathrm{Op} = \varnothing$), то її називають *моделлю*, а якщо немає відношень ($\mathrm{Rel} = \varnothing$), то *алгеброю*. Таким чином, модель із непорожнім набором відношень це пара $(X; \mathrm{Rel})$, а алгебра з непорожнім набором операцій – пара $(X; \mathrm{Op})$. Якщо ж обидва набори порожні, то алгебрична система являє собою множину в чистому вигляді (безструктурну). У п. 1.3 ми означили відображення, зокрема операцію, як відношення спеціального виду, тож формально всяку алгебричну систему можна розглядати як модель. Але такий підхід не дуже природний, оскільки поняття операції інтуїтивно простіше і первинніше ніж поняття відношення.

Сукупність відношень і операцій алгебричної системи, із зазначе-

нням їхніх арностей, називається її *сигнатурою*, а самі ці відношення і операції називаються *головними*. Замість "алгебрична система $(X; \mathrm{Rel}, \mathrm{Op})$", "модель $(X; \mathrm{Rel})$", "алгебра $(X; \mathrm{Op})$" говорять: "алгебрична система $X$ сигнатури $(\mathrm{Rel}, \mathrm{Op})$", "модель $X$ сигнатури Rel", "алгебра $X$ сигнатури Op". Алгебричні системи однакової сигнатури називаються *однотипними*. Не слід думати, що сигнатура змінюється від перепозначення відношень чи операцій. Дві сигнатури $(\mathrm{Rel}, \mathrm{Op})$ і $(\mathrm{Rel}', \mathrm{Op}')$ вважаються однаковими, якщо між Rel і Rel′ і так само між Op і Op′ існуть взаємно однозначні відповідності такі, що відповідаючі одне одному відношення і відповідаючі одна одній операції мають однакові арності (докладніше про це див. у [M]).

Нехай $X$ – алгебрична система сигнатури $(\mathrm{Rel}, \mathrm{Op})$, а $X_0$ – інваріантна (див. п. 1.3) відносно всіх головних операцій підмножина $X$. Тоді кожну операцію $f \in \mathrm{Op}$ можна розглядати і як операцію в $X_0$. Крім того, без усяких додаткових припущень, кожне відношення $\rho \subset X^m$ можна розглядати і як $m$-місне відношення на $X_0$, просто замінивши $\rho$ на $\rho \cap X_0^m$. Отже, така множина $X_0 \subset X$ є алгебричною системою тієї ж сигнатури, що й $X$. Її називають *підсистемою* алгебричної системи $X$ (*підмоделлю*, якщо $X$ модель, *підалгеброю*, якщо $X$ алгебра). Якщо ж представники певного класу алгебр мають спільну родову назву, то приєднавши до неї префікс *під-*, одержимо родову назву підалгебри.

Нехай $X_t, t \in T$, – однотипні алгебричні системи. Тоді декартів добуток $\prod X_t$ (згідно з даним у п. 1.3 означенням елементами його є функції на $T$) можна перетворити на алгебричну систему тієї ж сигнатури, перенісши на нього ті відношення й операції, які є в усіх $X_t$, поточково (у прикладі 2.6 показано, як це робиться). Так побудована алгебрична система називаються *прямим добутком* систем $X_t$ (у випадку порожньої сигнатури це просто декартів добуток множин).

*Гомоморфізмом* алгебричної системи $X$ в однотипну їй алгебричну систему $Y$ називається відображення $\varphi : X \to Y$ таке, що: 1) для кожної головної операції $f$ і для будь-яких $x_1 \in X, \ldots, x_n \in X$, де $n$ – арність $f$, справджується рівність

$$f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = \varphi(f(x_1, \ldots, x_n)); \tag{1}$$

2) для кожного головного відношення $\rho$ має місце імплікація

$$(x_1, \ldots, x_m) \in \rho \Longrightarrow (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)) \in \rho,$$

де $m$ – арність $\rho$. Якщо при цьому відображення $\varphi$ сюр'єктивне, то говорять "гомоморфізм $X$ на $Y$" (так що прийменник "на" в цій словосполуці несе більше інформації ніж "в").

**Лема 3.1.** *Нехай $\varphi$ – гомоморфізм алгебричної системи $X$ в однотипну алгебричну систему $Y$. Тоді $\varphi(X)$ – підсистема останньої.*

◀ Припущення про $\varphi$ разом із першою вимогою в означенні гомоморфізму зумовлює інваріантність множини $\varphi(X)$ відносно всіх головних операцій алгебричної системи $Y$. ▶

Лему 3.1 формулюють ще так: *гомоморфний образ алгебричної системи – алгебрична система того ж типу.*

Читач легко доведе таке твердження:

**Лема 3.2.** *Нехай $\varphi$ – ін'єктивний гомоморфізм алгебричної системи $X$ в однотипну алгебричну систему. Тоді відображення $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ також гомоморфізм.*

*Ізоморфізмом* однотипних алгебричних систем $X$ і $Y$ називається бієктивний гомоморфізм $X$ на $Y$ такий, що обернене відображення (існуюче внаслідок бієктивності) – гомоморфізм $Y$ на $X$. Другу вимогу в цьому означенні можна замінити такою: для кожного головного відношення $\rho$ має місце двостороння імплікація

$$(x_1, \ldots, x_m) \in \rho \Longleftrightarrow (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m)) \in \rho,$$

де $m$ – арність $\rho$ (доведіть рівносильність нового означення старому). Замінивши в доведеннях леми 2.7 і другого твердження наслідку 2.3 конкретні двомісні операції абстрактними $n$-місними, доходимо такого висновку:

**Лема 3.3.** *Бієктивний гомоморфізм алгебри на однотипну з нею алгебру є ізоморфізмом.*

Для алгебричних систем із непорожнім набором відношень це неправильно.

**Приклад 3.1.** Нехай $\prec$ – порядок із прикладу 2.5 (тобто співвідношення $m \prec n$, де $m$ і $n$ – натуральні числа, означає, що ділиться $n$ на $m$), а $\leqslant$ – звичайний порядок на множині натуральних чисел. Тоді тотожне

відображення множини $\mathbb{N}$ на себе є порядковим гомоморфізмом моделі $(\mathbb{N};\prec)$ на модель $(\mathbb{N};\leqslant)$ (бо подільність $n$ на $m$ тягне за собою нерівність $m\leqslant n$), але не навпаки (бо нерівність $m\leqslant n$ не зумовлює подільність $n$ на $m$).

Інваріантна відносно всіх головних не нульмісних операцій алгебричної системи еквівалентність на ній називається *конгруенцією*.

**Приклад 3.2.** Оголосимо еквівалентними всякі два натуральні числа, які дають однакову остачу при діленні на 2. Це відношення розбиває множину $\mathbb{N}$ на дві неперетинні підмножини – парних і непарних чисел, тож за теоремою 1.1 це справді еквівалентність. Вона інваріантна відносно бінарної операції додавання. Справді, якщо $k_1\sim k_2,\ n_1\sim n_2$, то, очевидно, $k_1+n_1\sim k_2+n_2$. Таким чином, дана еквівалентність є конгруенцією на алгебрі $(\mathbb{N};+)$. Водночас вона не інваріантна відносно заданої рівністю $f(k,n)=k+2n$ операції $f$ (доведіть), а значить не є конгруенцією на алгебрі $(\mathbb{N};f)$.

Інваріантність конгруенції відносно всіх головних операцій алгебричної системи робить коректним наступне означення.

Нехай $\sigma$ – конгруенція на алгебрі $X$. Позначимо клас еквівалентності елемента $x$ через $[x]_\sigma$, а фактор-множину множини $X$ по цій конгруенції через $X/\sigma$. Для кожної головної операції $f:X^n\to X$ покладаємо

$$f\left([x_1]_\sigma,\dots,[x_n]_\sigma\right)=[f(x_1,\dots,x_n)]_\sigma. \tag{2}$$

(Права частина рівності не залежить від вибору представників у класах еквівалентності $[x_1]_\sigma,\dots,[x_n]_\sigma$, оскільки за припущенням інваріантності $\sigma$ від нього не залежить навіть $f(x_1,\dots,x_n)$). Алгебра $X/\sigma$ із заданими рівністю (2) головними операціями називається *фактор-алгеброю* алгебри $X$ по конгруенції $\sigma$ (можна означити й фактор-систему загальної алгебричної системи – див. [М], але це нам не знадобиться). За побудовою вона має ту ж сигнатуру, що й $X$.

**Лема 3.4.** *Нехай $\sigma$ – конгруенція на алгебрі $X$. Тоді відображення $x\mapsto[x]_\sigma$ з $X$ на $X/\sigma$ – гомоморфізм.*

◀ Рівність (2) – окремий випадок (1), тож першу умову з означення гомоморфізму виконано. Другу перевіряти не потрібно, бо в алгебрі немає головних відношень. ▶

Гомоморфізм $x \mapsto [x]_\sigma$ алгебри $X$ на фактор-алгебру $X/\sigma$ називається *канонічним гомоморфізмом, породженим конгруенцією* $\sigma$. За побудовою він переводить кожний елемент алгебри в містячий його клас еквівалентності.

**Теорема 3.1.** *Нехай $\varphi$ – гомоморфізм алгебри $X$ в однотипну алгебру. Тоді: відношення $\sigma^\varphi = \{(x_1, x_2) \in X^2 : \varphi(x_1) = \varphi(x_2)\}$ – конгруенція на $X$; задане рівністю*

$$\widetilde{\varphi}\left([x]_{\sigma^\varphi}\right) = \varphi(x) \tag{3}$$

*відображення $\widetilde{\varphi}$ – ізоморфізм $X/\sigma^\varphi$ на $\varphi(X)$.*

◀ У доведенні замість $\sigma^\varphi$ пишемо $\sigma$.

Нехай $x_1 \sigma x_1', \ldots, x_n \sigma x_n'$, тобто $\varphi(x_1) = \varphi(x_1'), \ldots, \varphi(x_n) = \varphi(x_n')$. Тоді для всякої головної операції $f : X^n \to X$ маємо згідно з (1) $\varphi(f(x_1, \ldots, x_n)) = \varphi(f(x_1', \ldots, x_n'))$, тобто $f(x_1, \ldots, x_n)\, \sigma\, f(x_1', \ldots, x_n')$. Цим доведено інваріантність $\sigma$ відносно головних операцій, відтак і перше твердження.

Із (2) і (3) маємо для довільної $n$-місної головної операції $f$ і будь-яких $x_1, \ldots, x_n$

$$\widetilde{\varphi}\left(f\left([x_1]_\sigma, \ldots, [x_n]_\sigma\right)\right) = \varphi(f(x_1, \ldots, x_n)).$$

За означенням $\widetilde{\varphi}$, припущенням про $\varphi$ і формулою (2) в означенні гомоморфізму

$$f\left(\widetilde{\varphi}\left([x_1]_\sigma\right), \ldots, \widetilde{\varphi}\left([x_n]_\sigma\right)\right) = \varphi(f(x_1, \ldots, x_n)),$$

що спільно з попередньою рівністю дає

$$f\left(\widetilde{\varphi}\left([x_1]_\sigma\right), \ldots, \widetilde{\varphi}\left([x_n]_\sigma\right)\right) = \widetilde{\varphi}\left(f\left([x_1]_\sigma, \ldots, [x_n]_\sigma\right)\right).$$

Крім того, за побудовою відображення $\widetilde{\varphi}$ ін'єктивне і $\widetilde{\varphi}(X/\sigma) = \widetilde{\varphi}(X)$. Отже $\widetilde{\varphi}$ – бієктивний гомоморфізм $X/\sigma$ на $\varphi(X)$. Залишається послатись на лему 3.3. ▶

Про породжений означеною вище конгруенцією $\sigma^\varphi$ канонічний гомоморфізм говорять, що він породжується гомоморфізмом $\varphi$ (усуваючи тим самим у назві згадку про відношення $\sigma^\varphi$, яке в цій ситуаціїї є проміжною ланкою). Позначивши цей канонічний гомоморфізм через $\iota_\varphi$, можемо переписати рівність (3) так: $\varphi = \widetilde{\varphi} \circ \iota_\varphi$. Це разом із теоремою 3.1

приводить до такого висновку: *усякий гомоморфізм алгебри в однотипну алгебру є композицією породженого ним канонічного гомоморфізму та ізоморфізму*. Рівносильно: *гомоморфний образ алгебри ізоморфний її фактор-алгебрі по породженій гомоморфізмом конгруенції*.

3.2. Напівгрупи і групи. Алгебра з єдиною головною – бінарною – операцією називається *групоїдом*. Операцію в групоїді зазвичай записують так само, як множення чисел. Елемент $e$ групоїда $X$ називається *нейтральним*, якщо для всякого $x \in X$

$$xe = x = ex. \tag{4}$$

Нейтрального елемента може й не бути, але якщо він існує, то тільки один. Справді, нехай крім рівностей (4) справджуються ще й такі:

$$xe' = x = e'x. \tag{5}$$

Поклавши в (4) $x = e'$, а в (5) $x = e$, дістанемо $e' = ee'$, $ee' = e$, звідки $e' = e$.

Нейтральний елемент позначають також символом 1 (що робитимемо й ми), відрізняючи його від позначуваного так само числа по контексту.

Групоїд називається: *напівгрупою*, якщо його головна операція асоціативна; *комутативним*, якщо такою є його головна операція (зауважу, що комутативні, але не асоціативні групоїди в змістовних задачах не виникають). Інакше кажучи, напівгрупа це групоїд, у якому виконується *сполучний закон* $x(yz) = (xy)z$ (так що дужки в цих виразах можна й не писати). У комутативному групоїді головну операцію записують як додавання (в алгебрі з д в о м а бінарними комутативними головними операціями так записують одну з них – див. п. 3.3), а нейтральний елемент, якщо він існує, позначають 0, відрізняючи його від числа нуль по контексту. Напівгрупа з нейтральним елементом називається *моноїдом*.

Без припущення про існування нейтрального елемента групоїд, зокрема напівгрупа, є алгеброю сигнатури $\{(2, \cdot)\}$ або $\{(2, +)\}$, тоді як групоїд із нейтральним елементом, зокрема моноїд, це алгебра сигнатури $\{(2, \cdot), (0, 1)\}$ або $\{(2, +), (0, 0)\}$. Другий елемент у кожній із цих пар є символом операції, а перший вказує арність її. Оскільки арності стандартних операцій і відношень відомі читачеві, то в подальшому їх не

вказуємо, так що скороченим записом сигнатури групоїда буде $\{\cdot\}$ (*мультиплікативний групоїд*) або $\{+\}$ (*адитивний групоїд*).

Елементи $x$ і $y$ мультиплікативного групоїда такі, що $xy = yx$, називаються *переставними* (а в адитивному групоїді завжди $x + y = y + x$).

Елемент $y$ мультиплікативного моноїда $X$ називається *оберненим* до елемента $x \in X$, якщо

$$xy = 1 = yx. \tag{6}$$

Припустимо, що крім цих рівностей справджуються ще й такі:

$$xy' = 1 = y'x. \tag{7}$$

Помноживши першу рівність (6) зліва на $y'$, дістанемо $y'(xy) = y'1$. Сполучний закон і означення нейтрального елемента дозволяють переписати останню рівність у вигляді $(y'x)y = y'$. З іншого боку, $y = (y'x)y$, у чому переконуємось помноживши другу рівність (7) справа на $y$. Отже $y = y'$. Таким чином, *у моноїді всякий елемент має не більше одного оберненого*. Елемент, для якого існує обернений, називається *оборотним*. У мультиплікативному моноїді обернений до $x$ елемент позначають $x^{-1}$. В адитивному (а значить комутативному) моноїді парі рівностей (6) відповідає одна рівність $x + y = 0$. У цьому випадку замість "обернений елемент" говорять "протилежний елемент", а термін "оборотний елемент" не вживають; замість $x^{-1}$ пишуть $-x$, а вираз $u + (-v)$ записують як $u - v$.

Наступне очевидне твердження читач доведе сам.

**Лема 3.5.** *Нехай $x$ – оборотний елемент мультиплікативного групоїда. Тоді $x^{-1}$ також оборотний і $(x^{-1})^{-1} = x$.*

**Лема 3.6.** *Нехай $x$ і $y$ – оборотні елементи мультиплікативного моноїда. Тоді $xy$ також оборотний і $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.*

◀ За сполучним законом і означенням нейтрального елемента

$$(xy)\left(y^{-1}x^{-1}\right) = \left(x\left(yy^{-1}\right)\right)x^{-1} = (x1)x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

Аналогічна викладка показує, що $\left(y^{-1}x^{-1}\right)(xy) = 1$. ▶

Із цієї леми легко виводимо за індукцією

**Наслідок 3.1.** *Добуток скінченного числа оборотних елементів мультиплікативного моноїда – оборотний елемент.*

**Лема 3.7.** *Нехай $x$ і $y$ – переставні оборотні елементи мультиплікативного моноїда, із яких перший оборотний. Тоді $x^{-1}$ і $y$ також переставні.*

◀ Із припущень леми маємо $y = x^{-1}xy = x^{-1}yx$. Помноживши обидві частини рівності справа на $x^{-1}$, дістанемо $yx^{-1} = x^{-1}y$. ▶

**Лема 3.8.** *Нехай $x_1, \ldots, x_n$ – попарно переставні елементи мультиплікативного групоїда такі, що добуток $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$ оборотний. Тоді всі $x_i$ також оборотні.*

◀ Позначимо $x = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i, \quad z_i = \prod\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} x_j, \quad y_i = x^{-1}z_i$. Попарна переставність елементів $x_1, \ldots, x_n$ зумовлює, очевидно, рівності $x_iz_i = x = z_ix_i$, а також переставність $x$ і $z_i$ (а значить, за лемою 3.7, $x^{-1}$ і $z_i$). Отже, $y_ix_i = x^{-1}z_ix_i = x^{-1}x = 1, \quad x_iy_i = x_iz_ix^{-1} = xx^{-1} = 1$. ▶

Моноїд, усі елементи якого оборотні, називається *групою*. Це алгебра сигнатури $\{\cdot, ^{-1}, 1\}$ або, в адитивному записі, $\{+, -, 0\}$, де знак мінус символізує одномісну операцію $x \mapsto -x$. Класичним прикладом моноїда є $X^X$ із композицією відображень у ролі добутку. Якщо ж розглядати не всі відображення, а тільки бієктивні, то одержимо групу. Адитивними групами є $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, адитивними моноїдами, але не групами – $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}_+$ і $\mathbb{R}_+$. Мультиплікативними групами є $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}_+\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ і $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, мультиплікативними моноїдами, але не групами – $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{C}$.

Згідно з даним вище означенням гомоморфізму алгебричних систем гомоморфізм мультиплікативного групоїда $X$ у мультиплікативний групоїд $Y$ це відображення $\varphi : X \to Y$ таке, що для будь-яких $x_1, x_2 \in X$

$$\varphi(x_1x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2). \tag{8}$$

Для адитивних групоїдів ця властивість видозмінюється так:

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2). \tag{9}$$

У деяких ситуаціях зручніше користуватись альтернативною термінологією, називаючи відображення з властивістю (8) мультиплікативним, а з властивістю (9) – адитивним. Читач сам випише характеризуючі гомоморфізм співвідношення для решти двох випадків, коли один із групоїдів мультиплікативний, а інший адитивний (вони виявляться аналогами функціональних рівнянь для показникової та логарифмічної функцій).

**Лема 3.9.** *Нехай $\varphi$ – гомоморфізм групоїда $X$ із нейтральним елементом у групоїд $Y$. Тоді $\varphi(1)$ – нейтральний елемент групоїда $\varphi(X)$.*

◄ Для будь-якого $x$ $\quad \varphi(x)\varphi(1) = \varphi(x1) = \varphi(x) = \varphi(1x) = \varphi(1)\varphi(x)$. ►

З а с т е р е ж е н н я : лема не стверджує, що $\varphi(1)$ – нейтральний елемент ширшого групоїда $Y$.

**Лема 3.10.** *Гомоморфний образ напівгрупи – напівгрупа.*

◄ Нехай $X$ напівгрупа, $Y$ групоїд (для визначеності – мультиплікативні), а відображення $\varphi : X \to Y$ має властивість (8). За лемою 3.1 $\varphi(X)$ групоїд, тож потрібно тільки довести асоціативність множення в ньому. Нехай $y_1, y_2, y_3 \in \varphi(X)$, тобто $y_k = \varphi(x_k)$, де $x_1, x_2, x_3 \in X$. Тоді $(y_1y_2)y_3 = (\varphi(x_1)\varphi(x_2))\varphi(x_3) = \varphi(x_1x_2)\varphi(x_3) = \varphi((x_1x_2)x_3) = \varphi(x_1(x_2x_3))$ $= \varphi(x_1)\varphi(x_2x_3) = \varphi(x_1)(\varphi(x_2)\varphi(x_3)) = y_1(y_2y_3)$. ►

Оскільки групоїд із нейтральним елементом це інакша алгебра ніж просто групоїд, то гомоморфізм $\varphi : X \to Y$ таких групоїдів характеризується, крім властивості (8), ще й збереженням нейтральності:

$$\varphi\left(e_X\right) = e_Y \tag{10}$$

(кожен із двох символів $e$ можна замінити одиницею або нулем відповідно до того, як позначається бінарна операція в області визначення і як в області значень). Це спільно з лемою 3.10 приводить до такого висновку.

**Наслідок 3.2.** *Гомоморфний образ моноїда – моноїд.*

Наступне твердження читач легко доведе сам.

**Лема 3.11.** *Для того щоб гомоморфізм одної групи в іншу був ін'єкцією, необхідно і достатньо, щоб прообраз нейтрального елемента області прибуття складався тільки з нейтрального елемента області визначення.*

Наступне твердження доводиться за тією ж схемою, що й лема 3.10.

**Лема 3.12.** *Гомоморфний образ комутативного групоїда – комутативний групоїд.*

**Наслідок 3.3** (з лем 3.10 і 3.12)**.** *Гомоморфний образ комутативної напівгрупи – комутативна напівгрупа.*

**Лема 3.13.** *Нехай $\varphi$ – гомоморфізм моноїда $X$ у групоїд $Y$ із нейтральним елементом, $x$ – оборотний елемент $X$. Тоді $\varphi(x)$ – оборотний елемент моноїда $\varphi(X)$ і $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1})$.*

◄ $\varphi\left(x^{-1}\right)\varphi(x) \overset{(8)}{=} \varphi\left(x^{-1}x\right) = \varphi\left(e_X\right) \overset{(10)}{=} 1_Y = \varphi\left(e_X\right) = \varphi\left(xx^{-1}\right) \overset{(8)}{=} \varphi(x)\varphi\left(x^{-1}\right)$. ►

Ця лема дозволяє охарактеризувати гомоморфізм груп тими ж двома властивостями (8) і (10), що й гомоморфізм групоїдів із нейтральним елементом – незважаючи на те, що сигнатура групи містить ще й одномісну операцію обернення.

Уведені в п. 1.3 позначення $f(x, B)$, $f(A, y)$, $f(A, B)$ конкретизуються для операцій множення і обернення так: $xB = \{xy,\ y \in B\}$, $Ay = \{xy,\ x \in A\}$, $AB = \{xy,\ x \in A,\ y \in B\}$, $A^{-1} = \{x^{-1},\ x \in A\}$. Аналогічні вирази для $x \pm B$ і $A \pm B$ читач випише сам.

Як домовлено в п. 3.1, підалгебру (напів)групи називаємо під(напів)групою. Згідно з означеннями підалгебри, напівгрупи і групи множина $A$ в мультиплікативній напівгрупі буде піднапівгрупою останньої в точності тоді, коли $AA \subset A$; множина $A$ в мультиплікативній групі буде підгрупою останньої в точності тоді, коли $AA \subset A$ і $A^{-1} \subset A$ (в адитивній групі цим співвідношенням відповідають $A + A \subset A$ і $-A \subset A$). Наступні два твердження, які читач легко доведе сам, дають альтернативну характеризацію (одну, але у двох варіантах – мультиплікативному і адитивному) підгруп.

**Лема 3.14.** *Для того щоб множина $A$ в мультиплікативній групі була підгрупою останньої, необхідно і достатньо, щоб $AA^{-1} \subset A$ і $A^{-1}A \subset A$.*

**Лема 3.15.** *Для того щоб множина $K$ в адитивній групі була підгрупою останньої, необхідно і достатньо, щоб $K - K \subset K$.*

**Лема 3.16.** *Для того щоб непорожнє бінарне відношення $\sigma$ на адитивній групі було інваріантним відносно операцій переходу до протилежного елемента і додавання, необхідно і достатньо, щоб воно містило пару (0, 0) і мало властивість*

$$x_1 \,\sigma\, y_1 \ \ \&\ \ x_2 \,\sigma\, y_2 \Longrightarrow (x_1 - x_2) \,\sigma\, (y_1 - y_2), \tag{11}$$

◀ Необхідність. Нехай відношення $\sigma$ інваріантне відносно зазначених операцій, тобто має властивості

$$x\,\sigma\,y \Longrightarrow (-x)\,\sigma\,(-y), \tag{12}$$

$$x_1\,\sigma\,y_1 \ \ \&\ \ x_2\,\sigma\,y_2 \Longrightarrow (x_1+x_2)\,\sigma\,(y_1+y_2). \tag{13}$$

Нехай далі $x_1\,\sigma\,y_1,\ x_2\,\sigma\,y_2$. Тоді внаслідок (12) $(-x_2)\,\sigma\,(-y_2)$, що разом із припущенням $x_1\,\sigma\,y_1$ і властивістю (13) зумовлює $(x_1-x_2)\,\sigma\,(y_1-y_2)$. Отже відношення $\sigma$ має властивість (11). Узявши існуючу за умовою пару $(x,y)\in\sigma$ і поклавши в (11) $x_1=x$, $x_2=x$, $y_1=y$, $y_2=y$, дістанемо $0\ \sigma\ 0$.

Достатність. Нехай відношення $\sigma$ має властивість (11) і містить пару (0, 0). Тоді для всякої пари $(x,y)\in\sigma$ буде $0\,\sigma\,0\ \ \&\ \ x\,\sigma\,y$, а значить $(-x)\,\sigma\,(-y)$. Отже $\sigma$ має й властивість (12). Нехай далі $x_1\,\sigma\,y_1\ \ \&\ \ x_2\,\sigma\,y_2$. Тоді за властивістю (12) $\ x_1\,\sigma\,y_1\ \ \&\ \ (-x_2)\,\sigma\,(-y_2)$, звідки за властивістю (11) $\ (x_1+x_2)\,\sigma\,(y_1+y_2)$. ▶

**Лема 3.17.** *Нехай $K$ – непорожня множина в адитивній групі $E$. Тоді для того щоб відношення*

$$\sigma_K=\{(x,y)\in E^2 : x-y\in K\} \tag{14}$$

*було еквівалентністю, необхідно і достатньо, щоб $K$ була підгрупою $E$.*

◀ У доведенні замість $\sigma_K$ пишемо $\sigma$.

Необхідність. Якщо $\sigma$ рефлексивне, то вони містить усі пари $(x,x)$, відтак зважаючи на (14) $K$ містить нуль групи. Тоді, ще раз унаслідок (14), $K\times\{0\}\subset\sigma$. Якщо $\sigma$ до того ж симетричне, то звідси маємо $\{0\}\times K\subset\sigma$, тобто для будь-якого $y\in K\quad (0,y)\in\sigma$. З огляду на (14) останнє співвідношення рівносильне тому, що $-y\in K$. Отже $K$ разом із кожним елементом містить і протилежний до нього тобто $-K=K$. І нарешті, припустивши транзитивність $\sigma$, одержимо з (14) імплікацію

$$x-y\in K\ \ \&\ \ y-z\in K \Longrightarrow\ x-z\in K.$$

Отже якщо $x\in K$, $z\in K$ (тоді тривіально $x-0\in K$ і за вже доведеним $0-z\in K$), то $x-z\in K$. Інакше кажучи, рефлексивність, симетричність і транзитивність $\sigma$ зумовлюють включення $K-K\subset K$, яке й означає, згідно з лемою 3.15, що $K$ підгрупа.

Достатність. Якщо $K$ містить нульовий елемент, то задане формулою (14) відношення $\sigma$, очевидно, рефлексивне; якщо $K$ разом із кожним своїм елементом містить протилежний йому, то воно симетричне. Припустимо, що $K$ містить також і різницю всяких двох елементів. Тоді для будь-яких $(x, y) \in \sigma$, $(y, z) \in \sigma$ маємо $x - z \equiv (x - y) - (y - z) \in K$, тобто $(x, z) \in \sigma$. Таким чином, останнє припущення про $K$ зумовлює транзитивність $\sigma$. ►

**Наслідок 3.4.** *Нехай $K$ – непорожня множина в адитивній групі $E$. Тоді для того щоб задане формулою* (14) *відношення $\sigma_K$ на $E$ було конгруенцією, необхідно і достатньо, щоб $K$ була підгрупою $E$.*

◄ У доведенні замість $\sigma_K$ пишемо $\sigma$.

Необхідність. Якщо $\sigma$ конгруенція, то це автоматично еквівалентність, відтак за лемою 3.17 $K$ підгрупа.

Достатність. Якщо $K$ містить 0, то задане формулою (14) відношення $\sigma$ містить пару $(0, 0)$. Властивість (11) для такого віднощення набуває вигляду

$$x_1 - y_1 \in K \;\&\; x_2 - y_2 \in K \Longrightarrow (x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) \in K.$$

Тотожність $(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) = (x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)$ показує, що $\sigma$ має цю властивість, оскільки $K$, будучи підгрупою, містить різницю всяких двох елементів. Тепер лема 3.16 стверджує інваріантність $\sigma$ відносно групових операцій. За лемою 3.17 це відношення є еквівалентністю, раз $K$ підгрупа. ►

Порівнявши наслідок 3.4 з лемою 3.17, бачимо, що всяка задана формулою (14) еквівалентність $\sigma_K$ на адитивній групі автоматично є конгруенцією. Для алгебр із багатшою сигнатурою цього, як з'ясується в п. 3.4, немає.

Фактор-групу адитивної групи $E$ по конгруенції $\sigma_K$ позначають $E/K$. Формула (14) спільно з лемою 3.17 дає простий опис класів еквівалентності в ній:

$$[x] = x + K. \tag{15}$$

Із наслідку 3.4 означення конгруенції, складовою частиною якого є формула (2), маємо

**Наслідок 3.5.** *Нехай $K$ – підгрупа адитивної групи $E$. Тоді операції у фактор-групі $E/K$ виражаються через операції в $E$ так:*

$$[x] + [y] = [x + y], \quad -[x] = [-x].$$

3.3. Адитивні ґратки. Напівгрупа, зокрема група, наділена інваріантним відносно своєї головної бінарної операції порядком, називається *впорядкованою (напів)групою*. Це вже не алгебра і не модель, а алгебрична система з непорожніми Rel і Op. Пригадавши означення інваріантного відношення (п. 1.3), можемо записати зв'язок між порядком і операцією множення в упорядкованій мультиплікативній напівгрупі у вигляді імплікації

$$u_1 \prec u_2 \ \ \& \ \ v_1 \prec v_2 \Longrightarrow u_1 v_1 \prec u_2 v_2. \tag{16}$$

Позначенням порядку в адитивній напівгрупі відтепер буде $\leqslant$. У ній формула (16) видозмінюється з урахуванням комутативності додавання так:

$$u_1 \leqslant u_2 \ \ \& \ \ v_1 \leqslant v_2 \Longrightarrow u_1 + v_1 \leqslant u_2 + v_2.$$

**Лема 3.18.** *Для того щоб наділена порядком мультиплікативна напівгрупа була впорядкованою напівгрупою, необхідно і достатньо, щоб у ній справджувались імплікації*

$$u_1 \prec u_2 \ \Longrightarrow u_1 w \prec u_2 w, \quad u_1 \prec u_2 \ \Longrightarrow w u_1 \prec w u_2.$$

◀ Обидві імплікації – окремі випадки (16), тому потрібно тільки вивести (16) із них.

Нехай $u_1 \prec u_2,\ v_1 \prec v_2$. Тоді $u_1 v_1 \prec u_2 v_1 \prec u_2 v_2$. ▶

"Адитивний" варіант цього твердження такий:

**Лема 3.19.** *Для того щоб наділена порядком адитивна напівгрупа була впорядкованою напівгрупою, необхідно і достатньо, щоб у ній справджувалась імплікація* $u_1 \leqslant u_2 \ \Longrightarrow u_1 + w \leqslant u_2 + w$.

**Наслідок 3.6.** *Для того щоб наділена порядком адитивна група була впорядкованою групою, необхідно і достатньо, щоб у ній справджувалася двостороння імплікація* $u_1 \leqslant u_2 \iff u_1 + w \leqslant u_2 + w$.

**Наслідок 3.7.** *В упорядкованій адитивній групі нерівності* $u \leqslant v$ *і* $-v \leqslant -u$ *рівносильні.*

**Теорема 3.2.** *В упорядкованій адитивній групі співвідношення* $x_n \searrow x,\ y_n \searrow y$ *зумовлюють* $x_n + y_n \searrow x + y$*; співвідношення* $x_n \nearrow x,\ y_n \nearrow y$ *тягнуть за собою* $x_n + y_n \nearrow x + y$*; співвідношення* $x_n \searrow x$ *і* $-x_n \nearrow -x$ *рівносильні.*

◀ Нехай $v_n \nearrow v$. Візьмемо довільний елемент $u$ і позначимо $w_n = u + v_n,\ w = u + v$. За побудовою

$$w_n \leqslant w,\ n \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

З іншого боку, якщо $t \geqslant w_n,\ n \in \mathbb{N}$, то $t - u \geqslant v_n,\ n \in \mathbb{N}$, звідки $t - u \geqslant v$, або, рівносильно, $t \geqslant w$. Це в поєднанні з (17) означає що $\sup(u + v_n) = u + \sup v_n$. Ми довели імплікацію

$$v_n \nearrow v \implies u + v_n \nearrow u + v. \tag{18}$$

Нехай тепер $x_n \nearrow x,\ y_n \nearrow y$. Тоді

$$x_n + y_n \leqslant x + y,\ n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Візьмемо довільний елемент $z$ такий, що $x_n + y_n \leqslant z,\ n \in \mathbb{N}$. За умовою зростання $(x_n)\quad x_m + y_n \leqslant z$ при $n \geqslant m$. Звідси, скориставшись по черзі умовами $y_n \nearrow y,\ x_m \nearrow x$ і, обидва рази, імплікацією (18), одержуємо $x + y \leqslant z$, що в поєднанні з (19) дає $x + y = \sup(x_n + y_n)$. Цим імплікацію

$$x_n \to x \quad \& \quad y_n \to y \implies x_n + y_n \to x + y$$

доведено для зростаючих послідовностей $(x_n)$ і $(y_n)$. Для спадних міркування аналогічні.

Друге твердження теореми очевидним чином випливає з наслідку 3.7. ▶

Упорядковану множину, поєднуючу властивості впорядкованої адитивної групи і ґратки, назвемо *адитивною ґраткою* (аналогічно означується *адитивна δ-ґратка*). Адитивну ґратку можна розглядати як однотипну з упорядкованими адитивними групами алгебричну систему, але можна і як алгебру – приєднавши до операцій адитивної групи ґраткові операції $\vee$ і $\wedge$ (тоді немає потреби розглядати порядок як головне відношення).

**Лема 3.20.** *В адитивній ґратці мають місце тотожності*

$$(u \vee v) + w = (u + w) \vee (v + w), \quad (u \wedge v) + w = (u + w) \wedge (v + w), \tag{20}$$

$$-(u \vee v) = (-u) \wedge (-v), \quad -(u \wedge v) = (-u) \vee (-v). \tag{21}$$

◀ Написавши згідно з наслідком 3.6 і означенням ґраткових операцій імплікації

$$\begin{aligned}(u \vee v) + w \leqslant x \;&\Leftrightarrow\; u \vee v \leqslant x - w \;\Leftrightarrow\; u \leqslant x - w \;\;\&\;\; v \leqslant x - w \\ &\Leftrightarrow\; u + w \leqslant x \;\;\&\;\; v + w \leqslant x \;\Leftrightarrow\; (u + w) \vee (v + w) \leqslant x,\end{aligned}$$

одержуємо першу з тотожностей (20). Друга доводиться аналогічно.

Написавши згідно з наслідком 3.7 і означенням ґраткових операцій імплікації

$$\begin{aligned}x \leqslant -(u \vee v) \;&\Leftrightarrow\; u \vee v \leqslant -x \;\Leftrightarrow\; u \leqslant -x \;\;\&\;\; v \leqslant -x \\ &\Leftrightarrow\; x \leqslant -u \;\;\&\;\; x \leqslant -v \;\Leftrightarrow\; x \leqslant (-u) \wedge (-v),\end{aligned}$$

одержуємо першу з тотожностей (21). Друга доводиться аналогічно. ▶

Для довільного елемента $u$ адитивної ґратки позначимо

$$u_+ = u \vee 0, \; u_- = -(u \wedge 0).$$

Написавши згідно з лемою 3.20

$$((u - v) \vee 0) + v = (u - v + v) \vee (0 + v), \quad -(u \wedge 0) = (-u) \vee 0,$$

одержуємо

**Наслідок 3.8.** *В адитивній ґратці мають місце тотожності*

$$(u - v)_+ + v = u \vee v, \quad u_- = (-u)_+.$$

**Лема 3.21.** *Адитивна ґратка дистрибутивна.*

◀ Для довільних $u$ і $v$ $\quad u_+ \wedge v_+ = (u \wedge 0) \wedge (v \wedge 0) = u \wedge v \wedge 0 = (u \wedge v)_+$, а значить для довільних $x$, $y$ і $z$

$$(y - x)_+ \wedge (z - x)_+ = ((y - x) \wedge (z - x))_+.$$

Перетворивши праву частину згідно з лемою 3.20, дістанемо

$$(y - x)_+ \wedge (z - x)_+ = ((y \wedge z) - x)_+.$$

Додавши до обох частин цієї рівності $x$ і ще раз скориставшись лемою 3.20, одержимо

$$((y-x)_+ + x) \wedge ((z-x)_+ + x) = ((y \wedge z) - x)_+ + x.$$

Наслідок 3.8 дозволяє переписати останню рівність у такій формі:

$$(y \vee x) \wedge (z \vee x) = (y \wedge z) \vee x.$$

А це не що інше, як розподільчий закон (2.7). Замінивши в ньому $x$, $y$, $z$ на $-x$, $-y$, $-z$ відповідно і скориставшись рівностями (**??**)2.8), одержуємо розподільчий закон (8). ►

**Наслідок 3.9 (**з леми 3.21 і теореми 2.3 **).** *В адитивній ґратці співвідношення* $x_n \searrow x,\ y_n \searrow y$ *зумовлюють* $x_n \wedge y_n \searrow x \wedge y,\ x_n \vee y_n \searrow x \vee y$*; співвідношення* $x_n \nearrow x,\ y_n \nearrow y$ *тягнуть за собою* $x_n \wedge y_n \nearrow x \wedge y,\ x_n \vee y_n \nearrow x \vee y$.

`3.4. Кільця.` Алгебра з операціями додавання і множення називається *кільцем*, якщо вона є групою за додаванням, а множення в ній дистрибутивне відносно додавання:

$$x(y+z) = xy + xz, \quad (y+z)x = yx + zx. \tag{22}$$

Кільце називається *асоціативним* (відповідно *комутативним*), якщо такою є операція множення в ньому. Асоціативне кільце з одиницею (нейтральним елементом множення) назвемо *монокільцем*[2].

Із тотожності $y = y - z + z$ і розподільчих законів (22) маємо $xy = x(y-z) + xz, \quad yx = (y-z)x + zx$, звідки

$$x(y-z) = xy - xz, \quad (y-z)x = yx - zx. \tag{23}$$

Таким чином, у кільці множення дистрибутивне і відносно віднімання. Поклавши в (23) $z = y$, дістанемо

$$x0 = 0 = 0x. \tag{24}$$

Асоціативними комутативними кільцями є, очевидно, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ і $\mathbb{R}$, а також, що не зовсім очевидно, $\mathbb{C}$ (перевірте асоціативність множення

[2]Новий термін, навіяний тим, що таке кільце є моноїдом за множенням.

комплексних чисел і дистрибутивність його відносно додавання). Монокільце всіх квадратних матриць фіксованого розміру $n$ асоціативне, але при $n > 1$ не комутативне. Кільце $\mathbb{R}^3$ зі звичайним додаванням і векторним множенням не комутативне, не асоціативне і не має одиниці.

**Лема 3.22.** *Нехай $x$ і $y$ – оборотні елементи монокільця. Тоді* $y^{-1} - x^{-1} = y^{-1}(x - y)x^{-1}$.

◀ Скориставшись спочатку першою, а потім другою рівністю (23) і, в обох випадках, асоціативністю множення в кільці, дістанемо $y^{-1} - x^{-1} = y^{-1}\left(1 - yx^{-1}\right), \quad \left(1 - yx^{-1}\right) = (x - y)x^{-1}$. ▶

Асоціативне монокільце, в якому всі ненульові елементи оборотні, називається *тілом*. Тіло з комутативним множенням називається *полем*. Полями є $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$. Менш очевидний приклад поля – множина $\mathbb{Q} + \sqrt{k}\mathbb{Q}$, де $k$ – фіксоване натуральне число, що не є повним квадратом. Тотожність

$$\frac{1}{a + b\sqrt{k}} = \frac{a - b\sqrt{k}}{a^2 - b^2 k}$$

показує оборотність усіх ненульових елементів цієї множини (поясніть, чому знаменник дробу в правій частині відмінний від нуля). Існують і скінченні поля, найпростішим із яких є $\{0, 1\}$ з операціями $\wedge$ і $\vee$ у ролі множення і додавання (*булеве поле*).

Пригадаймо, що конгруенція на алгебричній системі це інваріантна відносно в с і х її головних операцій еквівалентність, так що всяка конгруенція на кільці є конгруенцією на його адитивній групі, але не навпаки (бо в кільці більше головних операцій).

**Лема 3.23.** *Для того щоб бінарне відношення $\sigma$ на кільці було конгруенцією, необхідно і достатньо, щоб воно було еквівалентністю з властивостями* (11) *і*

$$x_1 \,\sigma\, y_1 \;\;\&\;\; x_2 \,\sigma\, y_2 \Longrightarrow (x_1 x_2) \,\sigma\, (y_1 y_2). \tag{25}$$

◀ Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $\sigma$ – конгруенція на кільці, тобто інваріантна відносно віднімання і множення еквівалентність. Інваріантність $\sigma$ відносно множення якраз і виражається формулою (25). Усяка еквівалентність за означенням рефлексивна, тобто містить усі пари $(x, x)$, зокрема $(0, 0)$. Тоді лема 3.16 у частині необхідності стверджує, що $\sigma$ має властивість (11).

Достатність. Нехай $\sigma$ – еквівалентність (так що $(0,\,0) \in \sigma$) із властивостями (11) і (25). Друга з них означає інваріантність $\sigma$ відносно множення, а перша за лемою 3.16 у частині достатності зумовлює інваріантність $\sigma$ операцій адитивної групи. ►

**Лема 3.24.** *Нехай $K$ – множина в кільці $E$ така, що $0 \in K$. Тоді для того щоб задане рівністю* (14) *бінарне відношення $\sigma_K$ на $E$ мало властивість* (25)*, необхідно і достатньо, щоб множини $KE$ і $EK$ містились у $K$.*

◄ У доведенні замість $\sigma_K$ пишемо $\sigma$.

Необхідність. Із (14) і умови $0 \in K$ маємо

$$(0,0) \in \sigma, \tag{26}$$

що дозволяє записати імплікації

$$a \in K \overset{(14)}{\Longleftrightarrow} a\,\sigma\,0 \quad \overset{(25),\,(26)}{\Longrightarrow} \forall\, x \in E \quad (\,(ax)\,\sigma\,0 \quad \&\quad (xa)\,\sigma\,0\,)$$
$$\overset{(14)}{\Longleftrightarrow} \forall\, x \in E \quad (ax \in K \;\&\; xa \in K).$$

Достатність. Нехай $x_1\,\sigma\,y_1,\ x_2\,\sigma\,y_2$, тобто $x_1 - y_1 \in K,\ x_2 - y_2 \in K$. Тоді, написавши тотожність

$$x_1x_2 - y_1y_2 = (x_1 - y_1)x_2 + y_1(x_2 - y_2),$$

виводимо з припущення $KE \cup EK \subset K$, що $x_1x_2 - y_1y_2 \in K$, тобто $x_1x_2\,\sigma\,y_1y_2$. ►

*Правим (лівим) ідеалом* у кільці $R$ називається множина $K \subset R$ така що $K - K \subset K$ (тобто $K$ підгрупа адитивної групи кільця) і $KR \subset K$ (відповідно $RK \subset K$). Інакше кажучи, правий (лівий) ідеал у кільці $R$ це множина $K \subset R$ така, що: 1) різниця всяких двох її елементів сама належить $K$; 2) добуток ($ax$ в означенні правого ідеала і $xa$ в означенні лівого) будь-яких двох елементів $a \in K$ і $x \in R$ належить $K$. Множина, що є і правим, і лівим ідеалом, називається *двостороннім ідеалом*. У комутативному кільці всі ідеали двосторонні. Скрізь нижче слово "ідеал" означає "двосторонній ідеал".

Роль ідеалів у теорії кілець починає розкриватися в наступному твердженні.

**Наслідок 3.10.** *Нехай $K$ – множина в кільці $E$ така, що $0 \in K$. Тоді для того щоб задане формулою* (14) *відношення $\sigma_K$ на $E$ було конгруенцією, необхідно і достатньо, щоб $K$ була ідеалом.*

◀ У доведенні замість $\sigma_K$ пишемо $\sigma$.

Необхідність. Нехай $\sigma$ – конгруенція на кільці $E$, а значить і на його адитивній групі. Тоді за наслідком 3.4 $K$ – підгрупа адитивної групи кільця $E$. За лемою 3.23 $\sigma$ має властивість (25), відтак за лемою 3.24 $KE \cup EK \subset K$.

Достатність. Нехай $K$ ідеал у кільці, відтак і підгрупа його адитивної групи. Тоді за наслідком 3.4 $\sigma$ – конгруенція на адитивній групі кільця, а значить має властивість (11). За лемою 3.24 $\sigma$ має і властивість (25). Тепер лема 3.23 стверджує, що $\sigma$ – конгруенція на кільці. ▶

Із цього твердження і означення конгруенції одержуємо такий аналог наслідку 3.5.

**Наслідок 3.11.** *Нехай $K$ – ідеал у кільці $E$. Тоді операції у факторкільці $E/K$ виражаються через операції в $E$ так:*

$$[x] + [y] = [x + y], \quad -[x] = [-x], \quad [x][y] = [xy].$$

Очевидно, формула (15) залишається в силі і у випадку, коли $K$ ідеал у кільці.

Кожне кільце містить два тривіальні ідеали, один із них складається тільки з нуля, а інший співпадає з усім кільцем. Усі інші ідеали (як двосторонні, так і односторонні) називаються *власними*. Класичним прикладом ідеала, з якого (прикладу) й виросло саме це поняття, є множина $m\mathbb{Z} \equiv \{mn,\, n \in \mathbb{Z}\}$ у кільці $\mathbb{Z}$ ($m$ – фіксоване натуральне число), зокрема ($m = 2$) множина всіх парних чисел. Ось іще приклади.

**Приклад 3.3.** Нехай $R$ – довільне кільце. Тоді множини $x_0R$ і $Rx_0$, де $x_0$ деякий фіксований елемент кільця, – правий і лівий ідеали. Цей приклад охоплює й вищенаведену теоретико-числову ілюстрацію ($R = \mathbb{Z},\ x_0 = m$).

**Приклад 3.4.** Позначимо $M(R;\, m, n)$ множину всіх $m \times n$-матриць, елементи яких належать деякому кільцю $R$. Очевидно, $M(R;\, n, n)$ – кільце відносно звичайних операцій додавання і множення матриць. Зафіксуємо кільце $R$ і натуральні числа $m, n$. Тоді: множина матриць виду $AX$,

де $A$ – фіксований представник $M(R;\, m, n)$, а $X$ пробігає $M(R;\, n, m)$, – правий ідеал в $M(R;\, m, m)$; множина матриць виду $XA$ – лівий ідеал в $M(R;\, n, n)$.

**Приклад 3.5.** Нехай $R$ – довільне кільце, $T$ – довільна непорожня множина, $t_0$ – фіксована точка в ній. Тоді множина $\left\{x(\cdot) \in R^T : x(t_0) = 0\right\}$ – ідеал у кільці $R^T$.

**Лема 3.25.** *Власний правий (лівий) ідеал у монокільці не містить оборотних елементів, зокрема одиниці.*

◀ Якби він містив одиницю, то містив би всі елементи кільця і тому не був би власним.

Якщо правий (лівий) ідеал містить оборотний елемент $x$, то він містить і добуток $xx^{-1}$ (відповідно $x^{-1}x$). Але кожен із цих добутків дорівнює одиниці. ▶

**Наслідок 3.12.** *Для того щоб ідеал у монокільці був власним, необхідно і достатньо, щоб він не містив одиницю.*

**Наслідок 3.13.** *Нехай $x_0$ – елемент комутативного монокільця $R$. Тоді для того щоб ідеал $Rx_0$ був власним, необхідно і достатньо, щоб $x_0$ був необоротним.*

◀ Якщо $x_0$ оборотний, то $Rx_0$ містить $x_0^{-1}x_0$ $(=1)$, а значить не є власним ідеалом.

Нехай $Rx_0$ містить одиницю, тобто існує елемент $y \in R$ такий, що $yx_0 = 1$. Тоді за припущенням комутативності справджується також рівність $x_0y = 1$. Разом ці дві рівності означають, що $x_0$ оборотний. ▶

Власний ідеал (правий, лівий чи двосторонній), що не міститься в жодному відмінному від нього власному ідеалі того ж типу, називається *максимальним ідеалом.*

**Лема 3.26.** *Всякий власний правий (лівий, двосторонній) ідеал у монокільці міститься в деякому максимальному ідеалі того ж типу.*

◀ Нехай $I$ – власний ідеал одного з трьох типів. Позначимо множину всіх містячих його власних ідеалів того ж типу через $\Phi$.

Нехай $T$ – деяка непорожня лінійно впорядкована множина, а $K_t,\ t \in T$, – однотипні з $I$ власні ідеали, причому $K_s \subset K_t$, якщо $s < t$

(тобто $\{K_t,\ t \in T\}$ – ланцюг у $\Phi$). Позначимо $K = \bigcup\limits_{t\in T} K_t$. За побудовою $K$ ідеал того ж типу (перевірте виконання обох вимог з означення ідеала) і $K_t \subset K$ при всіх $t$. Крім того, $K$ не містить, як і всі $K_t$, одиницю, так що $K \in \Phi$. Таким чином, в упорядкованій відношенням $\subset$ множині $\Phi$ всякий ланцюг обмежений зверху. Тоді за лемою Цорна для всякого $J \in \Phi$ існує максимальний ідеал $J^*$ такий, що $J \subset J^*$. Узявши $J = I$, одержуємо твердження леми. ►

Узявши в лемі $I = Rx_0$, виводимо з неї

**Наслідок 3.14.** *Всякий необоротний елемент $x_0$ комутативного монокільця $R$ міститься в деякому максимальному ідеалі.*

Очевидно, перетин довільної сукупності ідеалів (правих, лівих, двосторонніх) – ідеал того ж типу. Це робить коректним таке означення. Найменший із двосторонніх ідеалів, що містять множину $A$ в деякому кільці, називається *ідеалом, породженим множиною $A$*, і позначається $\mathfrak{I}(A)$. Замість $\mathfrak{I}(M \cup \{x\})$ пишуть $\mathfrak{I}(M, x)$. Читач легко доведе таке.

**Лема 3.27.** *Нехай $M$ – ідеал у комутативному кільці $R$, а $x$ – елемент цього кільця. Тоді $\mathfrak{I}(M, x) = M + Rx$.*

**Теорема 3.3** (Гельфанд)**.** *Для того щоб власний ідеал $M$ у комутативному кільці $R$ був максимальним, необхідно і достатньо, щоб фактор-кільце $R/M$ було полем.*

◄ Необхідність. Нехай $M$ максимальний, тобто для будь-якого $x \in R \setminus M \quad \mathfrak{I}(M, x) = R$. За наслідком 3.12 остання рівність означає, що $\mathfrak{I}(M, x)$ містить одиницю. А це згідно з лемою 3.27 рівносильно існуванню такого $y \in R$, що $xy - 1 \in M$, $[xy] = [1]$. При цьому за формулою (2) $[xy] = [x][y]$ (тут істотно, що ми факторизуємо по конгруенції, а не по довільній еквівалентності); внаслідок перестановності множення в $R \quad xy = yx$ (так що фактор-кільце $R/M$ також комутативне). Отже $[x][y] = [1] = [y][x]$. Таким чином, для будь-якого $x \in R \setminus M$ елемент $[x] \in R/M$ оборотний. Рівносильно: кожний відмінний від $[0]$ елемент фактор-кільця $R/M$ оборотний. А це в поєднанні з комутативністю фактор-кільця означає, що воно є полем.

Достатність. Нехай $M$ власний ідеал, так що $R \setminus M \neq \varnothing$. Якщо він не максимальний, то можна вибрати елемент $x \in R \setminus M$ так,

що ідеал $\mathfrak{I}(M,x)$ також власний, а значить не містить одиницю (лема 3.25). За лемою 3.27 ця властивість елемента $x$ рівносильна тому, що для будь-яких $z\in M$ і $y\in R\quad z+xy\neq 1$. У такому разі для будь-яких $u,v,w\in M$ і $y\in R\quad u+(x+v)(y+w)\neq 1$ (бо $u+xw+vy\in M$). А це з огляду на (15) означає, що для будь-якого $y\in R\quad [x][y]\neq 1$. При цьому $[x]\neq[0]$ за вибором $x$. Отже $[x]$ – ненульовий необоротний елемент кільця $R/M$. ►

3.5. **Булеві кільця.** Елемент $x$ групоїда такий, що $xx=x$, називається *ідемпотентним*.

**Лема 3.28.** *Нехай усі елементи кільця ідемпотентні. Тоді воно комутативне і кожний його елемент протилежний сам собі.*

◄ Для довільних елементів $x$ і $y$ такого кільця маємо

$$x+y=(x+y)(x+y)=xx+xy+yx+yy=x+xy+yx+y=xy+yx+x+y,$$

де перша і третя рівності випливають з ідемпотентності елементів $x+y, x$ і $y$, друга – з розподільчих законів (22), а четверта – з комутативності додавання. Отже $x+y=xy+yx+x+y$, звідки, скориставшись тим, що кільце є групою за додаванням, одержуємо $xy+yx=0$. Поклавши тут $y=x$, дістанемо $x+x=0$, що доводить друге твердження леми. Із нього, додавши $xy$ до обох частин рівності $xy+yx=0$ і скориставшись асоціативністю додавання, виводимо перше твердження. ►

Асоціативне кільце, всі елементи якого ідемпотентні, називається *булевим*.

**Теорема 3.4** (Стоун)**.** *Нехай $S$ – булеве кільце. Тоді: 1) бінарне відношення $\{(x,y): xy=y\}$ – порядок на $S$; 2) в упорядкованій таким чином множині $S$*

$$x\wedge y=xy, \tag{27}$$

$$x\vee y=x+y+xy, \tag{28}$$

*так що $S$ ґратка; 3) ця ґратка дистрибутивна; 4) нейтральний елемент додавання є найменшим елементом цієї ґратки: $0=\mathbf{0}$; 5) $S$ – булева ґратка, в якій*

$$y\ominus x=y+xy. \tag{29}$$

◀ Будемо записувати рівність $xy = x$ у вигляді $x \prec y$. Відношення $\prec$ рефлексивне внаслідок ідемпотентності $x$. Якщо $x \prec y$ і $y \prec x$, то $xy = x,\ yx = x$, звідки за першим твердженням леми 3.28 $x = y$. Отже відношення $\prec$ антисиметричне.

Нехай $x \prec y \prec z$, тобто $xy = x,\ yz = y$. Помноживши другу рівність зліва на $x$ і скориставшись асоціативністю множення в булевому кільці, дістанемо $(xy)z = xy$, звідки з урахуванням першої рівності маємо $xz = x$, тобто $x \prec z$. Цим доведено транзитивність відношення $\prec$, відтак і перше твердження теореми.

Випливаючі з леми 3.28 і означення булевого кільця рівності $xyx = xxy = xy,\ xyy = xy$ показують, що $xy \prec x,\ xy \prec y$, тобто $xy$ – одна з мінорант множини $\{x, y\}$. Нехай $z$ – довільна міноранта цієї ж множини, тобто $z \prec x,\ z \prec y$. Тоді $z = zx,\ z = zy$, відтак $zz = zxzy$. Але $z = zz,\ zxzy = zzxy = zxy$. Отже $z = zxy$. Таким чином, $xy$ – найбільша з мінорант множини $\{x, y\}$. Цим доведено рівність (27).

Випливаючі з означення булевого кільця і з леми 3.28 рівності $x(x + y + xy) = xx + xy + xxy = x + xy + xy = x,\quad y(x + y + xy) = y(y+x+yx)$ показують, що $x \prec x+y+xy,\ y \prec x+y+xy$, тобто $x+y+xy$ – одна з мажорант множини $\{x, y\}$. Нехай $z$ – довільна мажоранта цієї ж множини: $xz = x,\ yz = y$. Тоді $(x + y + xy)z = x + y + xyz = x + y + xy$, тобто $x + y + xy \prec z$. Таким чином, $x + y + xy$ – найменша з мажорант множини $\{x, y\}$. Цим доведено рівність (28), а з нею й друге твердження теореми.

Випливаючі з (28), (27), леми 3.28 і означення булевого кільця рівності $x \vee (y \wedge z) = x+yz+xyz,\quad (x \vee y)(x \vee z) = (x+y+xy)(x+z+xz) = x+xz+xz+xy+yz+xyz+xy+xyz+xyz = x+yz+xyz,\quad x \wedge (y \vee z) = x(y+z+yz) = xy+xz+xyz,\quad (x \wedge y)(x \wedge z) = xy+xz+xyxz = xy+xz+xyz$ доводять розподільчі закони (2.7) і (2.8), відтак і третє твердження теореми.

Четверте твердження випливає з (27), (24) і означення порядку $\prec$.

Випливаючі з означення булевого кільця і леми 3.28 рівності

$$x + y + xy + x(y + xy) = x + y + xy + xy + xy = x + y + xy$$

показують спільно з (28), що

$$x \vee (y + xy) = x \vee y. \tag{30}$$

Із (27) і означення булевого кільця маємо $x \wedge (y + xy) = xy + xy$, звідки за лемою 3.28 $x \wedge (y + xy) = 0$. Четверте твердження теореми дозволяє переписати останню рівність у вигляді $x \wedge (y + xy) = \mathbf{0}$. Звідси і з (30) одержуємо за означенням доповнення в дистрибутивній гратці (§ 2) рівність (29). Права частина її визначена при всіх $x, y$, тож доповнення $x$ до $y$ існує для всіх $x, y \in S$. Тепер п'яте твердження випливає з перших чотирьох і означення булевої ґратки (§ 2). ►

**Теорема 3.5** (Стоун)**.** *Усяка булева ґратка є булевим кільцем відносно заданих рівностями*

$$x + y = x \oplus y, \tag{31}$$

$$xy = x \wedge y \tag{32}$$

*операцій додавання і множення. При цьому найменший елемент ґратки є нейтральним елемент додавання:* $\mathbf{0} = 0$*, а ґраткова операція* $\vee$ *виражається через операції кільця за формулою* (28)*.*

◄ Комутативність заданого рівностями (31) і (16) додавання зумовлена взаємозамінністю змінних у правій частині останньої; асоціативність є твердженням леми 2.15. Рівності (17) доводять друге твердження і показують, що кожний елемент протилежний сам собі. Отже булева ґратка є адитивною групою.

Оскільки, очевидно, $x \wedge x = x$, то кожний елемент ідемпотентний відносно заданого рівністю (32) множення. Другий сполучний закон (1) стверджує асоціативність такого множення, а лема 2.14 – дистрибутивність його відносно додавання. Цим доведено перше твердження. І нарешті, формула (31) перетворює стверджувану лемою 2.16 рівність (21) на (28). ►

Дві теореми Стоуна, пряма і обернена, разом означають, що класи булевих ґраток і булевих кілець по суті співпадають, відрізняючись тільки позначеннями операцій (виразам $x + y, xy$ і 0 у кільці відповідають $x \oplus y, x \wedge y$ і $\mathbf{0}$ у ґратці). Але взаємної відповідності між операціями недостатньо для повного ототожнення понять булевої ґратки і булевого кільця, адже це алгебри різної сигнатури: в булевій ґратці на роль головних бінарних операцій призначено $\vee$ (не $\oplus$) і $\wedge$, тоді як у булевому кільці – додавання і множення (вони ж $\oplus$ і $\wedge$), але не $\vee$.

Доведення теореми 3.5 виявилось порівняно коротким завдяки тому, що леми 2.14 і 2.15 увібрали в себе основні технічні труднощі. Насправді ж друга теорема Стоуна складніша і глибша за першу.

Збагативши сигнатури обох цих алгебр ще одною нульмісною операцією – константою 1 (у кільці) або **1** (у ґратці), можемо уточнити обидві теореми Стоуна.

**Теорема 3.6** (Стоун)**.** *Нехай $S$ – булеве монокільце. Тоді додатково до того, щó стверджує теорема 3.4, справджується таке: $S$ булева алгебра, найбільший елемент якої співпадає з нейтральним елементом множення:* $\mathbf{1} = 1$.

◀ Стверджувана теоремою 3.4 рівність (27) дозволяє переписати характеристичну властивість нейтрального елемента множення у вигляді $x \wedge 1 = x$. Таким чином, для будь-якого $x \in S$ маємо $x \prec 1$. ▶

Аналогічно з теореми 3.5 виводиться

**Теорема 3.7** (Стоун)**.** *Усяка булева алгебра є булевим монокільцем відносно заданих рівностями* (31) *і* (32) *операцій додавання і множення. При цьому найменший і найбільший елементи ґратки є нейтральним елементами додавання і множення відповідно, а ґраткова операція $\vee$ виражається через операції кільця за формулою* (28).

Разом останні дві теореми означають, що поняття булевої алгебри і булевого монокільця по суті тотожні.

`3.6. Дворівневі алгебри.` Нехай $(R; \mathrm{Op}(R))$ і $(X; \mathrm{Op}(X))$ – алгебри, обидві наділені асоціативним комутативним додаванням і, можливо, ще якимись операціями (тому й пишемо $\mathrm{Op}(R), \mathrm{Op}(X)$, а не просто Op). Елементи множини $X$ позначаємо латинськими буквами, а елементи $R$ грецькими. Припустимо, що в $R \times X$ якимось чином задано операцію "зовнішнього множення" $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$, пов'язану з операціями додавання в $X$ і $R$ розподільчими законами

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x. \tag{33}$$

Наша мета – сконструювати з $X$ і $R$ алгебру, в сигнатуру якої входить "зовнішнє множення". У випадку $\mathrm{Op}(X) = \mathrm{Op}(R)$ (тоді можна писати просто Op) для цього достатньо приєднати його до $\mathrm{Op}(X \times R)$ (= Op

— див. п. 3.1). Але прямий добуток алгебр різної сигнатури не означено, тому в загальному випадку чинять інакше: розглядають "зовнішнє множення" не як одну двомісну операцію, а як сукупність одномісних операцій $x \mapsto \alpha x$ дії фіксованого елемента $\alpha \in R$ на змінний елемент множини $x \in X$, так що кожному елементові першої відповідає своя операція, символом якої є він сам (і немає потреби інтерпретувати її як множення – така інтерпретація можлива, але не універсальна). Рівносильно: розглядають $X$ як алгебру сигнатури $\mathrm{Op}(X) \cup R$, постулюючи тотожності (33). Як правило в ролі $R$ виступає не просто адитивна напівгрупа, а асоціативне кільце. У такому разі додатково до (33) постулюють ще сполучні закони для зовнішніх множень:

$$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x. \tag{34}$$

Якщо ж $R$ монокільце, то вимагають також, щоб

$$1x = x. \tag{35}$$

Так ми приходимо до важливого алгебричного поняття, вірніше пари дзеркально симетричних понять. *Лівим модулем* над асоціативним кільцем $R$ називається адитивна група, наділена додатково операціями множення $x \mapsto \alpha x$ зліва на елементи $R$ (для кожного $\alpha \in R$ своя одномісна операція) в такий спосіб, що справджуються розподільчі закони (33) і сполучний закон (34), а якщо $R$ монокільце, то й калібрувальний закон (35). *Правим модулем* над асоціативним кільцем $R$ називається адитивна група, наділена додатково операціями множення $x \mapsto x\alpha$ справа на елементи $R$ (для кожного $\alpha \in R$ своя одномісна операція) в такий спосіб, що справджуються розподільчі закони

$$(x + y)\alpha = x\alpha + y\alpha, \quad x(\alpha + \beta) = x\alpha + x\beta \tag{36}$$

і сполучний закон

$$(x\beta)\alpha = x(\beta\alpha), \tag{37}$$

а якщо $R$ монокільце, то й калібрувальний закон

$$x1 = x. \tag{38}$$

Модуль над кільцем $R$ називають коротше $R$-модулем.

З а с т е р е ж е н н я. Якщо кільце $R$ не комутативне, то лівий (правий) модуль не стане правим (лівим) від зміни порядку запису операндів. Справді, якщо в лівому модулі замість $\alpha x$ почати писати $x\alpha$, то рівність (34) набуде вигляду $(x\beta)\alpha = x(\alpha\beta)$, що відрізняється від (37). Але якщо кільце $R$ комутативне, то $\alpha\beta = \beta\alpha$ і відмінність між лівими і правими модулями стає формальною. У решті ж випадків вона посутня. Нехай, наприклад, $R = M(\mathbb{R}; n, n)$. Тоді адитивна група $\mathbb{R}^n$ усіх $n$-мірних векторів-стовпчиків буде лівим $R$-модулем, а група $\mathbb{R}^{n*}$ всіх $n$-мірних векторів-рядків – правим. Було б наївно ототожнювати стовпчик і рядок з однаковими координатами, адже при переході до іншого базису координати одного й другого змінюються за різними законами.

Окремим випадком кільця є тіло. Лівий (правий) модуль над тілом називається *векторним простором* або *лінійним простором* над цим тілом. Якщо тіло не є полем (тобто не комутативне), то треба розрізняти лівий і правий векторні простори. Однак ми розглядатимемо векторні простори тільки над полями, причому не над довільними. С к р і з ь н и ж ч е в ц і й к н и з і вираз "поле $\mathbb{K}$" о з н а ч а є "$\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$". Векторний простір над $\mathbb{R}$ називають ще дійсним, а над $\mathbb{C}$ – комплексним.

Якщо $X$ – векторний простір над полем $\mathbb{K}$, то відображення з $X$ у $\mathbb{C}$ називатимемо *функціоналом*. Навіть у випадку $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ фунціонал може набувати комплексних значень! Якщо ж $\operatorname{im} f \subset \mathbb{R}$, то говоримо "дійсний функціонал".

Підмножину векторного простору, яка містить усі лінійні комбінації всякої пари своїх точок, називатимемо *лінійною множиною*[3].

**Лема 3.29.** *Нехай $K$ – непорожня множина у векторному просторі $E$. Тоді для того щоб задане рівністю* (14) *відношення $\sigma_K$ на $E$ було конгруенцією, необхідно і достатньо, щоб множина $K$ була лінійною.*

◀ У доведенні замість $\sigma_K$ пишемо $\sigma$.

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $\sigma$ інваріантне відносно операцій адитивної групи. Тоді за наслідком 3.4 $K$ підгрупа адитивної групи $E$. Для заданого рівністю (14) відношення $\sigma$ інваріантність відносно множень на скаляри виражається імплікацією

$$x - y \in K \Longrightarrow \lambda(x - y) \in K.$$

[3]В лінійній алгебрі таку підмножину називають підпростором, але у функціональному аналізі термін "підпростір" має дещо інакший смисл – див. п. 8.1.

Поклавши тут $y = 0$, одержуємо $\lambda K \subset K$.

Достатність. Нехай $K$ лінійна множина, а значить і підгрупа адитивної групи векторного простору $E$. Тоді за наслідком 3.4 $\sigma$ – інваріантна відносно операцій адитивної групи еквівалентність. Якщо, крім того, $\lambda K \subset K$ при всіх $\lambda \in \mathbb{K}$, то, очевидно, відношення $\sigma$ інваріантне відносно множень на скаляри. ►

Із цієї леми і означення конгруенції одержуємо такий аналог наслідків 3.5 і 3.11.

**Наслідок 3.15.** *Нехай $K$ – лінійна множина у векторному просторі $E$. Тоді операції у векторному просторі $E/K$ виражаються через операції в $E$ так:*

$$[x] + [y] = [x + y], \quad \lambda[x] = [\lambda x].$$

Очевидно, формула (15) залишається в силі і у випадку, коли $K$ лінійна множина у векторному просторі.

Векторний простір над полем $\mathbb{R}$, наділений інваріантним відносно додавання і множень на невід'ємні числа порядком, відносно якого він є ґраткою, називається *векторною ґраткою* або *лінеалом*. Інакше кажучи, лінеал це поєднуюча властивості дійсного векторного простору і адитивної ґратки впорядкована множина, в якій добуток усякого невід'ємного елемента на довільне невід'ємне число – невід'ємний елемент.

3.7. Лінійні кільця. $R$-модуль $X$, наділений додатково асоціативною операцією множення, пов'язаною з додаванням розподільчими законами (22), а із зовнішніми множеннями – сполучними законами

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \tag{39}$$

(у цих рівностях $x, y, z \in X$, $\alpha \in R$), назвемо *$R$-кільцем*. Окремим випадком асоціативного комутативного монокільця є поле. У цьому випадку замість $R$ пишемо $\mathbb{K}$ і називаємо $\mathbb{K}$-кільце *лінійним кільцем* над полем $\mathbb{K}$. Рівносильно його можна означити як векторний простір над полем $\mathbb{K}$, наділений, крім лінійних операцій, асоціативним множенням, пов'язаним із додаванням розподільчими законами (22), а з множеннями на скаляри – сполучними законами (39).

Скрізь нижче за умовчанням $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, тож говоримо просто "лінійне кільце". Для довільної мультиплікативної напівгрупи $E$ через $E_0$ позначимо множину оборотних елементів її. Далі в цьому пункті $X$ – лінійне

кільце. Для довільного $x \in X$ позначаємо

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda 1 \notin X_0\}, \quad \operatorname{reg} x = \mathbb{C} \setminus \sigma(x).$$

Множину $\sigma(x)$ називають *спектром* $x$, а точки множини $\operatorname{reg} x$ – *регулярними числами* цього елемента. Пов'яжемо з кожним $x \in X$ задану рівністю

$$R_x(\lambda) = (x - \lambda 1)^{-1} \tag{40}$$

функцію $R_x : \operatorname{reg} x \to X$, звану *резольвентою* елемента $x$. У літературі зазвичай пишуть не $R_x(\lambda)$, а $R_\lambda(x)$. Але це йде врозріз із загальноматематичною традицією писати аргумент функції в дужках, а параметр на місці індекса.

Нехай $x, y_1, y_2$ – елементи довільного кільця такі, що $x + y_1$ і $x + y_2$ оборотні. Тоді за лемою 3.22

$$(x + y_2)^{-1} - (x + y_1)^{-1} = (x + y_2)^{-1}(y_1 - y_2)(x + y_1)^{-1}.$$

Поклавши, у випадку лінійного кільця, $y_1 = -\lambda 1,\ y_2 = -\mu 1$, дістанемо *тотожність Гільберта*

$$R_x(\mu) - R_x(\lambda) = (\mu - \lambda) R_x(\mu) R_x(\lambda). \tag{41}$$

Поняття многочлена переноситься без змін із функцій комплексної змінної на фунції змінної $x \in X$ (нульовий степінь якої вважаємо, ясна річ, рівним одиниці). При цьому зберігаються звичайні правила додавання і множення многочленів на зразок $a1 + bx + p1 + qx = (a + p)1 + (b + q)x,\ (a1 + bx)(p1 + qx) = ap1 + (aq + bp)x + bqx^2$.

**Теорема 3.8.** *Для довільних елемента $x$ лінійного кільця $X$ і многочлена $\varphi$ має місце рівність $\sigma(\varphi(x)) = \varphi(\sigma(x))$.*

◀ Для многочлена нульового степеня твердження очевидне. Нехай $\varphi$ – многочлен степеня $n > 0$. Тоді для будь-якого $\lambda$ $\varphi - \lambda$ – також многочлен степеня $n$, а значить існують числа $t_1(\lambda), \ldots, t_n(\lambda)$ (не обов'язково всі різні) і $c(\lambda) \neq 0$ такі, що

$$\varphi(t) - \lambda = c(\lambda) \prod_{j=1}^{n} (t - t_j(\lambda)). \tag{42}$$

Звідси маємо

$$\varphi(x) - \lambda 1 = c(\lambda) \prod_{j=1}^{n} (x - t_j(\lambda)1), \tag{43}$$

$$\lambda = \varphi(t_k(\lambda)), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{44}$$

Нехай $\lambda \in \sigma(\varphi(x))$, тобто елемент $\varphi(x) - \lambda 1$ необоротний. Тоді з (43) випливає за наслідком 3.1 існування такого $k \in \{1, \ldots, n\}$, що $t_k(\lambda) \in \sigma(x)$. А це з огляду на (44) означає, що $\lambda \in \varphi(\sigma(x))$.

Нехай тепер $\lambda \in \varphi(\sigma(x))$, тобто $\lambda = \varphi(t)$ для деякого $t \in \sigma(x)$. Тоді внаслідок (42) існує $k \in \{1, \ldots, n\}$ таке, що $t = t_k(\lambda)$. Остання рівність означає, за вибором $t$, що $t_k(\lambda) \in \sigma(x)$ і, таким чином, $k$-й множник у (43) необоротний, відтак за лемою 3.8 необоротний і весь добуток. Отже $\lambda \in \sigma(\varphi(x))$. ▶

*Інволюцією* на лінійному кільці називається одномісна операція $^*$ з властивостями

$$(x + y)^* = x^* + y^*, \quad (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \quad (xy)^* = y^* x^*, \quad x^{**} = x.$$

Лінійне кільце, на якому задано інволюцію, називається *інволютивним кільцем* або $*$*кільцем*. Із третьої властивості інволюції випливають рівність $1^* = 1$ і

**Лема 3.30.** *Нехай $x$ – оборотний елемент $*$кільця. Тоді $x^*$ теж оборотний і $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.*

Записавши за першими трьома властивостями інволюції $x^* - \lambda 1 = \left(x - \overline{\lambda} 1\right)^*$, виводимо з леми 3.30

**Наслідок 3.16.** *Для довільного елемента $x$ інволютивного кільця*

$$\sigma\left(x^*\right) = \overline{\sigma(x)} \equiv \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \sigma(x)\right\}.$$

Елемент $x$ інволютивного кільця такий, що $x^* = x$, називається *ермітовим*. Із цього означення і наслідку 3.16 маємо

**Наслідок 3.17.** *Спектр ермітового елемента інволютивного кільця дійсний.*

**3.8. Нерівності для 2-форм на векторних просторах.** Скрізь нижче риска над символом комплексного числа означає операцію комплексного спряження.

Усякий дійсний простір можна ізоморфно вкласти в комплексний в такий же спосіб, як поле $\mathbb{R}$ ізоморфно вкладають у $\mathbb{C}$. Тому скрізь нижче вважаємо, не обмежуючи загальності, всі векторні простори комплексними. Відображення $\varphi$ векторного простору $X$ у векторний простір $Y$ називається *однорідним* (*спряжено однорідним*) *над полем* $\mathbb{K}$, якщо для будь-яких $x \in X$ і $\lambda \in \mathbb{K}$ $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ $\big($відповідно $\varphi(\lambda x) = \overline{\lambda}\varphi(x)\big)$. Зрозуміло, що у випадку $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ спряжена однорідність не відрізняється від просто однорідності. Адитивне однорідне над полем $\mathbb{K}$ відображення називається *лінійним над полем* $\mathbb{K}$, а адитивне спряжено-однорідне – *напівлінійним* або *антилінійним* (за умовчанням – над полем $\mathbb{C}$). Лінійне (і так само напівлінійне) відображення частіше називають *лінійним* (відповідно *напівлінійним*) *оператором*, замінюючи слово "оператор" словом "функціонал" (а в деяких контекстах, особливо в курсі алгебри, – словом "форма"), якщо область значень міститься в $\mathbb{C}$. Функціонал $\varphi$ на $X \times Y$ називається: *білінійною формою над полем* $\mathbb{K}$, якщо він лінійний над цим полем по обох змінних; *півторалінійною формою*, якщо він лінійний по одній змінній і напівлінійний по іншій. Зрозуміло, що у випадку $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ півторалінійна форма це те саме, що білінійна форма, тому за умовчанням півторалінійність розуміють над полем $\mathbb{C}$. Якщо в міркуваннях розглядається тільки одна, незмінна від початку до кінця півторалінійна (білінійна) форма, то значення її на парі $(x, y) \in X \times Y$ позначатимемо $\langle x \,|\, y\rangle$ (відповідно $\langle x, y\rangle$). У цих позначеннях закладені в означення півторалінійної форми властивості записуються так (для визначеності тут і далі розглядаємо форму, лінійну по першій змінній і напівлінійну по другій):

$$\langle x_1 + x_2 \,|\, y\rangle = \langle x_1 \,|\, y\rangle + \langle x_2 \,|\, y\rangle, \tag{45}$$

$$\langle \lambda x \,|\, y\rangle = \lambda\langle x \,|\, y\rangle, \tag{46}$$

$$\langle x \,|\, y_1 + y_2\rangle = \langle x \,|\, y_1\rangle + \langle x \,|\, y_2\rangle, \tag{47}$$

$$\langle x \,|\, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x \,|\, y\rangle. \tag{48}$$

Аналогічно записуються властивості білінійної форми (у четвертій за дужки виноситься не $\overline{\lambda}$, а $\lambda$).

Разом білінійні і півторалінійні форми називають *2-формами*. Далі до кінця пункту $Y = X$. У цьому випадку прийнято говорити "2-форма на $X$", хоч насправді це функція на $X^2$. Очевидними наслідками даних вище означень є рівності

$$\langle \alpha x + \beta y \,|\, \alpha x + \beta y\rangle = |\alpha|^2\langle x \,|\, x\rangle + \alpha\overline{\beta}\langle x \,|\, y\rangle + \bar{\alpha}\beta\langle y \,|\, x\rangle + |\beta|^2\langle y \,|\, y\rangle, \quad (49)$$

$$\langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y\rangle = \alpha^2\langle x, x\rangle + \alpha\beta(\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle) + \beta^2\langle y, y\rangle. \quad (50)$$

(Без припущення $Y = X$ вираз $\alpha x + \beta y$ просто не мав би смислу). Поклавши в останній рівності $\alpha = \langle x, y\rangle,\ \beta = -\langle x, x\rangle$, дістанемо

$$\langle\langle x, y\rangle x - \langle x, x\rangle y, \langle x, y\rangle x - \langle x, x\rangle y\rangle = \langle x, x\rangle(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle). \quad (51)$$

Назвемо 2-форму $\psi$ на векторному просторі $X$ *діагонально дійсною*, якщо $\psi(x, x) \in \mathbb{R}$ при всіх $x \in X$; *невиродженою*, якщо $\psi(x, x) \neq 0$ при $x \neq 0$; *додатною*, якщо $\psi(x, x) \geqslant 0$ при всіх $x \in X$; *додатно визначеною*, якщо вона додатна і невироджена, тобто $\psi(x, x) > 0$ при $x \neq 0$.

**Лема 3.31.** *Нехай $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ – діагонально дійсна півторалінійна форма на векторному просторі $X$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$*

$$\operatorname{Im}\langle y \,|\, x\rangle = -\operatorname{Im}\langle x \,|\, y\rangle, \quad (52)$$

$$\operatorname{Re}\langle y \,|\, x\rangle = \operatorname{Re}\langle x \,|\, y\rangle, \quad (53)$$

$$\langle y \,|\, x\rangle = \overline{\langle x \,|\, y\rangle}. \quad (54)$$

◀ Поклавши в (49) $\alpha = 1,\ \beta = 1$, виводимо з припущень леми співвідношення $\langle x \,|\, y\rangle + \langle y \,|\, x\rangle \in \mathbb{R}$, рівносильне, очевидно, (52). Аналогічно, замінивши $y$ на $iy$, виводимо співвідношення $\langle x \,|\, iy\rangle + \langle iy \,|\, x\rangle \in \mathbb{R}$, яке з огляду на (46) і (48) можна записати ще так: $i(\langle y \,|\, x\rangle - \langle x \,|\, y\rangle) \in \mathbb{R}$. Отже $\operatorname{Re}(\langle y \,|\, x\rangle - \langle x \,|\, y\rangle) = 0$, що доводить (53). Рівність (54) рівносильна, очевидно, парі (52) & (53). ▶

**Наслідок 3.18.** *Для того щоб функція $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ на декартовому квадраті комплексного векторного простору $X$ була діагонально дійсною півторалінійною формою на $X$, необхідно і достатньо, щоб вона мала властивості* (45), (46) *і* (54).

Рівність (49) і наслідок 3.18 разом приводять до такого висновку.

**Наслідок 3.19.** *Нехай $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ – діагонально дійсна півторалінійна форма на векторному просторі $X$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$*

$$\langle\, \langle y\,|\,x\rangle x - \langle x\,|\,x\rangle y, \langle y\,|\,x\rangle x - \langle x\,|\,x\rangle y\,\rangle = \langle x\,|\,x\rangle \left(\, \langle x\,|\,x\rangle\langle y\,|\,y\rangle - |\langle x\,|\,y\rangle|^2\,\right).$$

**Лема 3.32.** *Нехай $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ – додатна півторалінійна форма на векторному просторі $X$, а $x$ – вектор в $X$ такий, що $\langle x\,|\,x\rangle = 0$. Тоді для будь-якого $y \in X \quad \langle x\,|\,y\rangle = 0$.*

◄ Зафіксуємо $y \in X$. З умови $\langle x\,|\,x\rangle = 0$ маємо за формулами (49) і (54) $\langle ax + y\,|\,ax + y\rangle = 2a\,\mathrm{Re}\langle x\,|\,y\rangle + \langle y\,|\,y\rangle$ при всіх $a \in \mathbb{R}$. Замінивши в цій рівності $y$ на $iy$, одержимо з урахуванням (46) $\langle ax + iy\,|\,ax + iy\rangle = 2a\,\mathrm{Im}\langle x\,|\,y\rangle + \langle y\,|\,y\rangle$. Ліві частини обох рівностей за припущенням невід'ємні. Отже для будь-якого $a \in \mathbb{R}$

$$\langle y\,|\,y\rangle + 2a\,\mathrm{Re}\langle x\,|\,y\rangle \geqslant 0, \quad \langle y\,|\,y\rangle + 2a\,\mathrm{Im}\langle x\,|\,y\rangle \geqslant 0,$$

що можливо лише за умов $\mathrm{Re}\langle x\,|\,y\rangle = 0, \;\; \mathrm{Im}\langle x\,|\,y\rangle = 0$. ►

**Наслідок 3.20** (із наслідку 3.19 і леми 3.32)**.** *Нехай $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ – додатна півторалінійна форма на векторному просторі $X$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$*

$$|\langle x\,|\,y\rangle|^2 \leqslant \langle x\,|\,x\rangle\ \langle y\,|\,y\rangle, \tag{55}$$

*причому рівність*

$$|\langle x\,|\,y\rangle|^2 = \langle x\,|\,x\rangle\ \langle y\,|\,y\rangle, \tag{56}$$

*досягається в точності тоді, коли*

$$\langle\, \langle y\,|\,x\rangle x - \langle x\,|\,x\rangle y, \langle y\,|\,x\rangle x - \langle x\,|\,x\rangle y\,\rangle = 0.$$

**Наслідок 3.21.** *Нехай $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ – додатно визначена півторалінійна форма на векторному просторі $X$. Тоді для довільних $x, y \in X$ рівність* (56) *рівносильна лінійній залежності цих векторів.*

У наступних шістьох твердженнях білінійність розуміється в слабшому з двох варіантів – над полем $\mathbb{R}$.

**Лема 3.33.** *Нехай $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ – діагонально дійсна білінійна форма на векторному просторі $X$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$*

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \in \mathbb{R}. \tag{57}$$

*Якщо до того ж ця форма невироджена, то й*

$$\langle x, y\rangle\ \langle y, x\rangle \in \mathbb{R}. \tag{58}$$

◀ Поклавши в (50) $\alpha = 1$, $\beta = 1$, виводимо (57) з діагональної дійсності форми.

Оскільки $\langle 0, y\rangle = 0$ внаслідок лінійності форми по першому аргументові, то достатньо довести друге твердження для $x \neq 0$. У цьому випадку за припущенням невиродженості форми $\langle x, x\rangle \neq 0$, відтак (58) випливає з (50) і діагональної дійсності форми. ▶

**Лема 3.34.** *Нехай $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ – додатно визначена білінійна форма на векторному просторі $X$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$*

$$\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leqslant \langle x, x\rangle\ \langle y, y\rangle, \tag{59}$$

*причому рівність*

$$\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle = \langle x, x\rangle\ \langle y, y\rangle \tag{60}$$

*досягається в точності тоді, коли вектори $x$ і $y$ лінійно залежні.*

◀ Міркуємо для $x \neq 0$ (інакше твердження тривіальне). У цьому випадку за припущенням додатної визначеності $\langle x, x\rangle > 0$, що разом із (50) дає

$$\operatorname{sgn}(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - \langle x, y\rangle\langle y, x\rangle) = \operatorname{sgn}(\langle\langle x, y\rangle x - \langle x, x\rangle y\,,\ \langle x\,y\rangle x - \langle x\,x\rangle y\rangle).$$

За тим же припущенням права частина рівності додатна при всіх $x, y$ таких, що $\langle x\,y\rangle x \neq \langle x, x\rangle y$. ▶

Білінійна форма з властивістю $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$ називається *симетричною*. Перше твердження леми 3.33 показує, що всяка діагонально дійсна (зокрема додатна) симетрична білінійна форма набуває тільки дійсних значень. У комплексному векторному просторі цю вимогу задовольняє тільки тотожно нульова форма.

Замінивши в доведенні леми 3.32 посилання на формули (49) і (54) посиланням на (50) і зазначену властивість, доходимо такого висновку.

**Лема 3.35.** *Нехай $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ – симетрична додатна білінійна форма на дійсному векторному просторі $X$, а $x$ – вектор в $X$ такий, що $\langle x, x\rangle = 0$. Тоді для будь-якого $y \in X$ $\quad\langle x, y\rangle = 0$.*

Із цієї леми і формули (51) виводимо для білінійних форм аналог наслідку 3.19:

**Наслідок 3.22.** *Нехай $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ – симетрична додатна білінійна форма на дійсному векторному просторі $X$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$*

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \ \langle y, y\rangle, \tag{61}$$

*причому рівність*

$$\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle \ \langle y, y\rangle \tag{62}$$

*досягається в точності тоді, коли*

$$\langle \ \langle y, x\rangle x - \langle x, x\rangle y, \langle y, x\rangle x - \langle x, x\rangle y \ \rangle = 0.$$

**Наслідок 3.23.** *Нехай $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ – симетрична додатно визначена білінійна форма на дійсному векторному просторі $X$. Тоді для довільних $x, y \in X$ рівність* (62) *рівносильна лінійній залежності цих векторів.*

Кожну з нерівностей (55), (59) і (61) називають *нерівністю Шварца* або *нерівністю Коші – Буняковського*[4]. Наступна лема дає ще один варіант цієї нерівності – на випадок, коли від білінійної форми не вимагається ні невиродженість (що є умовою леми 3.34), ні симетричність (умова наслідку 3.22).

**Лема 3.36.** *Нехай $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ – додатна білінійна форма на дійсному або комплексному векторному просторі $X$. Тоді для будь-яких $x, y \in X$*

$$\left(\frac{\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle}{2}\right)^2 \leqslant \langle x, x\rangle \ \langle y, y\rangle. \tag{63}$$

◀ Зафіксуємо $x, y \in X$ і позначимо $a = \langle x, x\rangle,\ b = \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle,$ $c = \langle y, y\rangle$. За припущенням додатності форми і за лемою 3.33 всі три числа дійсні. За тим же припущенням ліва частина рівності (51) невід'ємна при всіх $\alpha$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тому дискримінант квадратного тричлена $a\lambda^2 + b\lambda + c$ змінної $\lambda$ недодатний, що й виражається нерівністю (63). ▶

Комплексний векторний простір, наділений додатною півтораліній-ною формою, і так само дійсний векторний простір, наділений дійсною симетричною додатною білінійною формою, називається *евклідовим*[5], значення такої форми на парі векторів називається *скалярним добутком* останніх, а сама форма – *скалярним множенням*. Евклідів простір із невиродженим скалярним множенням називатимемо *строго евклідовим*[6].

[4] Друга назва вживається переважно в російськомовній літературі.

[5] У лінійній алгебрі комплексні евклідові простори називають унітарними.

[6] У лінійній алгебрі вироджене скалярне множення як правило не розглядають, так що в цьому терміні немає потреби

# Глава 2. Метричні і топологічні простори

## § 4. Псевдометричні простори

4.1. Базові означення і приклади. Нехай $X$ – деяка непорожня множина. Довільна функція $\rho : X^2 \to \mathbb{R}_+$ така, що для всіх $x, y, z \in X$

$$\rho(x, x) = 0, \tag{1}$$

$$\rho(y, x) = \rho(x, y), \tag{2}$$

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z), \tag{3}$$

називається *псевдометрикою* в $X$. Число $\rho(x, y)$ називається *відстанню* між точками $x$ і $y$. Псевдометрика $\rho$ така, що рівність $\rho(x, y) = 0$ має місце тільки при $x = y$, називається *метрикою*. Зверніть увагу на таке: (псевдо)метрика в $X$ це функція на $X^2$; вона невід'ємна (бо в означенні сказано, що областю прибуття є $\mathbb{R}_+$).

Нерівність (3) називається *нерівністю трикутника*. Вона очевидним чином узагальнюється за індукцією так:

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n).$$

Рівність (2) дозволяє переписати нерівність трикутника у вигляді

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(z, y). \tag{4}$$

Цікаво, що за умови (1) ця властивість функції $\rho$ сильніша за (3) – вона рівносильна парі (3) & (2), тоді як вивести (2) з (3) неможливо. Справді, поклавши в (5) $y = x$, дістанемо з урахуванням (1) $\rho(x, z) \leqslant \rho(z, x)$, що з огляду на взаємозамінність $x$ і $z$ означає рівність $\rho(x, z) = \rho(z, x)$. Таким чином, властивості (1) і (5) функції $\rho$ зумовлюють (2), а значить і (3). З іншого боку, задана рівністю $\rho(x, y) = (x - y)_+$ функція $\rho$ на $\mathbb{R}^2$ має властивості (1) і (3) (остання випливає з очевидної нерівності $(a + b)_+ \leqslant a_+ + b_+$), але $\rho(x, y) \neq \rho(y, x)$ при $x \neq y$.

Очевидним наслідком властивостей (3) і (2) псевдометрики є нерівність

$$|\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leqslant \rho(x, y). \tag{5}$$

Написавши

$$|\rho(x', x'') - \rho(y', y'')| \leqslant |\rho(x', x'') - \rho(y', x'')| + |\rho(y', x'') - \rho(y'', x'')|,$$

узагальнимо її так:

$$|\rho(x', x'') - \rho(y', y'')| \leqslant \rho(x', y') + \rho(x'', y''). \tag{6}$$

Наділена (псевдо)метрикою множина називається *(псевдо)метричним простором*. Розгорнутим позначенням цього об'єкта є $(X, \rho)$, але якщо (псевдо)метрика $\rho$ визначається контекстом або конкретизувати її немає потреби, то пишуть просто $X$.

Для довільних точки $x$ і множини $A$ в псевдометричному просторі $(X, \rho)$ позначимо

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y). \tag{7}$$

Обидва порядки запису аргументів $x, A$ рівноправні: $\rho(A, x)$ означає те саме, що $\rho(x, A)$. Пропоную читачеві довести таке узагальнення нерівності (5):

$$|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leqslant \rho(x, y).$$

Нехай $(X, \rho)$ – псевдометричниий простір. Задамо відношення $\sim$ на $X$ так:

$$x \sim y \;\Leftrightarrow\; \rho(x, y) = 0. \tag{8}$$

Воно рефлексивне за властивістю (1), симетричне за властивістю (2) і транзитивне за властивістю (3) псевдометрики, а значить є еквівалентністю. Цю еквівалентність називають *нерозрізненністю*, а нерозрізненні точки називають ще *злиплими*. Задамо на декартовому квадраті множини $X/\sim$ функцію $\widetilde{\rho}$ рівністю

$$\widetilde{\rho}([x], [y]) = \rho(x, y). \tag{9}$$

Це задання не залежить від вибору представників у класах еквівалентності. Справді, якщо $[x_1] = [x_2],\ [y_1] = [y_2]$, то $\rho(x_1, x_2) = 0 = \rho(y_1, y_2)$. Тоді з (6) маємо $\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_2) = 0$.

Очевидно, задана рівністю (9) функція $\widetilde{\rho}$ успадковує від $\rho$ властивості (1) – (3). Отже це псевдометрика. Далі, рівність $\widetilde{\rho}([x],\ [y]) = 0$ означає згідно з (9) і (8), що $x \sim y$, тобто $[x] = [y]$. Отже $\widetilde{\rho}$ навіть метрика. Таким чином, *усякий псевдометричний простір стає метричним після ототожнення злиплих точок*. Цей метричний простір, $(X/\sim,\ \widetilde{\rho})$, назвемо *метричним зліпком*[7] псевдометричного простору $(X, \rho)$.

[7]Новий термін.

**Лема 4.1.** *Нехай $X_0$ – підпростір псевдометричного простору $X$. Тоді метричний зліпок простору $X_0$ ізометричний підпросторові $\Xi \equiv \{[x],\, x \in X_0\}$ метричного зліпка простору $X$.*

◀ Псевдометрику простору $X$ (а значить і $X_0$) позначаємо $\rho$. Позначимо також

$$[x]_0 = \{x' \in X_0 : x \sim x'\}, \quad \widetilde{X_0} = \{[x]_0, x \in X_0\},$$

де відношення нерозрізненності $\sim$ задається рівністю (8). Для $[x]_0,\ [y]_0 \in \widetilde{X_0}$ покладаємо за аналогією з (9)

$$\widetilde{\rho}_0\left([x]_0, [y]_0\right) = \rho(x, y). \tag{10}$$

Міркуючи так само, як вище для $\widetilde{\rho}$, переконуємося, що це задання не залежить від вибору представників у класах еквівалентності і що $\widetilde{\rho}_0$ метрика. Таким чином, $\left(\widetilde{X_0}, \widetilde{\rho}_0\right)$ – метричний зліпок псевдометричного простору $(X_0, \rho)$. Очевидно, відповідність $[x]_0 \leftrightarrow [x]$ між $\widetilde{X_0}$ і $\Xi$ бієктивна. Порівнявши (10) із (9), бачимо, що метричні простори $\left(\widetilde{X_0}, \widetilde{\rho}_0\right)$ і $(\Xi, \widetilde{\rho})$ ізометричні. ▶

Наведемо приклади метричних просторів.

**Приклад 4.1.** Числова пряма з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$.

**Приклад 4.2.** Покажемо, що задана рівністю

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

функція $\rho$ – також метрика в $\mathbb{R}$. Перевірки потребує тільки нерівність трикутника.

Очевидно, для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leqslant \frac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \leqslant \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}.$$

Поклавши в цих нерівностях $a = x - z,\ b = z - y$, дістанемо (3).

**Приклад 4.3.** Нехай $X$ – довільна непорожня множина. Задамо функцію $\rho$ на $X^2$ рівністю

$$\rho(x,y) = \left[\begin{array}{ll} 0 & \text{при } x = y, \\ 1 & \text{при } x \neq y. \end{array}\right.$$

Очевидно, це метрика. Наділену цією метрикою множину називають *дискретним простором* або *простором ізольованих точок.*

Нехай $(X,\rho)$ – псевдометричний простір. Для довільних $x \in X$ і $r \in \mathbb{R}_+$ позначимо $B_X(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$ $(= \varnothing$ при $r = 0)$, $\overline{B}_X(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) \leqslant r\}$, $S_X(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) = r\}$ і назвемо ці множини відповідно *відкритою кулею, замкнутою кулею* і *сферою* – радіуса $r$, із центром у точці $x$. Також позначимо

$$D_X(r) = \{(x_1,x_2) \in X^2 : \rho(x_1,x_2) < r\}. \tag{11}$$

Якщо простір визначається контекстом або конкретизувати його немає потреби, то індекс $X$ у всіх цих позначеннях не пишемо.

Скрізь нижче словосполука "зрештою всі члени послідовності" означає "всі члени послідовності починаючи з деякого", або, що те саме, "всі, за винятком скінченного числа, члени послідовності".

Говорять, що послідовність $(x_n)$ точок псевдометричного простору $X$ *збігається* до точки $x \in X$, яку називають *границею* послідовності, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ зрештою всі $x_n$ містяться в $B(x,\varepsilon)$ . Це записують так: $x_n \to x$.

Зауважимо, що для метричного простору з прикладу 4.1 дане означення перетворюється на класичне означення збіжної ч и с л о в о ї послідовності та її границі. Відштовхуючись від останнього, ми могли би означити збіжність у загальному псевдометричному просторі ще так:

$$x_n \to x \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(x_n,x) \to 0.$$

Поклавши в (6) $y' = x'_n, y'' = x''_n$, виводимо з означення збіжності таке.

**Лема 4.2.** *Нехай послідовності $(x'_n)$ і $(x''_n)$ у псевдометричному просторі $(X,\rho)$ збігаються до $x'$ і $x''$ відповідно. Тоді $\rho(x',x'') = \lim \rho(x'_n,x''_n)$.*

Узявши в лемі 4.2 $x'_n = x''_n$, одержимо

**Наслідок 4.1.** *Відстань між будь-якими двома границями збіжної послідовності в псевдометричному просторі дорівнює нулю. Зокрема, у метричному просторі границя збіжної послідовності єдина.*

У разі єдиності границі співвідношення $x_n \to x$ записують ще так: $x = \lim x_n$ (тоді як у загальному випадку треба писати $x \in \lim x_n$).

У прикладі 4.1

$$B(x,r) = ]x-r,\, x+r[, \quad \overline{B}(x,r) = [x-r,\, x+r], \quad S(x,r) = \{x-r,\, x+r\};$$

у прикладі 4.2 при $r < 1$ буде

$$B(x,r) = \left]x - \frac{r}{1-r},\, x + \frac{r}{1-r}\right[, \quad \overline{B}(x,r) = \left[x - \frac{r}{1-r},\, x + \frac{r}{1-r}\right],$$

а при $r \geqslant 1 \quad B(x,r) = \overline{B}(x,r) = \mathbb{R}$. Оскільки співвідношення $r \searrow 0$ і $r(1-r)^{-1} \searrow 0$ рівносильні, то співвідношення $x_n \to x$ в обох прикладах має однаковий смисл.

У прикладі 4.3 $B(x,r) = \{x\}$ при $r < 1$, тому збігаються тільки ті послідовності, в яких зрештою всі члени співпадають.

Нехай $(X, \rho_X)$ і $(Y, \rho_Y)$ – псевдометричні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається: *локально обмеженим*, якщо воно переводить усяку обмежену підмножину простору $X$ в обмежену підмножину простору $Y$ (рівносильно: для будь-яких $x \in X$ і $r > 0$ існує $R > 0$ таке, що $f\left(B_X(x,r)\right) \subset B_Y(f(x), R)$ ); *обмеженим*, якщо множина $\operatorname{im} f$ обмежена; *неперервним у точці* $x \in X$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $f(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(f(x),\varepsilon)$; *неперервним на* $X$, якщо воно неперервне в кожній точці $x \in X$; *рівномірно неперервним*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для будь-якої пари $(x', x'') \in D_X(\delta)$ пара $(f(x'), f(x''))$ належить $D_Y(\varepsilon)$; *зберігаючим відстані*, якщо для будь-яких $x', x'' \in X \quad \rho_Y(f(x'), f(x'')) = \rho_X(x', x'')$. Очевидно, зберігаюче відстані відображення рівномірно неперервне.

У наступному очевидному твердженні йдеться про композицію $g \circ f$ відображень $f : X \to Y$ і $g : Y \to Z$ , де $X, Y, Z$ – псевдометричні простори.

*Композиція неперервних (рівномірно неперервних, зберігаючих відстані) відображень – неперервне (рівномірно неперервне, зберігаюче відстані) відображення.*

Очевидно, зберігаюче відстані відображення метричного простору в псевдометричний ін'єктивне. Сюр'єктивне зберігаюче відстані відображення одного метричного простору на інший називається *ізометрією*. З огляду на вищесказане всяка ізометрія є ін'єкція, а значить і бієкція.

Метричні простори, між якими існує ізометрія, називаються *ізометричними* один одному. Очевидно, відношення ізометричності на довільній множині метричних просторів (а множини в с і х метричних просторів немає!) рефлексивне, симетричне і транзитивне, тобто є еквівалентністю. Псевдометричні простори, метричні зліпки яких ізометричні між собою, назвемо *псевдоізометричними*. Псевдоізометричність це також еквівалентність (доведіть).

*Підпростором* псевдометричного простору $(X, \rho)$ називається довільний псевдометричний простір $(X_0, \rho_0)$ такий, що $X_0 \subset X$ і $\rho_0 = \rho|_{X^2}$ (тож замість $\rho_0$ можна писати й $\rho$ ). Інакше кажучи, підпростір псевдометричного простору $X$ це підмножина в ньому, наділена тією ж псевдометрикою, що й $X$.

`4.2. Відкриті і замкнуті множини в метричних просторах.` Множина в псевдометричному просторі називається: *відкритою*, якщо для будь-якого $x \in A$ існує $r > 0$ таке, що $B(x, r) \subset A$; *замкнутою*, якщо вона містить усі границі всякої збіжної послідовності своїх елементів.[8] Згідно з першим із цих означень *усяка відкрита куля є відкритою множиною*. Нерівність трикутника $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y)$ показує, що співвідношення $x_n \in \overline{B}(y, r)$ і $x_n \to x$ зумовлюють $x \in \overline{B}(y, r)$. Таким чином, *усяка замкнута куля є замкнутою множиною*. Одночасно відкритими і замкнутими є порожня множина і множина всіх точок псевдометричного простору. У "звичних" просторах (таких, як у прикладах 4.1 і 4.2) інших відкрито-замкнутих множин немає, тоді як у прикладі 4.3 всі множини такі.

*Замкнутим підпростором* повного псевдометричного простору називається підпростір, множина точок якого замкнута.

**Теорема 4.1.** *Доповнення відкритої (замкнутої) множини в псевдометричному просторі – замкнута (відкрита) множина.*

◀ Нехай $G$ – відкрита множина, $(x_n)$ – послідовність у $G^c$ і $x$ – якась із її границь. Якби $x$ не належала $G^c$, то внаслідок відкритості $G$ існувало б додатне число $r$ таке, що $B(x, r) \subset G$. Але куля $B(x, r)$ повинна містити зрештою всі $x_n$, раз $x_n \to x$. А це суперечить тому, що всі $x_n$ належать $G^c$. Отже $x \in G^c$, що доводить замкнутість $G^c$.

[8] Іноді замкнуті множини неправильно називають замкненими. Слово *замкнений* є відповідником російського *запертый* і англійського *locked*.

Нехай доповнення деякої множини $F$ не відкрите, тобто існує точка $x \in F^c$ така, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина $B(x, 1/n) \cap F$ непорожня. Вибравши, спираючись на аксіому вибору, з кожної такої множини по одній точці, одержимо послідовність $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$, збіжну до точки $x \notin F$. Отже $F$ не замкнута. ►

Пригадавши, що кожна множина є доповненням свого доповнення, виводимо з теореми 4.1

**Наслідок 4.2.** *Множина в псевдометричному просторі відкрита (замкнута) в точності тоді, коли її доповнення замкнуте (відкрите).*

**Теорема 4.2.** *Об'єднання довільної сукупності відкритих множин і перетин скінченного числа відкритих множин – відкрита множина.*

◄ Якщо куля $B(x, r)$ міститься в одній з множин $G_i,\ i \in I$, то вона міститься і в $\bigcup\limits_{i\in I} G_i$.

Якщо $B(x, r_1) \subset G_1, \ldots, B(x, r_n) \subset G_n$, то $B(x, r_1 \wedge \ldots \wedge r_n) \subset G_1 \cap \ldots \cap G_n$. ►

**Теорема 4.3.** *Перетин довільної сукупності замкнутих множин і об'єднання скінченного числа замкнутих множин – замкнута множина.*

◄ Нехай $F = \bigcap\limits_{i\in I} F_i$, де всі $F_i$ – замкнуті множини. Тоді $F^c = \bigcup\limits_{i\in I} F_i^c$ і за теоремою 4.1 множини $F_i^c$ відкриті, так що за теоремою 4.2 $F^c$ також відкрита. Тепер замкнутість $F$ випливає з наслідку 4.2.

Аналогічно з тих же тверджень виводиться замкнутість $F_1 \cup \ldots \cup F_n$, якщо $F_1, \ldots, F_n$ замкнуті. ►

**Лема 4.3.** *Нехай $F$ – замкнута множина в псевдометричному просторі, а $x$ – не приналежна їй точка цього простору. Тоді: 1) існує $r > 0$ таке, що $B(x, r) \cap F = \emptyset$; 2) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $x \notin \bigcup\limits_{y\in F} B(y, \varepsilon)$; 3) $\rho(x, F) > 0$.*

◄ 1) Якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $x_n \in B(x, 1/n) \cap F$, то $(x_n)$ буде збіжною до $x$ послідовністю в $F$. Тоді із замкнутості $F$ матимемо $x \in F$, що суперечить припущенню про $x$.

2) Якщо

$$x \in \bigcup_{y\in F} B(y, \varepsilon), \tag{12}$$

то для деякого $y \in F$ буде $x \in B(y, \varepsilon)$, або, що те саме, $y \in B(x, \varepsilon)$. Отже (12) зумовлює $B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. А це згідно з першим твердженням має місце не при всіх $\varepsilon$.

3) Якби $\rho(x, F) = 0$, то, зважаючи на (7), для будь-якого $r > 0$ куля $B(x, r)$ містила би точки з $F$, що суперечить першому твердженню. ►

**Наслідок 4.3.** *Нехай $F$ – замкнута множина в псевдометричному просторі $(X, \rho)$. Тоді для довільної точки $x \in X$ співвідношення $\rho(x, F) = 0$ і $x \in F$ рівносильні.*

*Околом* точки псевдометричного простору називається довільна відкрита множина, яка цю точку містить.

Безпосередньо з означень околу і відкритої множини виводимо такі два твердження.

**Лема 4.4.** *Множина відкрита тоді і тільки тоді, коли разом із кожною своєю точкою вона містить і деякий її окіл.*

**Лема 4.5.** *Усякий окіл точки $x$ міститься в деякій кулі $B(x, r)$, і кожна така куля є околом точки $x$.*

Із леми 4.5 і означення збіжності випливає

**Наслідок 4.4.** *Для того щоб послідовність у псевдометричному просторі збігалась до деякої точки цього простору, необхідно і достатньо, щоб кожний окіл цієї точки містив зрештою всі члени послідовності.*

**Лема 4.6.** *Для того щоб відображення $f : X \to Y$, де $X$ і $Y$ – псевдометричні простори, було неперервним у точці $x$, необхідно і достатньо, щоб для будь-якого околу $V$ точки $f(x)$ існував окіл $U$ точки $x$ такий, що $f(U) \subset V$.*

◄ Необхідність. Оскільки всякий окіл $V$ точки $f(x)$ містить деяку кулю $B_Y(f(x), \varepsilon)$, то за $U$ можна взяти існуючу внаслідок неперервності $f$ у точці $x$ кулю $B_X(x, \delta)$ таку, що $f\left(B_X(x, \delta)\right) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$.

Достатність. Оскільки для будь-якого $\varepsilon > 0$ $B_Y(f(x), \varepsilon)$ – окіл точки $f(x)$, то за припущенням про $f$ існує окіл $U$ точки $x$ такий, що $f(U) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$. При цьому за означеннями околу і відкритої множини існує $\delta > 0$ таке, що $B_X(x, \delta) \subset U$. ►

## § 5. Топологічні простори

5.1. Початкові поняття. Іноді доводиться вивчати збіжність, не породжувану ніякою псевдометрикою (такою є, наприклад, поточкова збіжність функцій на відрізку). У п. 2.1 ми означили, не використовуючи псевдометрику, збіжність у впорядкованій множині. Але що робити, коли немає ні відношення порядку, ні псевдометрики? Наслідок 4.4, у якому йдеться про псевдометричні простори, але сама псевдометрика залишається за кадром, показує, що для цього достатньо ввести поняття відкритої множини. Мінімальний математичний досвід підказує, що природніше означувати відкриту множину не саму по собі, а як представника деякої сукупності множин, постулюючи ряд властивостей останньої – подібно до того, як означується не окремо взяте комплексне число, а поле $\mathbb{C}$, не вектор, а векторний простір. Ці міркування разом із теоремами 4.2, 4.1 і наведеними перед ними тривіальними прикладами відкрито-замкнутих множин служать мотивацією наступних основних означень.

*Топологією* на множині $X$ називається сукупність $\tau \subset 2^X$ така, що:

1. $\emptyset \in \tau, \quad X \in \tau$.

2. Об'єднання довільної сукупності множин із $\tau$ само належить $\tau$.

3. Перетин усяких двох множин із $\tau$ сам належить $\tau$.

Пара $(X, \tau)$, де $X$ – непорожня множина, а $\tau$ – топологія на $X$, називається *топологічним простором* (позначення $(X, \tau)$ скорочують до $X$, якщо топологія визначається контекстом або конкретизувати її немає потреби). Множини $G \in \tau$ називають *відкритими*, а їхні доповнення – *замкнутими*. Із третьої властивості топології виводимо за індукцією, що *перетин скінченного числа відкритих множин – відкрита множина*, звідки очевидним чином випливає, що *об'єднання скінченного числа замкнутих множин – замкнута множина*.

Із даних вище означень випливають такі властивості сукупності $\tau'$ замкнутих множин у топологічному просторі $X$ :

$1'$. $\emptyset' \in \tau', \quad X \in \tau'$.

$2'$. Перетин довільної сукупності множин із $\tau'$ сам належить $\tau'$.

$3'$. Об'єднання всяких двох множин із$\tau'$ само належить $\tau'$.

Можна дати рівносильне означення топологічного простору, постулювавши властивості $1'$ – $3'$ сукупності $\tau' \subset 2^X$ і назвавши множини

$F \in \tau'$ замкнутими, а їхні доповнення відкритими.

Для довільної множини $A$ в топологічному просторі $(X, \tau)$ позначимо $\tau|_A = \{G \cap A,\ G \in \tau\}$. Очевидно, $\tau|_A$ – топологія на $A$. Вона називається *слідом* в $A$ топології $\tau$, а топологічний простір $(A, \tau|_A)$ називається *підпростором* простору $(X, \tau)$.

Дане в п. 4.2 означення околу точки як відкритої множини, що містить її, залишається в силі і для топологічних просторів. Сукупність усіх околів точки $x$ позначатимемо $\tau(x)$. Стверджувані наслідками 4.2 і 4.4 характеристичні властивості внутрішньої та пристайної точок стають означеннями. Інакше кажучи, точка топологічного простору $X$ називається *внутрішньою точкою* множини $A \subset X$, якщо $A$ містить деякий окіл цієї точки; *пристайною точкою* множини $A \subset X$, якщо всякий її окіл має непорожній перетин з $A$.

Об'єднання всіх відкритих підмножин множини $A$ (такі існують, хоча би $\emptyset$) називається *внутрішністю* $A$ і позначається $A^\circ$. Перетин усіх замкнутих надмножин множини $A$ (такі існують, хоча би множина всіх точок простору) називається *замиканням* $A$ і позначається $\overline{A}$. Із цих означень і означення замкнутої множини виводимо, спираючись на закони де Моргана, рівності

$$\overline{A}^c = A^{c\circ}, \quad A^{\circ c} = \overline{A^c}, \tag{1}$$

які, у свою чергу, спільно з наслідком 1.1 приводять до такого висновку

**Наслідок 5.1.** *Нехай $f$ – бієкція топологічного простору $X$ на топологічний простір $Y$. Тоді для всякої $A \subset X$*

$$f(A^{c\circ}) = f\left(\overline{A}\right)^c, \quad f(A^c)^\circ = \overline{f(A)}^c.$$

Із властивості 2 сукупності відкритих множин (топології) випливає відкритість $A^\circ$, а з властивості $2'$ сукупності замкнутих множин – замкнутість $\overline{A}$. Таким чином, внутрішність множини можна ще означити як найбільшу відкриту підмножину її, а замикання – як найменшу замкнуту надмножину. Це приводить до такого висновку:

*Множина $A$ в топологічному просторі відкрита (замкнута) в точності тоді, коли $A^\circ = A$ (відповідно $\overline{A} = A$).*

**Лема 5.1.** *Нехай $A$ і $G$ – неперетинні множини в топологічному просторі, $G$ відкрита. Тоді $\overline{A} \cap G = \emptyset$.*

◄ За умовою $A \subset G^c$ і множина $G^c$ замкнута. Тому $\overline{A} \subset G^c$. ►

**Лема 5.2.** *Внутрішність множини співпадає з множиною її внутрішніх точок.*

◄ Позначимо множину внутрішніх точок $A$ через $\langle A \rangle$. Якщо $x \in \langle A \rangle$, то існує окіл $U$ точки $x$ такий, що $U \subset A$. Із цього включення і відкритості $U$ маємо $U \subset A^\circ$ і тим більше $x \in A^\circ$. Цим показано, що $\langle A \rangle \subset A^\circ$.

Нехай $x \in A^\circ$. Тоді з огляду на відкритість $A^\circ$ існує $U \in \tau(x)$ такий, що $U \subset A^\circ$. Це разом із включенням $A^\circ \subset A$ показує, що $x$ внутрішня точка $A$. Отже $A^\circ \subset \langle A \rangle$. ►

**Лема 5.3.** *Замикання множини співпадає з множиною її пристайних точок.*

◄ Позначивши множину пристайних точок $A$ через $[A]$, запишемо двосторонні імплікації

$$x \notin \overline{A} \Longleftrightarrow x \in A^{c\circ} \Longleftrightarrow x \in \langle A^c \rangle \Longleftrightarrow$$

$$\exists\, U \in \tau(x) \;\; U \subset A^c \Longleftrightarrow \exists\, U \in \tau(x)\; U \cap A = \emptyset \Longleftrightarrow x \notin [A],$$

із яких четверта очевидна, перша випливає з першої рівності (1), друга – з леми 5.2, третя – з означення внутрішньої точки, а п'ята – з означення пристайної точки. ►

**Лема 5.4.** *Нехай $A$ – множина в топологічному просторі, а $G$ – відкрита множина в ньому ж така, що $A \cap G = \emptyset$. Тоді $\overline{A} \cap G = \emptyset$.*

◄ За умовою $A \subset G^c$ і множина $G^c$ замкнута. Тому $\overline{A} \subset G^c$. ►

**Лема 5.5.** *Рівність $\rho(x, A) = 0$ необхідна і достатня для того, щоб точка $x$ псевдометричного простору $(X, \rho)$ була пристайною до множини $A \subset X$.*

◄ Із (4.7) маємо

$$\rho(x, A) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad B_X(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset. \quad \blacktriangleright$$

Леми 5.5 і 5.3 разом дають ще одне доведення наслідку 4.3.

**Лема 5.6.** *Наступні властивості бієкції $f : X \to Y$, де $X$ і $Y$ – топологічні простори, рівносильні:*

$$\forall A \subset X \quad f(A^\circ) = f(A)^\circ. \tag{2}$$

$$\forall A \subset X \quad f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}, \tag{3}$$

◀ Достатньо написати

$$(2) \Leftrightarrow \forall A \subset X \quad f(A^{c\,\circ}) = f(A^c)^\circ \Leftrightarrow \forall A \subset X \quad f\left(\overline{A}\right)^c = \overline{f(A)}^c \Leftrightarrow (3)$$

(перша і третя імплікації очевидні, а друга спирається на наслідок 5.1). ▶

**Теорема 5.1 (**Александров**).** *Нехай $X$ – топологічний простір. Тоді операція $^\circ$ (взяття внутрішності) на $2^X$ має властивості: (i) $X^\circ = X$, (ii) $A^\circ \subset A$, (iii) $A^{\circ\circ} = A^\circ$, (iv) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.*

◀ Властивість (i) випливає з відкритості $X$ (за означенням топології), властивість (ii) – з означення $A^\circ$, властивість (iii) – з відкритості $A^\circ$.

Позначимо $C = A \cap B$. За побудовою $C \subset A$, так що всяка підмножина множини $C$ міститься і в $A$. Тому $C^\circ \subset A^\circ$ і так само $C^\circ \subset B^\circ$, що доводить включення $C^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. З іншого боку, за вже доведеною властивістю (ii) $A^\circ \cap B^\circ \subset C$. Оскільки множина $A^\circ \cap B^\circ$ відкрита, як перетин відкритих, а $C^\circ$ – найбільша з відкритих підмножин множини $C$, то останнє співвідношення означає, що $A^\circ \cap B^\circ \subset C^\circ$. ▶

**Теорема 5.2 (**Куратовський**).** *Нехай на $2^X$ задано одномісну операцію $^\circ$ з властивостями (i) – (iv). Тоді: 1) сукупність $\tau \equiv \{G : G^\circ = G\}$ – топологія на $X$; 2) $^\circ$ є операцією взяття внутрішності в топологічному просторі $(X, \tau)$.*

◀ Властивість (i) означає, що $X \in \tau$. За властивістю (ii) $\emptyset^\circ \subset \emptyset$, відтак $\emptyset \in \tau$.

Лема 2.6 стверджує ізотонність операції з властивістю (iv). Нехай $G = \cap_{i \in I} G_i$, $G_i^\circ = G_i$. Тоді $G_i^\circ \subset G$, звідки внаслідок ізотонності $^\circ$ $G^{\circ\circ} \subset G^\circ$. За властивістю (iii) і вибором $G_i$ $G_i^{\circ\circ} = G_i$. Отже $G \subset G^\circ$, що разом із (ii) дає $G = G^\circ$, тобто $G \in \tau$. Таким чином, об'єднання довільної сукупності множин із $\tau$ само належить $\tau$. Зважаючи на (iv), $\tau$ містить і перетин усяких двох своїх представників. Перше твердження доведено.

Нехай $A \subset X$. Тоді за плобудовою $\tau$ і властивістю (iii) операції $^\circ$ $A^\circ \in \tau$. Нехай $A^\circ \subset B \subset A$. Тоді з ізотонності $^\circ$ маємо $A^{\circ\circ} \subset B^\circ \subset A^\circ$, що разом із (iii) дає для $B \in \tau \quad A^\circ \subset B \subset A^\circ$. Таким чином, $A^\circ$ – найбільша з відкритих підмножин множини $A$. ►

Множина в топологічному просторі $X$ називається: *щільною* (в $X$), якщо її замикання співпадає з $X$; *ніде не щільною*, якщо доповнення до її замикання щільне. Простір, у якому існує зліченна щільна множина, називається *сепарабельним*. Тривіальними прикладами сепарабельних метричних просторів є $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$. Зліченою щільною множиною в першому є $\mathbb{Q}$, а в другому $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$.

**Лема 5.7.** *Для того щоб множина $A$ була щільною в топологічному просторі $X$, необхідно і достатньо, щоб усяка непорожня відкрита множина в $X$ містила точки з $A$.*

◄ Згідно з лемою 5.3 рівність $\overline{A} = X$ рівносильна тому, що кожна точка в $X$ пристайна для $A$, тобто для будь-яких $x \in X$ і $U \in \tau(x)$ $U \cap A \neq \emptyset$. Але $\{\tau(x), x \in X\}$ це не що інше, як сукупність усіх непорожніх відкритих множин. ►

Пригадавши означення відкритої множини в псевдометричному просторі, виводимо з леми 5.7

**Наслідок 5.2.** *Для того щоб множина в псевдометричному просторі була щільною, необхідно і достатньо, щоб вона мала непорожній перетин із кожною відкритою кулею.*

Написавши на підставі (1)

$$\overline{\overline{A}^c} = X \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A}^{\circ c} = X,$$

доходимо такого висновку.

**Лема 5.8.** *Множина $A$ в топологічному просторі ніде не щільна в точності тоді, коли $\overline{A}^\circ = \emptyset$.*

**Лема 5.9.** *Перетин скінченного числа відкритих щільних множин – щільна множина.*

◄ Нехай $A_1$ і $A_2$ – відкриті щільні множини в деякому топологічному просторі. Тоді за лемою 5.7 всяка відкрита множина в цьому просторі

має непорожній перетин з $A_1$, а той, будучи також відкритою множиною, має непорожній перетин з $A_2$. Цим твердження доведено для двох множин. Далі за індукцією, крок якої очевидний, виводимо його в повній загальності. ►

**Лема 5.10.** *Нехай $A_1, \ldots, A_n$ – відкриті щільні множини в псевдометричному просторі $X$. Тоді для будь-яких відкритої множини $G \subset X$ і додатних чисел $a_1, \ldots, a_n$ існують точки $x_1, \ldots, x_n \in X$ і додатні числа $r_1 < a_1, \ldots, r_n < a_n$ такі, що*

$$B(x, 2r_k) \subset G \cap A_1 \cap \ldots \cap A_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\overline{B}(x_k, r_k) \subset \overline{B}(x_{k-1}, r_{k-1}), \quad k = 2, \ldots, n.$$

◄ Якщо $A$ – відкрита щільна множина в $X$, то за лемою 5.7 для будь-якої відкритої множини $G \subset X$ множина $G \cap A$ непорожня. Будучи за третьою властивістю топології ще й відкритою, вона містить деяку відкриту кулю, а з нею й усі кулі меншого радіуса з тим же центром. Цим лему доведено для $n = 1$. Далі міркуємо за індукцією.

Крок індукції (перехід від $n$ до $n + 1$). Нехай $B(x, 2r_n) \subset G \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Множина $A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}$ за третьою властивістю топології відкрита і за лемою 5.9 щільна. Тому за лемою 5.7 множина $B(x_n, r_n) \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}$ непорожня. Будучи до того ж відкритою, вона містить деяку кулю $B(x_{n+1}, 2r_{n+1})$, радіус якої, очевидно, можна вибрати меншим за $2a_{n+1}$. Тоді з очевидного включення $\overline{B}(x, r) \subset B(x, 2r)$ матимемо $\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n)$ $\left(\subset \overline{B}(x_n, r_n)\right)$. ►

Пригадаємо позначення п. 4.1: $\sim$ – відношення нерозрізненності на псевдометричному просторі $X$ (задається рівністю (4.8), де $\rho$ – псевдометрика в $X$), $[x] = \{x' \in X : x \sim x'\}$. Замість $X/\sim$ пишемо $\widetilde{X}$. Як показано в п. 4.1, задана рівністю (4.9) функція $\widetilde{\rho}$ – метрика в $\widetilde{X}$.

**Лема 5.11.** *Нехай $X_0$ – щільний підпростір псевдометричного простору $X$. Тоді множина $\Xi \equiv \{[x], x \in X_0\}$ щільна в $\widetilde{X}$.*

◄ Для довільних $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ беремо існуючу за умовою щільності $X_0$ і наслідком 5.2 у частині необхідності точку $x_0 \in X_0$ таку, що $\rho(x_0, x) < \varepsilon$. Тоді зважаючи на (9) $\widetilde{\rho}([x_0], [x]) < \varepsilon$ і, таким чином, $B_{\widetilde{X}}([x], \varepsilon) \cap \Xi \neq \emptyset$. Залишається послатись на наслідок 5.2 у частині достатності. ►

**Наслідок 5.3** (з лем 5.11 і 4.1)**.** *Нехай $X_0$ – щільний підпростір псевдометричного простору $X$. Тоді метричний зліпок простору $X_0$ ізометричний щільному підпросторові метричного зліпка $X$.*

Стверджувана наслідком 4.4 необхідна і достатня умова збіжності в псевдометричному просторі стає в топологічному просторі означенням. Інакше кажучи, послідовність $(x_n)$ у топологічному просторі $X$ називається *збіжною* до точки $x \in X$, званої *границею* (точніше однією з границь) послідовності, якщо всякий окіл цієї точки містить зрештою всі $x_n$.

**Лема 5.12.** *Нехай $X_0$ – щільна множина в псевдометричному просторі $X$. Тоді для кожної точки простору існує збіжна до неї послідовність $(x_n) \in X_0^{\mathbb{N}}$.*

◀ За умовою щільності $X_0$ і лемою 5.3 будь-яка точка $x \in X$ пристайна для $X_0$, а значить кожна куля $B(x, 1/n)$ містить точку $x_n \in X$ (якщо $x \in X_0$, то можна взяти $x_n = x$). ▶

Множина в топологічному просторі, яка містить усі границі всякої збіжної послідовності своїх точок, називається *послідовнісно замкнутою*. У п. 4.2 ми назвали таку множину в псевдометричному просторі просто замкнутою (тоді як у загальному топологічному просторі ми означили замнуту множину інакше – як доповнення до відкритої). Наслідок 4.2 стверджує, що в псевдометричному просторі замкнутість рівносильна послідовнісній замкнутості. Зв'язок між цими властивостями в загальному випадку встановлює

**Лема 5.13.** *Замкнута множина в топологічному просторі послідовнісно замкнута.*

◀ Нехай послідовність $(x_n)$ у замкнутій множині $F$ збігається до точки $x$. Позначимо $G = F^c$. Тоді $F = G^c$ і $G$ відкрита. Якби $x$ не належала $F$, то $G$ була би околом точки $x$, відтак містила би, за припущенням збіжності $(x_n)$ до $x$, зрештою всі $x_n$. З іншого боку, всі $x_n$ належать $F$. ▶

Топологічний простір $(X, \tau)$ називається: (*псевдо*)*метризовним*, якщо в $X$ існує (псевдо)метрика $\rho$ така, що $\tau$ є сукупністю відкритих множин (псевдо)метричного простору $(X, \rho)$; *послідовнісним* або *секвенційним*, якщо в ньому всяка послідовнісно замкнута множина замкнута. У цих термінах наслідок 4.2 переформулюється так:

**Наслідок 5.4.** *Якщо топологічний простір псевдометризовний, то він послідовнісний.*

Наведемо приклади неметризовних топологічних просторів.

**Приклад 5.1.** $\tau = \{\emptyset, X\}$. Така топологія є протилежністю до топології дискретного простору (приклад 4.3) і тому називається *антидискретною*. Вона породжується тотожно нульовою псевдометрикою, яка, крім тривіального випадку одноелементної $X$, не є метрикою.

**Приклад 5.2.** *Зв'язна двоточка*: $X = \{a, b\}, \tau = \{\emptyset, \{a\}, X\}$. Ця топологія не породжується ніякою псевдометрикою. Справді, якщо $\rho(a, b) > 0$, то одержуємо дискретну топологію, якщо ж $\rho(a, b) = 0$, то антидискретну.

**Приклад 5.3.** Нехай $X$ – нескінченна множина, а сукупність $\tau'$ замкнутих множин складається з $X$ і всіх її скінченних підмножин (властивості $1' - 3'$ такої сукупності очевидні). У цій топології околами точки $x \in X$ є всілякі множини, утворені з $X$ вилученням скінченного числа відмінних від $x$ точок. Тому всяка послідовність, у якій жодний член не повторюється безліч разів, збігається до кожної точки простору. Якби існувала породжуюча таку збіжність псевдометрика, то вона була би за лемою 4.2 тотожно нульовою і, значить, породжувала б інакшу топологію – антидискретну.

**Приклад 5.4.** Нехай $X$ – незліченна множина, а сукупність $\tau'$ замкнутих множин складається з $X$ і всіх її скінченних або зліченних підмножин. Тоді збіжними до точки $x \in X$ будуть тільки ті послідовності, зрештою всі члени яких дорівнюють $x$. Справді, якщо знайдеться нескінченна множина $J \subset \mathbb{N}$ така, що $x_n \neq x, n \in J$, то окіл $X \setminus \{x_n, n \in J\}$ точки $x$ містить не зрештою всі члени послідовності $(x_n, n \in \mathbb{N})$.

Відсутність нетривіальних збіжних послідовностей у цьому просторі зумовлює послідовнісну замкнутість усіх множин у ньому. Водночас не всі множини замкнуті, так що простір не послідовнісний. А це згідно з наслідком 5.4 означає, що топологія $\tau$ не породжується ніякою псевдометрикою.

Якщо $\tau_1$ і $\tau_2$ – топології на $X$ такі, що $\tau_1 \subset \tau_2$, то говорять, що $\tau_1$ *слабша*, або *грубша*, за $\tau_2$, а $\tau_2$, відповідно, *сильніша*, або *тонша*, ніж $\tau_1$.

Згідно з цією термінологією всяка топологія одночасно слабша і сильніша за себе саму. Якщо ж $\tau_1 \subset \tau_2$ і при цьому $\tau_1 \neq \tau_2$, то перед словами "слабша" і "сильніша" додають "строго".

Очевидно, перетин довільної сукупності топологій сам є топологією. Тому для всякої сукупності $\mathcal{E} \subset 2^X$ серед усіх містячих її топологій (такі існують, хоча би $2^X$) є найслабша. Її позначають $\tau(\mathcal{E})$ і називають *топологією, породженою сукупністю* $\mathcal{E}$.

Нехай $\mathcal{K}$ – довільна сукупність підмножин непорожньої множини $X$. Позначимо:

$$\mathcal{U}(\mathcal{K}) = \left\{ \bigcup_{K\in\mathcal{H}} K,\ \mathcal{H} \subset \mathcal{K} \right\} \tag{4}$$

(це сукупність усеможливих об'єднань множин із $\mathcal{K}$),

$$\mathcal{K}^{\bullet n} = \{K_1 \cap \ldots \cap K_n,\ K_i \in \mathcal{K}\}, \quad \mathcal{K}^{\cap} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}^{\bullet n}.$$

Очевидно,

$$\mathcal{U}(\mathcal{U}(\mathcal{K})) = \mathcal{U}(\mathcal{K}). \tag{5}$$

**Лема 5.14.** *Нехай* $\emptyset \neq \mathcal{G} \subset 2^X$. *Тоді включення*

$$\mathcal{G}^{\bullet 2} \subset \mathcal{U}(\mathcal{G}) \tag{6}$$

*необхідне і достатнє для того, щоб сукупність* $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ *містила перетин усяких двох своїх елементів.*

◀ Необхідність. Порушення (6) означало би існування таких $G_1, G_2 \in \mathcal{G}(\subset \mathcal{U}(\mathcal{G}))$, що $G_1 \cap G_2 \notin \mathcal{U}(\mathcal{G})$.

Достатність. Нехай $E_i \subset \mathcal{U}(\mathcal{G}),\ i = 1, 2$. Тоді згідно з (4) $E_i = \bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}_i} G$ для деяких $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G},\ \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}$. Звідси

$$E_1 \cap E_2 = \bigcup_{G_1\in\mathcal{G}_1, G_2\in\mathcal{G}_2} G_1 \cap G_2. \tag{7}$$

За умови (6) $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$, що разом із (7) дає $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$. ▶

Наступне твердження читач легко доведе сам.

**Лема 5.15.** *Для сукупностей* $\mathcal{E} \subset 2^X$ *і* $\mathcal{G} \subset 2^X$ *включення* $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}(\mathcal{G})$ *рівносильне тому, що для будь-яких* $E \in \mathcal{E}$ *і* $x \in E$ *існує множина* $G \in \mathcal{G}$ *така, що* $x \in G \subset E$.

Говорять, що сукупність $\mathcal{E} \subset 2^X$ *покриває* множину $A \subset X$, якщо $A \subset \bigcup\limits_{E\in\mathcal{E}} E$. Покриваючу сукупність називають також *покриттям*. Зокрема, покриття $\mathcal{G} \subset 2^X$ усієї множини $X$ характеризується рівністю (а не просто включенням, як у загальному випадку) $\bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} G = X$. Якщо $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ – два покриття одної множини такі, що $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, то перше з них називається *підпокриттям* другого.

**Лема 5.16.** *Нехай сукупність $\mathcal{E} \subset 2^X$ покриває $X$. Тоді $\tau(\mathcal{E}) = \mathcal{U}(\mathcal{E}^\cap)$.*

◀ У введених вище позначеннях друга і третя властивості топології записуються так: $\mathcal{U}(\tau) \subset \tau$, $\tau^{\bullet 2} \subset \tau$. З останнього включення виводимо за індукцією, що $\tau^\cap \subset \tau$. За означенням породженої топології $\mathcal{E} \subset \tau(\mathcal{E})$. Із цих співвідношень, позначивши $\mathcal{J} = \mathcal{U}(\mathcal{E}^\cap)$, одержуємо $\mathcal{E}^\cap \subset \tau(\mathcal{E})$, $\mathcal{J} \subset \tau(\mathcal{E})$. Залишається встановити обернене включення $\tau(\mathcal{E}) \subset \mathcal{J}$, для чого достатньо, зважаючи на означення породженої топології, показати, що $\mathcal{J}$ топологія.

Оскільки, очевидно, $\mathcal{E} \subset \mathcal{J}$, то $\mathcal{J}$ покриває $X$, раз $\mathcal{E}$ покриває. Поклавши в (5) $\mathcal{K} = \mathcal{E}^\cap$, бачимо, що $\mathcal{U}(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$.

Якщо множини $E_1$ і $E_2$ належать $\mathcal{J}$, то $E_1 \cap E_2$ зображується у вигляді (7), де $\mathcal{G}_i \subset \mathcal{E}^\cap, i = 1, 2$, так що права частина (7) належить $\mathcal{J}$. Отже $\mathcal{J}$ містить перетин усяких двох своїх елементів. ▶

`5.2. Неперервні відображення топологічних просторів.` Сформульована в лемі 4.6 необхідна і достатня умова неперервності відображення одного псевдометричного простору в інший для топологічних просторів стає означенням. А саме, відображення $f$ топологічного простору $X$ у топологічний простір $Y$ називається неперервним у точці $x \in X$, якщо для будь-якого околу $V$ точки $f(x)$ існує окіл $U$ точки $x$ такий, що $f(U) \subset V$ (останнє співвідношення можна ще записати як $U \subset f^{-1}(V)$). Безпосередньо з цього означення і означення збіжної послідовності випливає

**Лема 5.17.** *Нехай $X$ і $Y$ – топологічні простори, $f$ –неперервне в точці $x \in X$ відображення з $X$ в $Y$, а $(x_n)$ – збіжна до $x$ послідовність в $X$. Тоді $f(x_n) \to f(x)$.*

Неперервність відораження з $X$ в $Y$ у кожній точці $x \in X$ називають неперервністю на $X$ або просто неперервністю, розуміючи "на $X$"

за умовчанням. Наступні два твердження показують, що цю властивість можна означити і не згадуючи точки.

**Теорема 5.3.** *Для того щоб відображення одного топологічного простору в інший було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз усякої відкритої множини в області прибуття був відкритою множиною в області визначення.*

◀ Необхідність. Нехай $f : X \to Y$ – неперервне відображення, а $V$ – відкрита множина в $Y$. Якщо $V \cap \operatorname{im} f = \emptyset$, то $f^{-1}(V) = \emptyset$ і, таким чином, $f^{-1}(V) \in \tau_X$. Нехай $V \cap \operatorname{im} f \neq \emptyset$. Тоді внаслідок неперервності $f$ кожна точка $x$ із $f^{-1}(V)$ має окіл $U_x \subset f^{-1}(V)$. Покладемо $U = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x$. За побудовою $\{x\} \subset U_x \subset f^{-1}(V)$, звідки

$$f^{-1}(V) \equiv \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \{x\} \subset U \subset f^{-1}(V),$$

тобто $U = f^{-1}(V)$. Відкритість усіх $U_x$ зумовлює за другою властивістю топології відкритість $U$.

Достатність. Якщо $f : X \to Y$ – відображення таке, що $f^{-1}(V) \in \tau_X$ для всякої $V \in \tau_Y$, то для довільних $x \in X$ і $V \in \tau_Y(f(x))$ околом точки $x$ таким, що $U \subset f^{-1}(V)$, буде, наприклад, $f^{-1}(V)$. ▶

**Наслідок 5.5.** *Для того щоб відображення одного топологічного простору в інший було неперервним, необхідно і достатньо, щоб прообраз усякої замкнутої множини в області прибуття був замкнутою множиною в області визначення.*

◀ Це випливає з теореми 5.3, означення замкнутої множини в топологічному просторі і очевидної рівності $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$. ▶

**Наслідок 5.6.** *Композиція неперервних відображень топологічних просторів – неперервне відображення.*

**Наслідок 5.7.** *Нехай $(T_1, \tau_1)$ і $(T_2, \tau_2)$ – топологічні простори, а $\mathcal{E}$ – сукупність множин така, що $\mathcal{U}(\mathcal{E}^{\cap}) = \tau_2$. Тоді для неперервності відображення $f : T_1 \to T_2$ необхідно і достатньо, щоб для будь-якої $E \in \mathcal{E}$ множина $f^{-1}(E)$ належала $\tau_1$.*

◀ Необхідність випливає з теореми 5.3 в частині необхідності.

Достатність. Позначимо $\mathcal{T} = \{A \in T_2 : f^{-1}(A) \in \tau_1\}$. Оскільки прообраз об'єднання (і так само перетину) довільної сукупності множин дорівнює об'єднанню (відповідно перетинові) прообразів, то за побудовою і властивостями топології $\mathcal{T}$ містить об'єднання довільної сукупності своїх елементів і перетин усяких двох своїх елементів. Це разом із припущенням (у частині достатності) $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ означає, що $\mathcal{U}(\mathcal{E}^{\cap}) \subset \mathcal{T}$. Але за умовою $\mathcal{U}(\mathcal{E}^{\cap}) = \tau_2$. Тепер неперервність $f$ випливає з теореми 5.3. ▶

Зауважимо, що в теоремі 5.3 і наслідку 5.5 ідеться про прообрази. Замінивши їх образами, одержимо інші властивості, причому не одну, а дві (у термінах образів, на відміну від прообразів, властивості відображення зберігати відкритість і зберігати замкнутість не рівносильні). У дальших міркуваннях фігуруватиме тільки перша з них, яку й означимо. Відображення одного топологічного простору в інший називається *відкритим*, якщо образ усякої відкритої множини в області визначення є відкритою множиною в області прибуття. Зіставивши це означення з теоремою 5.3, доходимо такого висновку.

**Лема 5.18.** *Для того щоб бієктивне відображення відображення одного топологічного простору на інший було відкритим, необхідно і достатньо, щоб обернене відображення було неперервним.*

Наступне твердження показує, що відкрите відображення можна означити і в термінах подібно до того, як ми означили неперервне відображення.

**Лема 5.19.** *Для того щоб відображення $f : X \to Y$, де $X$ і $Y$ – топологічні простори, було відкритим, необхідно і достатньо, щоб для будь-яких $x \in X$ і $U \in \tau_X(x)$ множина $f(U)$ містила деякий окіл точки $f(x)$.*

◀ Необхідність. Якщо $f$ відкрите, то для будь-яких $x \in X$ і $U \in \tau_X(x)$ множина $f(U)$ сама буде околом точки $f(x)$.

Достатність. Нехай $U$ – відкрита множина в $X$. Позначимо $V = f(U)$. За умовою для кожного $x \in X$ існує $V_x \in \tau_Y(f(x)) \cap 2^V$. Тоді $V = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$, що доводить відкритість $V$. ▶

Взаємодвоїстість понять неперервного і відкритого відображення розкривається далі в наступних двох лемах.

**Лема 5.20.** *Для того щоб відображення $f : X \to Y$, де $X$ і $Y$ – топологічні простори, було неперервним, необхідно і достатньо, щоб для всякої множини $A \subset X$ мало місце включення*

$$f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}. \tag{8}$$

◀ Необхідність. Позначимо $F = \overline{f(A)}$. Очевидно, $A \subset f^{-1}(F)$. За припущенням непрерервності $f$ і наслідком 5.5 множина $f^{-1}(F)$ замкнута, що разом з останнім включенням дає $\overline{A} \subset f^{-1}(F)$, або, рівносильно, $f\left(\overline{A}\right) \subset F$.

Достатність. Нехай $F$ – замкнута множина в $Y$. Позначимо $A = f^{-1}(F)$. Тоді $f(A) \subset F$, звідки за умовою (2) і вибором $F$ $f\left(\overline{A}\right) \subset F$, або, рівносильно, $\overline{A} \subset f^{-1}(F) \equiv A$. Отже $A$ замкнута, що з огляду на довільність $F$ означає, згідно з наслідком 5.5, що $f$ неперервне. ▶

**Лема 5.21.** *Для того щоб відображення $f : X \to Y$, де $X$ і $Y$ – топологічні простори, було відкритим, необхідно і достатньо, щоб для всякої множини $A \subset X$ мало місце включення*

$$f\left(A^\circ\right) \subset \left(f(A)\right)^\circ. \tag{9}$$

◀ Необхідність. Оскільки $A$ є об'єднанням усіх відкритих підмножин множини $A$ і образ об'єднання довільної сукупності множин дорівнює об'єднанню образів, то

$$f\left(A^\circ\right) = \bigcup_{G \in \tau_X \cap 2^A} f(G).$$

За припущенням відкритості $f$ множини $f(G)$ відкриті. Усі вони містяться в $f(A)$, бо $G \subset A$. Тому остання рівність зумовлює (3).

Достатність. Нехай $G$ – відкрита множина в $X$. Позначимо $B = f(G)$. За умовою (3) і вибором $G$ $B \subset B^\circ$, тобто $B$ відкрита. ▶

**Лема 5.22.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $(Y, \rho_Y)$ – псевдометричний простір, $(f_n)$ – послідовність неперервних у точці $x_0 \in X$ відображень з $X$ в $Y$, а $f$ – відображення з $X$ в $Y$ таке, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує окіл $W \in \tau(x_0)$ такий, що*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sup_{x\in W} \rho_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

*Тоді $f$ також неперервне в точці $x_0$.*

◀ У доведенні замість $\rho_Y$ пишемо $\rho$.

Для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ маємо за нерівністю трикутника

$$\rho(f(x), f(x_0)) \leqslant \rho(f(x), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f_n(x_0)) + \rho(f_n(x_0), f(x_0)),$$

звідки для всякої містячої $x_0$ множини $U$

$$\sup_{x\in U} \rho(f(x), f(x_0)) \leqslant 2 \sup_{x\in U} \rho(f(x), f_n(x)) + \sup_{x\in U} \rho(f_n(x), f_n(x_0)). \qquad (10)$$

Фіксуємо $\varepsilon > 0$ і вибираємо існуючий за припущеннями леми окіл $W_1$ точки $x_0$ такий, що

$$\varliminf_{n\to\infty} \sup_{x\in W_1} \rho(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{4},$$

а значить

$$\sup_{x\in W_1} \rho(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (11)$$

для деякого $n$. Після цього вибираємо існуючий за припущенням неперервності всіх $f_n$ у точці $x_0$ окіл $W_2$ цієї точки такий, що

$$\sup_{x\in W_2} \rho(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Це разом із (11) і (10) дає для $U = W_1 \cap W_2 \ \ (\in \tau(x))$

$$\sup_{x\in U} \rho(f(x), fx_0)) < \varepsilon.$$

Отже для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує окіл $U$ точки $x_0$ такий, що $f(U) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$. Залишається зауважити, що всякий окіл $V$ точки $f(x_0)$ містить деяку відкриту кулю з центром $f(x_0)$.

**Наслідок 5.8.** *Нехай $(X, \rho_X)$ і $(Y, \rho_Y)$ – псевдометричні простори, $(f_n)$ – послідовність неперервних у точці $x_0 \in X$ відображень, а $f$ – відображення з $X$ в $Y$ таке, що*

$$\lim_{r\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \sup_{x\in B_X(x,r)} \rho_Y(f_n(x), f(x)) = 0.$$

*Тоді $f$ також неперервне в точці $x_0$.*

**Лема 5.23.** *Нехай $f$ – неперервна $\mathbb{R}$-значна функція на топологічному просторі $X$. Тоді для будь-якої множини $A \subset X$*

$$\sup_{x\in\overline{A}} f(x) = \sup_{x\in A} f(x), \quad \inf_{x\in\overline{A}} f(x) = \inf_{x\in A} f(x).$$

◀ Позначимо ліву і праву частини першої з двох рівностей через $a$ і $\overline{a}$ відповідно. За означенням супремуму для довільного числа $b < \overline{a}$ існує точка $\overline{x} \in \overline{A}$ така, що

$$f(\overline{x}) > \frac{b+\overline{a}}{2}. \tag{12}$$

За умовою неперервності $f$ існує такий окіл $U$ точки $\overline{x}$, що для будь-якої точки $x \in U \quad |f(x) - f(\overline{x})| < (\overline{a} - b)/2$, а значить $f(x) > f(\overline{x}) - (\overline{a} - b)/2$, що разом із (12) дає $f(x) > b$. Ми довели імплікацію

$$b < \overline{a} \implies b < a,$$

означаючу, що $\overline{a} \leqslant a$. Це разом з очевидною нерівністю $a \leqslant \overline{a}$ доводить першу із стверджуваних рівностей. Друга доводиться аналогічно (або зводиться до першої заміною $f$ на $-f$). ▶

Бієктивне неперервне відображення одного топологічного простору на інший таке, що обернене відображення також неперервне, називається *гомеоморфізмом*. Порівнявши дане означення з теоремою 5.3, доходимо такого висновку.

**Наслідок 5.9.** *Для того, щоб бієкція одного топологічного простору на інший була гомеоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб прообраз усякої відкритої множини в області значень і образ усякої відкритої множини в області визначення був відкритою множиною.*

Аналогічне твердження, в якому замість відкритих множин фігурують замкнуті, випливає з наслідку 5.5.

Пригадавши означення відкритого відображення, можемо переформулювати наслідок 5.9 так:

**Наслідок 5.10.** *Для того, щоб бієктивне відображення одного топологічного простору на інший було гомеоморфізмом, необхідно і достатньо, щоб воно було неперервним і відкритим.*

Наступні два приклади показують, що не всяка неперервна бієкція є гомеоморфізмом.

**Приклад 5.5.** Нехай $\tau_1$ і $\tau_2$ – топології на $X$, із яких друга строго міститься в першій. Наділену топологією $\tau_k$ множину $X$ позначаємо $X_k$. Тоді тотожне відображення $\mathrm{id}_X : X_k \to X_{3-k}$ (співпадаюче зі своїм оберненим!) неперервне при $k = 1$ і не є таким при $k = 2$.

**Приклад 5.6.** Нехай $X = [0, 1[$, $\rho_X(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$,$S - \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\rho_S(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, $f(x) = e^{2\pi ix}$. Очевидна нерівність

$$|e^{iu} - e^{iv}| \leqslant |u - v|, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

показує, що відображення $f : X \to S$ рівномірно неперервне. З іншого боку, воно переводить відкриту кулю $B_X(0, r) \equiv [0, r[$ радіуса $r < 1$ в множину $\{e^{2\pi ix}, 0 \leqslant x < 1\}$, яка не містить жодного околу своєї точки 1. Отже, за наслідком 5.10, $f$ не гомеоморфізм.

**Лема 5.24.** *Для того щоб бієкція $f : X \to Y$, де $X$ і $Y$ – топологічні простори, була гомеоморфізмом, необхідно, щоб воно мало властивості* (2), (3) *і достатньо, щоб мало хоча б одну з них.*

◀ Необхідність. Якщо $f$ відкрите, то за лемою 5.21 в частині необхідності для будь-якої $x \in X$. Якщо $f$ бієкція, то за наслідком 5.1 останнє включення рівносильне такому: $U \in \tau_X(x)$. Якщо до того ж $f$ неперервне, то за лемою 5.20 має місце і обернене включення. Отже, $f$ має властивість (3), а значить, за лемою 5.6, і (2).

Достатність. Якщо $f$ має хоча б одну з властивостей (2) або (3), то за лемою 5.6 воно має обидві. Тоді $f$ неперервне за лемою 5.6 і відкрите за лемою 5.6, відтак за наслідком 5.10 це гомеоморфізм. ▶

Для загальних топологічних просторів немає поняття рівномірно неперервного відображення, оскільки дане в п. 4.1 означення не переформульовується в термінах околів (однак за додаткових алгебричних припущень це вдається зробити і без використання псевдометрики – див. п. 5.5 нижче).

5.3. Бази топологічних просторів. Сукупність $\mathcal{G} \subset 2^X$ називається *базою* сукупності $\mathcal{E} \subset 2^X$, якщо $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ і $\mathcal{U}(\mathcal{G}) = \mathcal{E}$. Із цього означення і рівності (5) випливає

**Лема 5.25.** *Якщо $\mathcal{K}$ – база сукупності $\mathcal{G}$, а $\mathcal{G}$, у свою чергу, – база $\mathcal{E}$, то й $\mathcal{K}$ – база $\mathcal{E}$.*

З означень топології та бази і з леми 5.14 одержуємо

**Наслідок 5.11.** *Для того щоб сукупність $\mathcal{G} \subset 2^X$ була базою деякої топології на $X$, необхідно і достатньо, щоб вона покривала $X$ і мала властивість* (6).

Лема 5.15 дозволяє переформулювати цей висновок так:

**Наслідок 5.12.** *Для того щоб сукупність $\mathcal{G} \subset 2^X$ була базою деякої топології на $X$, необхідно і достатньо, щоб, по-перше, вона покривала $X$ і, по-друге, для будь-яких $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ і $x \in G_1 \cap G_2$ існувала множина $G \in \mathcal{G}$ така, що $x \in G \subset G_1 \cap G_2$.*

Базу топології $\tau$ на $X$ називають також базою топологічного простору $(X, \tau)$.

Очевидно, для довільних множин $X$ і $Y$, відображення $f : X \to Y$ і сукупність $\mathcal{E} \subset 2^X$ має місце рівність

$$f^{-1}\left(\bigcup_{A\in\mathcal{E}} A\right) = \bigcup_{A\in\mathcal{E}} f^{-1}(A).$$

Спираючись на неї, виводимо з теореми 5.3 і означення бази.

**Наслідок 5.13.** *Нехай $X$ і $Y$ – топологічні простори, а $f$ – відображення з $X$ в $Y$ таке, що прообрази всіх елементів деякої бази в $Y$ – відкриті множини в $X$. Тоді $f$ неперервне.*

**Лема 5.26.** *Якщо топологічний простір має зліченну базу, то він сепарабельний.*

◄ Нехай $\{G_n, n \in \mathbb{N}\}$ – база топологічного простору $X$. Для кожного $n$ вибираємо, спираючись на аксіому вибору, точку $x_n \in G_n$. Позначимо $X_0 = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ і покажемо, що множина $X_0$ щільна в $X$.

Довільний окіл $U$ довільної точки $x \in X$, будучи відкритою множиною, є об'єднанням деяких елементів бази:

$$U = \bigcup_{n\in J} G_n, \quad J \subset \mathbb{N}.$$

Оскільки $x \in U$, то знайдеться $n(x) \in J$ таке, що $x \in G_{n(x)}$. За побудовою множини $X_0 \quad G_{n(x)} \cap X_0 \neq \emptyset$ і тим більше $U \cap X_0 \neq \emptyset$. ►

**Лема 5.27.** *Нехай $X_0$ – щільна множина в псевдометричному просторі $X$. Тоді кулі $B(x,r)$, де $x$ пробігає $X_0$, а $r$ – множину додатних раціональних чисел, утворюють базу топології в $X$.*

◄ Нехай $E$ – відкрита множина в $X$, а $x$ – точка в $E$. Тоді за означенням відкритої множини в псевдометричному просторі існує $r > 0$ таке, що $B(x,2r) \subset E$. Очевидно, число $r$ можна вибрати раціональним. Унаслідок щільності $X_0$ існує точка $x_0 \in X_0 \cap B(x,r)$. Тоді $x \in B(x_0,r) \subset B(x,2r) \subset E$. Залишається послатись на лему 5.15. ►

**Наслідок 5.14** (із лем 5.27 і 5.26)**.** *Для псевдометричного простору існування зліченої бази рівносильне сепарабельності.*

Далі нам знадобиться такий теоретико-множинний результат.

**Лема 5.28.** *Нехай $\{M_i, i \in I\}$ – деяка сукупність підмножин деякої зліченної множини. Тоді існує не більш ніж зліченна сукупність $\{M_i, i \in J\}$ $(J \subset I)$ така, що*

$$\bigcup_{i\in J} M_i = \bigcup_{i\in I} M_i. \tag{13}$$

◄ Позначимо праву частину рівності через $M$. Тоді для кожного $m \in M$ існує $i_m \in I$ таке, що $m \in M_{i_m}$. Отже рівність (13) справджується для $J = \{i_m, m \in M\}$. При цьому за побудовою і умовою леми множина $J$ не більш ніж зліченна. ►

**Наслідок 5.15.** *Нехай сукупність $\mathcal{E} \subset 2^X$ має зліченну базу. Тоді будь-яка сукупність $\{E_i, i \in I\} \subset \mathcal{E}$ містить не більш ніж зліченну сукупність $\{E_i, i \in J\}$ $(J \subset I)$ таку, що*

$$\bigcup_{i\in J} E_i = \bigcup_{i\in I} E_i. \tag{14}$$

◄ Візьмемо довільну зліченну базу $\{G_n, n \in \mathbb{N}\}$. За означенням бази кожна $E_i$ зображується у вигляді

$$E_i = \bigcup_{n\in M_i} G_n, \quad M_i \subset I.$$

Тоді

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{n\in M(I)} G_n, \tag{15}$$

де $M(I) = \bigcup\limits_{i\in I} M_i$. Узявши існуючу за лемою 5.28 не більш ніж зліченну множину $J \subset I$ таку, що $M(I) = M(J) \equiv \bigcup\limits_{i\in J} M_i$, перетворимо (15) на (14). ►

Окремий випадок наслідку 5.15, коли $\mathcal{E}$ топологія, називається **теоремою Лінделефа**.

Декартів добуток наділених топологіями множин також можна наділити топологією, вимагаючи від неї певної узгодженості з топологіями співмножниками. Пригадаємо, що елементами декартового добутку $\prod\limits_{t\in T} X_t$ є функції $x(\cdot) : T \to \bigcup\limits_{t\in T} X_t$ такі, що $x(t) \in X_t$ при всіх $t$. Із кожним $s \in T$ пов'яжемо оператор $p_s : \prod_{t\in T} X_t \to X_s$, діючий за правилом $p_s(x(\cdot)) = x(s)$. Нехай $(X_t, \tau_t), t \in T$, – топологічні простори. Назвемо топологію на $\prod_{t\in T} X_t$ *узгодженою* з топологіями співмножників, якщо всі оператори $p_s$ неперервні. Для довільних $s \in T$ і $A_s \subset X_s$ позначимо

$$C_s(A_s) = p_s^{-1}(A_s) \equiv \{x(\cdot) \in \prod_{t\in T} X_t : x(s) \in A_s\}.$$

**Наслідок 5.16** (із теореми 5.3 і наслідку 5.13)**.** *Нехай при кожному $t \in T$ $(X_t, \tau_t)$ – топологічний простір, а $\mathcal{G}_t$ – деяка його база. Тоді для того щоб топологія $\tau$ на $\prod_{t\in T} X_t$ була узгодженою з топологіями співмножників, необхідно і достатньо, щоб для будь-яких $s \in T$ і $G_s \in \mathcal{G}_s$ множина $C_s(G_s)$ належала $\tau$.*

Найслабша з топологій на $\prod\limits_{t\in T} X_t$, узгоджених із топологіями $\tau_t$ на співмножниках, називається *тихоновським добутком топологій* $\tau_t, t \in T$, і позначається $\bigotimes\limits_{t\in T} \tau_t$, а якщо всі $\tau_t$ однакові (так що індекс $t$ стає зайвим), то $\tau^{\otimes T}$. У випадку $T = \{1, \ldots, n\}$ ці позначення замінюють на $\tau_1 \otimes \ldots \otimes \tau_n$ і $\tau^{\otimes n}$ відповідно. Іноді $\bigotimes\limits_{t\in T} \tau_t$ називають *тихоновською топологією* на $\prod\limits_{t\in T} X_t$ – так можна говорити, якщо топології $\tau_t$ визначаються передуючим текстом або стандартним погодженням (наприклад, для $X_t = \mathbb{R}$) і не змінюються в ході міркувань.

Пригадавши означення породженої топології (п. 5.1), можемо рівносильно означити тихоновський добуток $\bigotimes\limits_{t\in T} \tau_t$ як топологію на $\prod\limits_{t\in T} X_t$, породжену сукупністю $\{C_t(G_t), t \in T, G_t \in \mathcal{G}_t\}$, де при кожному $t$ $\mathcal{G}_t$ – де-

яка база топології $\tau_t$. Оскільки, очевидно, ця сукупність покриває $\prod\limits_{t\in T} X_t$, то за лемою 5.16 базу топології $\bigotimes\limits_{t\in T} \tau_t$ утворюють усеможливі скінченні перетини

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_{t_i}(G_{t_i}), \quad n \in \mathbb{N},\ t_1 \in T,\ t_2 \in T \setminus \{t_1\}, \ldots,\ t_n \in T \setminus \{t_1, \ldots, t_{n-1}\},$$

де при кожному $t$ $G_t$ пробігає деяку базу топології $\tau_t$. З огляду на лему 5.25 тихоновський добуток топологій не залежить від вибору баз у співмножниках.

**Приклад 5.7.** Згідно з лемою 5.15 інтервали $]a, b[$ утворюють базу звичайної топології на прямій. Тоді відкриті прямокутники $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ утворюють базу тихоновської топології на площині. Ця ж топологія породжується відкритими кругами (доведіть).

Якщо $\{X_t, t \in T\}$ – сім'я топологічних просторів, то за умовчанням наділяємо декартів добуток $\prod\limits_{t\in T} X_t$ тихоновською топологією. Те саме стосується впорядкованого декартового добутку $X_1 \times \ldots \times X_n$.

**Лема 5.29.** *Нехай при кожному $t \in T$ $F_t$ – замкнута множина в топологічному просторі $X_t$. Тоді $\prod\limits_{t\in T} F_t$ – замкнута множина в $\prod\limits_{t\in T} X_t$.*

◀ Позначимо

$$\Phi_{ts} = \begin{cases} F_t, & \text{якщо } s = t, \\ X_s, & \text{якщо } s \neq t, \end{cases} \qquad \Xi_{ts} = \begin{cases} F_t^c, & \text{якщо } s = t, \\ X_s, & \text{якщо } s \neq t, \end{cases}$$

$\Omega_t = \prod\limits_{s\in T} \Phi_{ts}$. Тоді $\prod\limits_{t\in T} F_t = \bigcap\limits_{t\in T} \Omega_t$, $\Omega_t^c = \prod\limits_{s\in T} \Xi_{ts}$. Остання рівність разом із виразом $\Xi_{ts}$ і означенням тихоновського добутку топологій показує, що кожна з множин $\Omega_t^c$ відкрита. Тоді з передостанньої нерівності випливає замкнутість $\prod\limits_{t\in T} F_t$. ▶

Цей результат допускає таке узагальнення.

**Лема 5.30.** *Нехай при кожному $t \in T$ $A_t$ – множина в топологічному просторі $X_t$. Тоді $\prod\limits_{t\in T} \overline{A}_t = \overline{\prod\limits_{t\in T} A_t}$.*

◄ Позначимо $Q = \prod\limits_{t\in T} A_t,\ R = \prod\limits_{t\in T} \overline{A}_t$. Якщо $x(\cdot) \notin R$, то $x(t) \notin \overline{A}_t$ для деякого $t \in T$. А це за лемою 5.3 рівносильно існуванню, для цього ж $t$, такого $U_t \in \tau_{X_t}(x(t))$, що $U_t \cap A_t = \emptyset$. Тоді, поклавши $U_s = X_s$ при $s \neq t$, одержимо неперетинний із $Q$ окіл $\prod\limits_{s\in T} U_s$ точки $x(\cdot)$. Таким чином, усяка неприналежна множині $R$ точка не приналежить і $\overline{Q}$, тобто $R \subset \overline{Q}$. З іншого боку $Q \subset R$ і за лемою 5.29 множина $R$ замкнута, так що $\overline{Q} \subset R$. ►

**Наслідок 5.17** (із лем 5.3 і 5.30)**.** *Нехай $X_1, \ldots, X_n, Y$ – топологічні простори, а $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$ – неперервне відображення. Тоді для будь-яких $A_1 \subset X, \ldots, A_n \subset X_n$ $f\left(\overline{A}_1 \times \ldots \times \overline{A}_n\right) = \overline{f(A_1 \times \ldots \times A_n)}$.*

**Лема 5.31.** *Нехай $X_1, \ldots, X_n,\ Y_1, \ldots, Y_n$ – топологічні простори, а $f_1 : X_1 \to Y_1, \ldots, f_n : X_n \to Y_n$ – неперервні відображення. Тоді задане рівністю $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$ відображення $f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times \ldots \times Y_n$ також неперервне.*

◄ За побудовою відображення $f$ для будь-яких $B_1 \subset Y_1, \ldots, B_n \subset Y_n$

$$f^{-1}(B_1 \times \ldots \times B_n) = f_1^{-1}(B_1) \times \ldots \times f_n^{-1}(B_n),$$

тож за припущенням неперервності всіх $f_i$, теоремою 5.3 і означенням тихоновського добутку топологій для будь-яких $E_1 \in \tau_{Y_1}, \ldots, E_n \in \tau_{Y_n}$

$$f^{-1}(E_1 \times \ldots \times E_n) \in \tau_{X_1} \otimes \ldots \otimes \tau_{X_n}.$$

Тепер неперервність $f$ випливає з наслідку 5.7, застосованого до $T_1 = X_1 \times \ldots \times X_n,\ T_2 = Y_1 \times \ldots \times Y_n,\ \tau_1 = \tau_{X_1} \otimes \ldots \otimes \tau_{X_n},\ \tau_2 = \tau_{Y_1} \otimes \ldots \otimes \tau_{Y_n}$ і $\mathcal{E} = \{G_1 \times \ldots \times G_n : G_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}_n\}$. ►

**Наслідок 5.18** (із леми 5.31 і наслідку 5.6)**.** Нехай $X_1, \ldots, X_n,\ Y_1, \ldots, Y_n,$ $Z$ – топологічні простори, а $f_1 : X_1 \to Y_1, \ldots, f_n : X_n \to Y_n,\ g : Y_1 \times \ldots \times Y_n \to Z$ – неперервні відображення. Тоді задане рівністю $h(x_1, \ldots, x_n) = g(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$ відображення $h : X_1 \times \ldots \times X_n \to Z$ також неперервне.

**Лема 5.32.** *Нехай $X, Y$ і $Z$ – топологічні простори. Тоді для будь-якого $\psi \in \mathrm{C}(Y \to Z)$ задане рівністю $q_\psi(\varphi) = \varphi \circ \psi$ відображення $q_\psi : Z^Y \to Z^X$ неперервне відносно тихоновських топологій.*

◀ Для довільних $A \in Z, x \in X$ позначимо $C(x, A) = \{z(\cdot) \in Z^X : z(x) \in A\}$. Із неперервності $\psi$ маємо за теоремою 5.3 $\psi^{-1}(E) \in \tau_Y$ для всякої $E \in \tau_Z$. Тоді для будь-яких $x_0 \in X$ і $E \in \tau_Z \quad q_\psi^{-1}(C(x_0, E)) \in \tau_X$, бо $q_\psi^{-1}\{z(\cdot) \in Z^X : z(x_0) \in E\} = \{y(\cdot) \in Y^X : \psi(y(x_0)) \in E\} = \{y(\cdot) \in Y^X : y(x_0) \in \psi^{-1}(E)\}$. Тепер неперервність $q_\psi$ випливає з наслідку 5.7 і означення тихоновської топології. ▶

5.4. Властивості віддільності. *Околом множини* в топологічному просторі називають довільну відкриту надмножину її (окіл одноточкової множини $\{x\}$ ми назвали в п. 5.1 околом точки $x$).

**Лема 5.33.** *Такі властивості топологічного простору $X$ рівносильні:*

$(*)$ *Будь-які замкнута множина $F \subset X$ і точка $x \in X \setminus F$ мають неперетинні околи.*

$(**)$ *Довільний окіл довільної точки простору містить замикання деякого околу цієї точки.*

◀ Візьмемо довільні $x \in X$ і $U \in \tau_X(x)$. Якщо $X$ має властивість $(*)$, то знайдуться відкриті множини $V$ і $W$ такі, що $x \in V$, $U^c \subset W$ і $V \cap W = \varnothing$. З останнього співвідношення маємо за лемою 5.4 $\overline{V} \cap W = \varnothing$, тобто $\overline{V} \subset W^c$ і тим більше $\overline{V} \subset U$.

Нехай точка $x \in X$ не належить множині $F \subset X$. Тоді $F^c \in \tau_X(x)$. Отже, якщо $X$ має властивість $(**)$, то знайдеться $U \in \tau_X(x)$ такий, що $\overline{U} \subset F^c$. За побудовою $\overline{U}^c$ – окіл $F$ і $U \cap \overline{U}^c \subset U \cap U^c = \varnothing$. ▶

Топологічний простір називається:

- *відокремним*, якщо кожна з двох довільних різних точок цього простору має окіл, який не містить іншу;
- *гаусдорфовим*, якщо в ньому всякі дві різні точки мають неперетинні околи;
- *регулярним*, якщо він відокремний і має одну з властивостей $(*)$ або $(**)$ (а значить, за лемою 5.33, і обидві);
- *нормальним*, якщо він відокремний і всякі дві неперетинні замкнуті множини в ньому мають неперетинні околи.

Ці, а також деякі інші подібні їм властивості топологічних просторів разом називають *властивостями віддільності*. Вище вони перелічені в порядку підсилення.

Наступні два твердження випливають безпосередньо з означень згаданих у ньому понять.

**Лема 5.34.** *У класі псевдометричних просторів метричні простори і тільки вони відокремні.*

**Лема 5.35.** *У класі псевдометричних просторів метричні простори і тільки вони гаусдофові.*

**Лема 5.36.** *Відокремність топологічного простору рівносильна замкнутості всіх одноточкових множин у ньому.*

◀ Нехай $x$ і $y \neq x$ – точки топологічного простору $X$ і нехай множина $\{x\}$ замкнута. Тоді $X \setminus \{x\} \in \tau(y)$.

Якби замикання множини $\{x\}$ містило деяку відмінну від $x$ точку, то вона була би, за лемою 5.3, пристайною для $x$, тобто всякий її окіл містив би $x$. ▶

Ця лема показує, що простори з прикладів 5.3 і 5.4 відокремні (але не гаусдорфові – доведіть), а з прикладів 5.1 і 5.2 – ні.

Безпосередньо з означень збіжності (п. 5.1) і гаусдорфового простору випливає єдиність границі збіжної послідовності в такому просторі.

Приклад 5.3 показує, що відокремності для цього недостатньо.

**Лема 5.37.** *Неперетинні замкнуті множини в псевдометричному просторі мають неперетинні околи.*

◀ Для довільних поки що множин $F_1, F_2$ в псевдометричному просторі $(X, \rho)$ і точки $x \in X$ позначимо $r_i(x) = \rho(x, F_i)$. Нехай $F_1$ і $F_2$ замкнуті і не перетинаються. Тоді за лемою 4.3 для будь-якої $x \in F_i \quad r_{3-i}(x) > 0$, відтак множина $B(x, r_{3-i}(x)/2)$ непорожня. Отже задана рівністю

$$G_i = \bigcup_{x \in F_i} B\left(x, \frac{r_{3-i}(x)}{2}\right)$$

множина $G_i$ – окіл $F_i$. Покажемо, що $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

Якби існувала точка $y \in G_1 \cap G_2$, то знайшлися б точки $x_1 \in G_1, x_2 \in G_2$ такі, що

$$\rho(x_i, y) < r_{3-i}(x)/2.$$

Але це разом із нерівністю трикутника (5) і очевидною нерівністю

$$r_{3-i}(x) \leqslant \rho(x_{3-i}, x_i) \quad \left(\overset{(2)}{=} \rho(x_1, x_2)\right)$$

приводить до абсурдного висновку $\rho(x_1, x_2) < \rho(x_1, x_2)$. ►

**Наслідок 5.19** (із лем 5.34 і 5.37)**.** *Усякий метричний простір нормальний.*

5.5. Топологічні алгебри. У п. 3.1 ми означили алгебру як множину, в якій задано деякі скінченномісні операції. Алгебра, наділена ще й топологією, відносно якої всі головні операції неперервні, називається *топологічною алгеброю.*

Нагадаю введене в § 1 позначення

$$f(A_1, \ldots, A_n) = \{f(x_1, \ldots, x_n),\ x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n\}.$$

Якщо серед множин $A_i$ є одноелементні, то символ кожної такої множини замінюють символ відповідного елемента, наприклад, $f(x_1, A_2) = \{f(x_1, x_2), x_2 \in A_2\}$.

Пригадавши останнє речення п. 5.3, виводимо з означень топологічної алгебри і тихоновської топології таке твердження.

**Лема 5.38.** *Нехай $X$ – топологічна алгебра. Тоді для будь-яких головної операції $f : X^n \to X$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ і $V \in \tau_X(f(x_1, \ldots, x_n))$ існують $U_1 \in \tau_X(x_1), \ldots, U_n \in \tau_X(x_n)$ такі, що $f(U_1, \ldots, U_n) \subset V$.*

Пригадаймо з п. 3.1, що прямий добуток однотипних алгебр є алгеброю того ж типу з поточково виконуваними головними операціями. Зокрема, якщо $q$ – $n$-місна головна операція на алгебрі $Y$, а $X$ – довільна непорожня множина, то результат виконання $n$-місної операції $q$ на $Y^X$ над функціями $y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot) \in Y^X$ це функція на $X$, значенням якої в точці $x$ є $q(y_1(x), \ldots, y_n(x))$.

**Теорема 5.4.** *Нехай $X$ – топологічний простір, а $Y$ – топологічна алгебра. Тоді $\mathrm{C}(X \to Y)$ – однотипна з $Y$ алгебра.*

◄ Нехай $q : Y^n \to Y$ – якась із головних операцій алгебри $Y$, а $f_1, \ldots, f_n$ – неперервні в точці $x \in X$ відображення з $X$ в $Y$. Позначимо

$p(\cdot) = q(f_1(\cdot), \ldots, f_n(\cdot))$ і візьмемо довільний окіл $W$ точки $p(x)$. За лемою 5.38 існують $V_1 \in \tau_Y(f_1(x)), \ldots, V_n \in \tau_Y(f(x_n))$ такі, що $q(V_1, \ldots, V_n) \subset W$. За вибором $f_1, \ldots, f_n$ існують околи $U_1, \ldots, U_n$ точки $x$ такі, що $f_i(U_i) \subset V_i$. Покладаємо $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$. За побудовою це окіл точки $x$ такий, що $f_i(U) \subset f_i(U_i),\ i = 1, \ldots, n$. Отже $p(U) \subset W$, що з огляду на довільність $W \in \tau_Y(p(x))$ доводить неперервність $p$ в точці $x$. Таким чином, $\mathrm{C}(X \to Y)$ – підалгебра алгебри $Y^X$. ▶

Розглядаючи конкретні класи топологічних алгебр слово "алгебра" замінюють родовою назвою представників цього класу. Таким чином, без додаткових пояснень зрозуміло, що таке топологічна адитивна група (ТАГ), топологічне кільце, топологічний векторний простір (ТВП). Часто в означення топологічної алгебри включають ще й вимогу відокремності, але ми цього не робимо, для того щоб поняття ТВП охоплювало і напівнормовані простори.

Узівши в наслідку 5.17 $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, сконкретизуємо його так.

**Наслідок 5.20.** *Для довільних множин $A_1$ і $A_2$ в топологічній адитивній напівгрупі $\overline{A}_1 + \overline{A}_2 \subset \overline{A_1 + A_2}$.*

**Лема 5.39.** *Операція віднімання в ТАГ неперервна.*

◀ Це окремий випадок ($n = 2,\ X_1 = X_2 = Y_1 = Y_2 = Z,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = -x,\ g(y_1, y_2) = y_1 + y_2$) наслідку 5.18. ▶

**Наслідок 5.21** (із леми 5.39 і наслідку 5.19)**.** Для довільних множин $A_1$ і $A_2$ в ТАГ $\overline{A}_1 - \overline{A}_2 \subset \overline{A_1 - A_2}$.

Операція додавання в топологічній адитивній напівгрупі, будучи неперервною по парі змінних, неперервна і по кожному з доданків при фіксованому іншому. Крім того, в адитивній групі операції $x \mapsto x + x_0$ і $x \mapsto x - x_0$ взаємно обернені. Ми довели таке.

**Лема 5.40.** *Для будь-якого елемента $x_0$ топологічної адитивної групи $X$ відображення $x \mapsto x + x_0$ – гомеоморфізм $X$ на себе.*

**Лема 5.41.** *Для того щоб адитивне відображення $\Lambda : X \to Y$, де $X$ і $Y$ – топологічні адитивні групи, було відкритим, необхідно і достатньо, щоб для всякого околу нуля $U \subset X$ множина $\Lambda U$ містила деякий окіл нуля $V \subset Y$.*

◀ Необхідність. Нехай $\Lambda$ – відкрите адитивне відображення і $U$ – окіл нуля в $X$. Тоді $\Lambda U$ – окіл нуля в $Y$, так що можна покласти $V = \Lambda U$.

Достатність. Нехай $G$ – відкрита множина в $X$, а $x$ – точка в ній. Тоді множина $G - x$ містить нуль і за лемою 5.40 відкрита, тож за припущенням про $\Lambda$ існує $V_x \in \tau_Y(0)$ такий, що $V_x \subset \Lambda(G-x) \equiv \Lambda G - \Lambda x$. Переписавши це співвідношення у вигляді $V_x + \Lambda x \subset \Lambda G$ і врахувавши, що $\Lambda x \subset V_x + \Lambda x$, $\bigcup\limits_{x\in G} \Lambda x = \Lambda G$, одержуємо $\Lambda G = \bigcup\limits_{x\in G} (V_x + \Lambda x)$. За лемою 5.40 всі множини $V_x + \Lambda x$ відкриті, тож і $\Lambda G$ відкрита за другою властивістю топології. ▶

**Лема 5.42.** *Для будь-якого околу нуля $U$ в ТАГ $X$ існує окіл нуля $G$ такий, що $G - G \subset U$.*

◀ За лемою 5.39 існує тихоновський окіл точки $(0,0) \in X^2$ такий, що $x - y \in U$ для всіх $(x, y) \in E$. За означеннями тихоновської топології та бази і за лемою 5.15 існують відкриті множини $G_1, G_2 \subset X$ такі, що $(0,0) \in G_1 \times G_2 \subset E$. Залишається покласти $G = G_1 \cap G_2$. ▶

**Лема 5.43.** *Для будь-якого околу нуля $G$ в ТАГ $\overline{G} \subset G - G$.*

◀ За лемою 5.40 для будь-якого елемента $x$ множина $x + G$ – окіл точки $x$. Тому для кожної до $G$ точки $x$ (а такими є за лемою 5.3 всі точки множини $\overline{G}$) $(x + G) \cap G = \emptyset$, а значить існують $y, z \in G$ такі, що $x + y = z$. Тоді $x = z - y \in G - G$.▶

**Наслідок 5.22.** *Довільний окіл довільної точки топологічної адитивної групи містить замикання деякого околу цієї точки.*

◀ Для точки нуль це випливає безпосередньо з лем 5.42 і 5.44.

Якщо $U$ – окіл точки $x$, то $U - x$ – окіл нуля (відкритість цієї множини випливає з відкритості $U$ за лемою 5.40). Тоді за вже доведеним існує окіл нуля $E$ такий, що $\overline{E} \subset U - x$, або, що те саме, $\overline{E} + x \subset U$. При цьому $E + x \subset \overline{E} + x$ і за лемою 5.40 множина $\overline{E} + x$ замкнута, так що $\overline{E + x} \subset \overline{E} + x$. Отже окіл $U$ точки $x$ містить замикання околу $E + x$ цієї ж точки. ▶

**Наслідок 5.23.** *Відокремна (як топологічний простір) ТАГ регулярна.*

**Лема 5.44.** *Для будь-якого околу нуля $G$ в ТАГ $\overline{G} \subset G - G$.*

◄ За лемою 5.40 для будь-якого елемента $x$ множина $x + G$ – окіл точки $x$. Тому для кожної до $G$ точки $x$ (а такими є за лемою 5.3 всі точки множини $\overline{G}$) $(x+G) \cap G = \emptyset$, а значить існують $y, z \in G$ такі, що $x + y = z$. Тоді $x = z - y \in G - G$.►

Відображення $f : X \to Y$, де $X$ і $Y$ топологічні адитивні групи, називається *рівномірно неперервним*, якщо для будь-якого околу нуля $V \subset Y$ існує окіл нуля $U \subset X$ такий, що $f(x') - f(x'') \in V$ щоразу, коли $x' - x'' \in U$. Легко перевірити (зробіть це), що для напівнормованих просторів наведене означення узгоджується з даним у п. 4.1 означенням рівномірно неперервного відображення одного псевдометричного простору в інший.

**Лема 5.45.** *Нехай адитивне відображення $\Lambda : X \to Y$, де$X$ і $Y$ топологічні адитивні групи, неперервне в деякій точці $x \in X$. Тоді воно рівномірно неперервне.*

◄ Нехай $V$ – окіл нуля в $Y$. Тоді $V + \Lambda x$ – окіл точки $\Lambda x$, звідки за припущенням неперервності $\Lambda$ в точці $x$ $\Lambda G \subset V + \Lambda x$ для деякого $G \in \tau_X(x)$. Позначивши $U = G - x$ і взявши до уваги адитивність $\Lambda$, можемо переписати останнє співвідношення у вигляді $\Lambda U \subset V$. За побудовою $U$ окіл нуля такий, що $\Lambda(x' - x'') \subset V$ щоразу, коли $x' - x'' \in U$. Залишається зауважити, що $\Lambda(x' - x'') = \Lambda x' - \Lambda x''$ внаслідок адитивності $\Lambda$. ►

**Лема 5.46.** *Нехай $x$ – елемент відокремного топологічного монокільця такий, що послідовність $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x^k,\ n \in \mathbb{N}\right)$ збігається. Тоді $1-x$ оборотний і $(1-x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.*

◄ Позначимо $y_n = 1 + x + \ldots + x^n$. За умовою існує елемент $y$ такий, що $y_n \to y$. За наслідком 5.23 він єдиний. Тоді, перейшовши до границі в рівності $x^n = y_n - y_{n-1}$, одержуємо за лемою 5.39 $\lim x^n = 0$, що разом з очевидними рівностями $(1-x)y_n + x^{n+1} = 1 = y_n(1-x) + x^{n+1}$ і неперервністю операцій у топологічному кільці дає $(1-x)y = 1 = y(1-x)$. ►

Переходимо до розгляду топологічних векторних просторів. Відображення одного векторного простору в інший прийнято називати оператором. Назвемо ТВП $X$ *архімедовим*, якщо в ньому всякий окіл нуля

$U$ має властивість

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{t\geqslant n} tU = X. \tag{16}$$

Покажемо, що адитивність і послідовнісна неперервність спільно з архімедовістю областей визначення і прибуття зумовлюють однорідність, а значить і лінійність оператора. Почнемо з підготовчих тверджень.

**Лема 5.47.** *Для будь-яких вектора $x$ в архімедовому ТВП над полем $\mathbb{K}$ і послідовності $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ справджується $a_n x \to 0$.*

◀ Нехай спочатку всі $a_n$ дійсні невід'ємні. Візьмемо в ТВП довільний окіл нуля $U$ і доберемо для нього існуюче за умовою архімедовості простору натуральне число $m$ таке, $x \in tU$ при $t \geqslant m$. Оскільки $a_n \to 0$, то існує $n_m$ таке, що $a_n < 1/m$ при $n > n_m$. Тоді $a_n x \in U$ при $n > n_m$.

Нехай тепер $a_n$ дійсні довільного знака. Позначаємо $b_n = a_n \vee 0, c_n = a_n \wedge 0$, так що $a_n = b_n - c_n$. За вже доведеним $b_n x \to 0, c_n x \to 0$, звідки з урахуванням неперервності віднімання в ТВП маємо $a_n x \to 0$.

Випадок комплексних $a_n$ (виникаючий, якщо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) очевидним чином зводиться до попереднього. ▶

**Лема 5.48.** *Нехай $X$ і $Y$ – векторні простори. Тоді всякий адитивний оператор $\Lambda : X \to Y$ однорідний над полем раціональних чисел.*

◀ З адитивності $\Lambda$ маємо $\Lambda nx = n\Lambda x$ для всіх $x \in X, n \in \mathbb{N}$. Рівності $\Lambda x = \Lambda(x + \vec{0}) = \Lambda x + \Lambda\vec{0}, \vec{0} = 0x$, показують, що $\Lambda(0x) = \vec{0} = \Lambda\vec{0}$. При цьому $\Lambda\vec{0} = \Lambda(x + (-x)) = \Lambda x + \Lambda(-x)$. Отже $\Lambda nx = n\Lambda x$ для всіх $x \in X, n \in \mathbb{Z}$. Замінивши в цій рівності $x$ на $x/n$, дістанемо $\Lambda(x/n) = (\Lambda x)/n$, $x \in X, n \in \mathbb{N}$. Замінивши тепер уже в цій рівності $x$ на $mx$ ($m \in \mathbb{Z}$), одержимо за вже доведеним $\Lambda\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{m}{n}\Lambda x$. ▶

**Наслідок 5.24.** *Нехай $X$ і $Y$ – архімедові ТВП над полем $\mathbb{K}$, причому $Y$ відокремний. Тоді всякий послідовнісно неперервний адитивний оператор $\Lambda : X \to Y$ лінійний над полем $\mathbb{R}$.*

◀ Візьмемо довільні $x \in X, t \in \mathbb{R}$ і збіжну до $t$ послідовність $(t_n)$ раціональних чисел. Зважаючи на адитивність $\Lambda$

$$\Lambda(tx) - t\Lambda x = \Lambda((t - t_n)x) + \Lambda(t_n x) - t\Lambda x. \tag{17}$$

За лемою 5.47 $(t-t_n)x \to 0$, звідки з огляду на послідовнісну неперервність $\Lambda$ $\Lambda((t-t_n)x) \to 0$. Так само за лемою 5.47 $(t_n-t)\Lambda x \to 0$. Із цих двох співвідношень і неперервності додавання в ТВП маємо

$$\Lambda((t-t_n)x) + t_n\Lambda x - t\Lambda x \to 0.$$

Ліва частина цього співвідношення є не що інше як права частина рівності (17) (бо $t_n\Lambda x = \Lambda(t_n x)$ за лемою 5.48). Тому $\Lambda(tx) - t\Lambda x$ міститься в кожному околі нуля. А це з огляду на відокремність $Y$ означає, що $\Lambda(tx) - t\Lambda x = 0$. ▶

**Наслідок 5.25.** *Нехай $X$ і $Y$ – комплексні архімедові ТВП, із яких другий відокремний, а $\Lambda : X \to Y$ – послідовнісно неперервний адитивний оператор такий, що $\Lambda(ix) = i\Lambda x$ для всякого $x \in X$. Тоді $\Lambda$ лінійний над полем $\mathbb{C}$.*

## § 6. Повні псевдометричні простори

`6.1.Загальні поняття і факти.` Нагадаю два означення з курсу математичного аналізу.

Послідовність $(x_n)$ у псевдометричному просторі $(X, \rho)$ називається *фундаментальною*, якщо

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \rho(x_m, x_n) = 0, \tag{1}$$

або, рівносильно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} \rho(x_{n+p}, x_n) = 0. \tag{2}$$

Псевдометричний простір, у якому всяка фундаментальна послідовність збігається (до точки або точок цього ж простору) називається *повним*.

Рівносильність двох форм означення фундаментальної послідовності випливає з наступного елементарного твердження (доведіть його).

*Кожна з двох властивостей*

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} |a_{n+p,n}| = 0$$

*подвійної послідовності $(a_{mn},\ m, n \in \mathbb{N})$ дійсних чисел зумовлює іншу.*

Метричний простір $(\mathbb{R}, \rho)$, де $\rho(x, y) = |x-y|$, повний (у цьому полягає критерій Коші в частині достатності), а простір $(\mathbb{R}, \rho_1)$, де $\rho_1(x, y) =$

$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, неповний, бо прямуюча до $\infty$ $(\notin \mathbb{R})$ послідовність $(\operatorname{ctg}(1/n))$ фундаментальна в ньому. І це при тому, що співвідношення $\rho(x_n, x) \to 0$ і $\rho_1(x, x) \to 0$ рівносильні, тобто збіжності в цих просторах співпадають!

**Лема 6.1.** *Для будь-яких фундаментальних послідовностей $(x_n)$ і $(x'_n)$ у псевдометричному просторі $(X, \rho)$ числова послідовність $(\rho(x_n, x'_n))$ збігається.*

◄ Позначимо $c_n = \rho(x_n, x'_n)$. Згідно з нерівністю (6)

$$|c_m - c_n| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(x'_m, x'_n),$$

так що фундаментальність $(x_n)$ і $(x'_n)$ зумовлює фундаментальність $(c_n)$. Оскільки остання послідовність числова, то за критерієм Коші вона збігається.

**Лема 6.2.** *Фундаментальна послідовність обмежена.*

◄ Нехай $(x_n)$ задовольняє умову (2). Тоді існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\rho(x_n, x_{n_0}) < 1$ при $n > n_0$, тобто множина $\{x_n, n > n_0\}$ міститься в кулі $B(x_{n_0}, 1)$ і, таким чином, обмежена. Оскільки, очевидно, об'єднання скінченного числа обмежених множин – обмежена множина, то й $\{x_n, n \geqslant 1\}$ обмежена. ►

**Лема 6.3.** *Якщо фундаментальна послідовність містить збіжну підпослідовність, то й сама вона збігається до тих же границь.*

◄ Нехай $(x_n)$ – задовольняюча умову (2) послідовність у псевдометричному просторі $(X, \rho)$, а $x$ і $(k_n)$ – точка простору і строго зростаюча послідовність натуральних чисел такі, що $\rho(x, x_{k_n}) \to 0$. Із цих припущень, нерівності трикутника $\rho(x, x) \leqslant \rho(x, x_{k_n}) + \rho(x_{k_n}, x)$ і очевидної нерівності $\rho(x_{k_n}, x) \leqslant \sup\limits_{p \in \mathbb{N}} \rho(x_{n+p}, x_n)$ маємо $\rho(x_n, x) \to 0$. ►

**Лема 6.4.** *Нехай $(x_n)$ і $(r_n)$ – послідовність точок псевдометричного простору і прямуюча до нуля послідовність додатних чисел такі, що*

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

*Тоді послідовність $(x_n)$ фундаментальна.*

◄ За умови (3) для будь-яких натуральних $n$ і $p$ $\overline{B}(x_{n+p}, r_{n+p}) \subset \overline{B}(x_n, r_n)$, а значить $\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant r_n$, що спільно з припущенням $r_n \to 0$ зумовлює (2). ►

**Теорема 6.1** (Кантор). *Для того щоб псевдометричний простір був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому всяка спадна за включенням послідовність замкнутих куль, радіуси яких прямують до нуля, мала непорожній перетин.*

◄ Необхідність. Нехай $X$ повний псевдометричний простір, $(r_n)$ – прямуюча до нуля послідовність додатних чисел, а $(x_n)$ – задовольняюча умову (3) послідовність в $X$. Тоді за лемою 6.4 $(x_n)$ фундаментальна, відтак за умовою повноти $X$ існує (не обов'язково єдина) точка $x \in X$ така, що $x_n \to x$. Зважаючи на (3) $x_n \in \overline{B}(x_m, r_m)$ при $n \geqslant m$. Із цих співвідношень і встановленої на початку п. 4.2 замкнутості $\overline{B}(x, r)$ маємо $x \in \overline{B}(x_m, r_m), m \in \mathbb{N}$. Отже перетин усіх куль $\overline{B}(x_n, r_n)$ містить точку $x$ і тим самим непорожній.

Достатність. Нехай $(x_n)$ – фундаментальна послідовність у псевдометричному просторі $(X, \rho)$. Позначимо $b_m = \sup_{p\in\mathbb{N}} \rho(x_{m+p}, x_m)$, $J_n(k) = \{m > k : b_m < 2^{-n}\}$ ($\neq \varnothing$, бо за припущенням фундаментальності $(x_n)$ послідовність $(b_m)$ прямує до нуля). Покладемо $k_0 = 0$ і далі, для $n = 1, 2, \ldots,$ $k_n = \min\{m > k_{n-1} : b_m < 2^{-n}\}$ (так що $k_n$ – найменший елемент множини $J_n(k_{n-1})$, непорожність якої обґрунтовано вище). За побудовою послідовність $(k_n)$ строго зростає і для будь-яких натуральних $n$ і $p$

$$\rho(x_{k_n+p}, x_{k_n}) < 2^{-n}.$$

Позначимо $y_n = x_{k_n}$. Тоді при $p = k_{n+1} - k_n$ остання нерівність набуває вигляду $\rho(y_{n+1}, y_n) < 2^{-n}$. Звідси за нерівністю трикутника маємо для будь-якого $x \in X$

$$\rho(x, y_n) < 2^{-n} + \rho(y_{n+1}, x).$$

Отже

$$\overline{B}(y_{n+1}, 2^{-n}) \subset \overline{B}(y_n, 2^{-(n-1)}),$$

що спільно з припущенням теореми в частині достатності зумовлює існування точки $x$, приналежної всім кулям $\overline{B}(y_n, 2^{-(n-1)})$. Для неї $\rho(y_n, x) \leqslant 2^{-(n-1)}$, а значить $y_n \to x$. Тоді за лемою 6.3 $x_n \to x$. ►

**Теорема 6.2** (Бер). *Перетин довільної послідовності відкритих щільних множин у повному псевдометричному просторі – щільна множина.*

◄ Нехай $A_n, n \in \mathbb{N}$, – відкриті щільні множини. Позначимо $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Нехай $G$ – непорожня відкрита множина. Тоді за лемою 5.10 існують прямуюча до нуля послідовність $(r_n)$ додатних чисел і послідовність $(x_n)$ точок простору такі що

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(x_n, r_n) \subset G \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n.$$

Із другого включення в цій формулі маємо

$$B \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) \subset G \cap A;$$

із першого включення, прямування $(r_n)$ до нуля і повноти простору виводимо за теоремою 6.2 непорожність $B$. ►

**Наслідок 6.1.** *Повний псевдометричний простір не може бути об'єднанням зліченного числа своїх ніде не щільних підмножин.*

◄ Припустимо, що в повному псевдометричному просторі $X$ існують ніде не щільні множини $D_n, n \in \mathbb{N}$, такі, що $X = \bigcup\limits_n D_n$. Тоді $\bigcap\limits_n D_n^c = \emptyset$ і тим більше $\bigcap\limits_n \overline{D}_n^c = \emptyset$. За вибором $D_n$ і означенням ніде не щільної множини кожна з множин $\overline{D}_n^c$ щільна. Будучи доповненням до замкнутої множини $\overline{D}_n$, вона до того ж відкрита. Тоді за теоремою 6.2 остання рівність несумісна з повнотою простору. ►

Часто наслідок 6.1 також називають теоремою Бера.

**Наслідок 6.2 (**із наслідку 6.1 і леми 5.8)**.** *Нехай $f$ – відображення множини $X$ на повний псевдометричний простір $Y$, а $(Q_n)$ – послідовність множин в $X$ така, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n = X$ і всі множини $f(Q_n)$ гомеоморфні одна одній. Тоді $\overline{f(Q_n)}^{\circ} \neq \emptyset, \quad n \in \mathbb{N}$.*

**Лема 6.5.** *Рівномірно неперервне відображення одного псевдометричного простору в інший переводить фундаментальні послідовності у фундаментальні.*

◄ Нехай $(X, \rho_X)$ і $(Y, \rho_Y)$ – псевдометричні простори, $f_Y$ – рівномірно неперервне відображення з $X$ в $Y$, а $(x_n)$ – послідовність в $X$.

Позначимо $y_n = f(x_n)$,

$$q(r) = \sup_{(x',x'')\in D_X(r)} \rho_Y(f(x'), f(x''))$$

(множина $D_X(r)$ задається рівністю (4.11)), так що $\rho_Y(y_m, y_n) \leqslant q(\rho_X(x_m, x_n))$. Рівномірна неперервність $f$ полягає, згідно з даним у п. 4.1 означенням, у тому, що $q(+0) = 0$. Тоді остання нерівність показує, що властивість (1) послідовність $(x_n)$ зумовлює аналогічну властивість $(y_n)$. ►

**Теорема 6.3.** *Нехай $X$ – псевдометричний простір, $X_0$ – щільна множина в ньому, а $Y$ – повний метричний простір. Тоді всяке рівномірно неперервне відображення з $X_0$ в $Y$ однозначно продовжується до рівномірно неперервного відображення з $X$ в $Y$.*

◄ Нехай $f_0$ – рівномірно неперервне відображення з $X_0$ в $Y$. Для довільної точки $x \in X$ беремо існуючу за припущенням щільності $X_0$ і лемою 5.12 збіжну до $x$ послідовність $(x_n) \in X_0^{\mathbb{N}}$. Усяка збіжна послідовність, очевидно, фундаментальна. Тоді за припущенням про $f_0$ і лемою 6.5 $(f_0(x_n))$ також фундаментальна, відтак, зважаючи на повноту $Y$, збігається до деякої границі – єдиної, раз простір $Y$ метричний. Далі, якщо $\rho_X(x_n, x) \to 0$, $\rho_X(x''_n, x) \to 0$, то з нерівності трикутника маємо $\rho_X(x'_n, x''_n) \to 0$, звідки за припущенням рівномірної неперервності $f_0$

$$\rho_Y(f_0(x'_n), f_0(x''_n)) \to 0.$$

Тоді за лемою 4.1

$$\rho_Y(\lim f_0(x'_n), \lim f_0(x''_n)) = 0.$$

А це означає, раз $\rho_Y$ метрика, що границя $\lim f_0(x_n)$ однакова для всіх збіжних до $x$ послідовностей $(x_n) \in X_0^{\mathbb{N}}$. Це дає нам право задати відображення $f : X \to Y$, поклавши для довільних $x \in X$ і збіжної до $x$ послідовності $(x_n) \in X_0^{\mathbb{N}}$

$$f(x) = \lim f_0(x_n). \tag{4}$$

Тоді за лемою 5.11 $f(x) = f_0(x)$ для $x \in X_0$, тобто $f_0$ – звуження $f$ на $X_0$, а $f$, відповідно, – продовження $f_0$. Залишається показати, що $f$ рівномірно неперервне.

Нехай послідовності $(x'_n) \in X_0^{\mathbb{N}}$ і $(x''_n) \in X_0^{\mathbb{N}}$ збігаються до $x' \in X$ і $x'' \in X$ відповідно. Тоді за лемою 4.2

$$\rho_X(x', x'') = \lim \rho_X(x'_n, x''_n). \tag{5}$$

За цією ж лемою маємо з огляду на (4)

$$\rho_Y(f(x'), f(x'')) = \lim \rho_Y(f_0(x'_n), f_0(x''_n)). \tag{6}$$

Зважаючи на (5) $\rho_X(x'_n, x''_n) < 2\rho_X(x', x'')$ при достатньо великих $n$, що разом із (6) дає

$$\sup_{(x',x'')\in D_X(r)} \rho_Y(f(x'), f(x'')) \leqslant \sup_{(u,v)\in D_{X_0}(2r)} \rho_Y(f_0(u), f_0(v)).$$

Таким чином, рівномірна неперервність $f_0$ на $X_0$ зумовлює рівномірну неперервність $f$ на $X$. ►

**Лема 6.6.** *Замкнутий підпростір повного псевдометричного простору – повний простір.*

◄ Нехай $Z_0$ – замкнута множина в повному псевдометричному просторі $Z$, а $(z_n)$ – фундаментальна послідовність у $Z_0$. За припущенням повноти $Z$ $(z_n)$ збігається, а за умовою замкнутості $Z_0$ її границя належить $Z_0$. ►

**Лема 6.7.** *Якщо повний метричний простір $X$ містить щільний підпростір, ізометричний деякому щільному підпросторові повного метричного простору $Y$, то $X$ і $Y$ також ізометричні.*

◄ Нехай $X_0$ і $Y_0$ – щільні множини в $X$ і $Y$ відповідно, а $f_0$ – бієкція між $X_0$ і $Y_0$ така, що для всіх $x', x'' \in X$

$$\rho_Y(f_0(x'), f_0(x'')) = \rho_X(x', x''). \tag{7}$$

Тоді обернене до $f_0$ відображення, яке позначимо $g_0$ замість традиційного $f_0^{-1}$, має аналогічну властивість: для всіх $y', y'' \in Y_0$

$$\rho_X(g_0(y'), g_0(y'')) = \rho_Y(y', y''). \tag{8}$$

При цьому за означенням оберненого відображення для будь-яких $x \in X_0$ і $y \in Y_0$

$$g_0(f_0(x)) = x, \quad f_0(g_0(y)) = y. \tag{9}$$

Властивості (7) і (8) зумовлюють рівномірну неперервність відображень $f_0$ і $g_0$. Тоді за теоремою 6.3 $f_0$ однозначно продовжується до рівномірно неперервного відображення $f : X \to Y$, а $g_0$ – до рівномірно неперервного відображення $g : Y \to X$. Із способу продовження (рівність (4)) і леми 4.2 випливає, що $f$ успадковує від $f_0$ властивість (7), тобто

$$\rho_Y(f(x'), f(x'')) = \rho_X(x', x''), \quad x', x'' \in X. \tag{10}$$

Позначимо $X_1 = \{x \in X : \ g \circ f(x) = x\}$, $Y_1 = \{y \in Y : f \circ g(y) = y\}$. Оскільки $g|_{Y_0} = g_0$ і $f|_{X_0} = f$, то із (9) маємо $X_0 \subset X_1, \ Y_0 \subset Y_1$. За наслідком 5.3 відображення $g \circ f$ і $f \circ g$ неперервні, відтак за лемою 5.17 множини $X_1$ і $Y_1$ послідовно замкнуті, а значить і замкнуті, раз $X$ і $Y$ метричні простори. Це дозволяє підсилити останні два включення так: $\overline{X}_0 \subset X_1, \ \overline{Y}_0 \subset Y_1$. Але $\overline{X}_0 = X, \overline{Y}_0 = Y$ за припущенням щільності $X_0$ і $Y_0$. Отже $X_1 = X, \ Y_1 = Y$, тобто $g(f(x)) = x, \ f(g(y)) = y$ для всіх $x \in X, y \in Y$. Таким чином, $f$ бієкція. У поєднанні з (10) це означає, що $f$ ізометрія. ►

**Лема 6.8.** *Метричний зліпок повного псевдометричного простору – повний метричний простір.*

◄ Фундаментальність послідовності $([x_n])$ у метричному зліпку псевдометричного простору $X$ рівносильна, з огляду на (9), фундаментальності $(x_n)$ в $X$. Отже якщо $([x_n])$ фундаментальна, а $X$ повний, то $(x_n)$ збігається до деяких (нерозрізненних) точок простору $X$. Тоді зважаючи на (9) $([x_n])$ збігається до класу еквівалентності, який ці точки містить. ►

**Лема 6.9.** *Якщо повний псевдометричний простір містить щільний підпростір, псевдоізометричний деякому щільному підпросторові повного псевдометричного простору $Y$, то $X$ і $Y$ також псевдоізометричні.*

◄ Нехай щільний підпростір $X_0$ простору $X$ псевдоізометричний щільному підпросторові $Y_0$ простору $Y$, тобто метричні зліпки $\widetilde{X}_0$ і $\widetilde{Y}_0$ цих підпросторів ізометричні. За наслідком 5.3 $\widetilde{X}_0$ ізометричний щільному підпросторові простору $\widetilde{X}$, а $\widetilde{Y}_0$ – щільному підпросторові простору $\widetilde{Y}$, так що ці підпростори ізометричні один одному. Тоді за лемою 6.7 $\widetilde{X}$ і $\widetilde{Y}$ ізометричні. ►

`6.2. Повнота двох просторів відображень`. Введемо позначення:

- $\mathrm{B}(X \to Y)$ – множина всіх обмежених відображеньнепорожньої множини $X$ у псевдометричний простір $Y$;
- $\mathrm{C}(X \to Y)$ – множина всіх неперервних відображень топологічного простору $X$ у топологічний простір $Y$;
- $\mathrm{C_b}(X \to Y)$ –множина всіх обмежених неперервних відображень топологічного простору $X$ у псевдометричний простір $Y$ (рівносильно: $\mathrm{C_b}(X \to Y) = \mathrm{B}(X \to Y) \bigcap \mathrm{C}(X \to Y)$);
- для $f, g \in \mathrm{B}(X \to Y)$

$$\rho_{XY}(f, g) = \sup_{x \in X} \rho_Y(f(x), g(x)). \tag{11}$$

Очевидно, $\rho_{XY}$ також псевдометрика.

**Теорема 6.4.** *Нехай $X$ – непорожня множина, а $(Y, \rho_Y)$ – повний псевдометричний простір. Тоді псевдометричний простір $(\mathrm{B}(X \to Y), \rho_{XY})$ також повний.*

◀ Нехай $(f_n)$ – фундаментальна послідовність у $\mathrm{B}(X \to Y)$, тобто

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\rho \in \mathbb{N}} \rho_{XY}(f_{n+p}, f_n) = 0. \tag{12}$$

Тоді, як видно із (11), для будь-якого $x \in X$ послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна в $Y$, а значить збігається, раз $Y$ повний. Для кожного $x$ беремо, спираючись на аксіому вибору, одну з границь цієї послідовності і позначаємо її $f(x)$. Одержуємо відображення $f : X \to Y$ таке, що при всіх $x$

$$f_n(x) \to f(x). \tag{13}$$

За лемою 6.2 послідовність $(f_n)$ обмежена, тобто існують $g \in \mathrm{B}\,(X \to Y)$ і $R > 0$ такі, що $\rho_{XY}(f_n, g) \leqslant R, n \in \mathbb{N}$. А це з огляду на (11) те саме, що

$$\rho_Y(f_n(x), g(x)) \leqslant R,\ n \in \mathbb{N},\ x \in X.$$

Звідси і з (12) маємо за лемою 4.2 (з очевидними перепозначеннями) $\rho_Y(f(x), g(x)) \leqslant R, x \in X$. Отже $f \in \mathrm{B}(X \to Y)$. Залишається показати, що

$$\lim_{n \to \infty} \rho_{XY}(f, f_n) = 0. \tag{14}$$

Записавши ланцюжок співвідношень

$$\rho_{XY}(f,f_n)=\sup_{x\in X}\rho_Y(f(x),f_n(x))=\sup_{x\in X}\lim_{p\to\infty}\rho_Y(f_{n+p}(x),f_n(x))$$

$$\leqslant\sup_{x\in X}\sup_{p\in\mathbb{N}}\rho_Y(f_{n+p}(x),f_n(x))=\sup_{p\in\mathbb{N}}\sup_{x\in X}\rho_Y(f_{n+p}(x),f_n(x)),$$

у якому нерівність очевидна, а рівності, в порядку появи, спираються на (11), лему 4.2 і наслідок 2.1, виводимо (14) із (11) і (12). ►

**Лема 6.10.** *Нехай $X$ – топологічний простір, а $(Y,\rho_Y)$ – псевдометричний простір. Тоді множина $\mathrm{C_b}(X\to Y)$ замкнута в $\mathrm{B}(X\to Y)$.*

◄ Нехай послідовність $(f_n)$ обмежених неперервних відображень з $X$ в $Y$ збігається до $f\in\mathrm{B}(X\to Y)$ за метрикою $\rho_{XY}$, тобто справджується рівність (14), яку з урахуванням (11) можна записати так:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}\rho_Y(f_n(x),f(x))=0.$$

Тоді лема 5.22, останню умову якої ми щойно перевірили (у ролі $W$ виступає "універсальний" окіл $X$), а решту постулювали, стверджує неперервність $f$ у кожній точці $x_0\in X$. Цим доведено послідовнісну замкнутість $\mathrm{C_b}(C\to Y)$. Оскільки топологія простору $\mathrm{B}(X\to Y)$ породжується псевдометрикою, то за наслідком 5.4 послідовнісна замкнутість у ньому рівносильна замкнутості. ►

**Наслідок 6.3** (з теореми 6.4, леми 6.10 і леми 6.6)**.** *Нехай $X$ – топологічний простір, а $(Y,\rho_Y)$ – повний псевдометричний простір. Тоді псевдометричний простір $(\mathrm{C_b}(X\to Y),\rho_{XY})$ повний.*

### 6.3. Поповнення метричних просторів.

*(Псевдо)поповненням* (псевдо)метричного простору $Z$ називається довільний повний (псевдо)метричний простір, який містить щільний підпростір, (псевдо)ізометричний $Z$.

**Лема 6.11.** *Нехай $T$ – підпростір повного псевдометричного простору. Тоді $\overline{T}$ – поповнення $T$.*

◄ За лемою 6.6 простір $\overline{T}$ повний. За означенням щільності множина $T$ щільна в просторі $\overline{T}$. ►

Безпосередньо з означення поповнення і з леми 6.7 випливає

**Лема 6.12.** *Усякі два поповнення довільного метричного простору ізометричні одне одному.*

**Лема 6.13.** *Усякі два псевдопоповнення довільного псевдометричного простору псевдоізометричні одне одному.*

◀ Нехай $X$ і $Y$ – повні псевдометричні простори (метричні зліпки яких позначимо $\widetilde{X}$ і $\widetilde{Y}$), а $Z$ – псевдометричний простір, метричний зліпок якого ізометричний деякому щільному підпросторові в $\widetilde{X}$ і деякому щільному підпросторові в $\widetilde{Y}$. Тоді $\widetilde{X}$ містить щільний підпростір, ізометричний деякому щільному підпросторові в $\widetilde{Y}$. При цьому за лемою 6.8 метричні простори $\widetilde{X}$ і $\widetilde{Y}$ повні, відтак лема 6.7 стверджує, що вони ізометричні. ▶

**Лема 6.14.** *Метричний зліпок псевдопоповнення псевдометричного простору є поповненням його метричного зліпка.*

◀ Нехай $X$ – псевдопоповнення псевдометричного простору $Z$, тобто $X$ і містить щільний підпростір $X_0$ такий, що $\widetilde{X_0}$ і $\widetilde{Z}$ ізометричні. Тоді зважаючи на наслідок 5.3 $\widetilde{Z}$ ізометричний також деякому щільному підпросторові в $\widetilde{X}$. При цьому за лемою 6.8 метричний простір $\widetilde{X}$ повний. ▶

**Теорема 6.5 (**Гаусдорф**).** *Усякий (псевдо)метричний простір має єдине з точністю до (псевдо)ізометричності (псевдо)поповнення.*

◀ Нехай $(X, \rho)$ – псевдометричний простір. Множину всіх фундаментальних послідовностей в $X$ позначимо через $\mathfrak{X}$. Для довільних $\mathfrak{x} \equiv (x_n)$ і $\mathfrak{x}' \equiv (x'_n)$ покладемо

$$\varrho(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}') = \lim \rho(x_n, x'_n) \tag{15}$$

(існування границі є твердженням леми 6.1). Очевидно, $\varrho$ успадковує від $\rho$ властивості (1) і (2) (з належними перепозначеннями). Із нерівності трикутника

$$\rho(x'_n, x''_n) \leqslant \rho(x'_n, x_n) + \rho(x_n, x''_n)$$

для $\rho$ і рівності (15) випливає нерівність трикутника

$$\varrho(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'') \leqslant \varrho(\mathfrak{x}', \mathfrak{x}) + \varrho(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'')$$

для $\varrho$. Отже $\varrho$ псевдометрика в $\mathfrak{X}$.

Позначимо $\mathfrak{X}_0 = \{(x), x \in X\}$, де $(x)$ – послідовність, усі члени якої дорівнюють $x$. Покажемо, що множина $\mathfrak{X}_0$ щільна в псевдометричному просторі $(\mathfrak{X}, \varrho)$, тобто всяка точка $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ пристайна для $\mathfrak{X}_0$.

Візьмемо довільну фундаментальну послідовність $\mathfrak{x} \equiv (x_n)$ і позначимо $\mathfrak{y}$ послідовність, усі члени якої дорівнюють $x_m$. Тоді $\mathfrak{y}^m \in \mathfrak{X}_0$ і

$$\varrho(\mathfrak{y}^m, \mathfrak{x}) \overset{(15)}{=} \lim_{n\to\infty} \rho(x_m, x_n) \leqslant \sup_{p\in\mathbb{N}} \rho(x_m, x_{m+p}).$$

За вибором $\mathfrak{x}$ права частина нерівності прямує до нуля при $m \to \infty$. Отже $\mathfrak{x}$ – пристайна точка множини $\mathfrak{X}_0$.

Покажемо, що простір $\mathfrak{X}$ повний.

Нехай $(\mathfrak{x}^k)$ – фундаментальна послідовність в $\mathfrak{X}$, тобто

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ l\to\infty}} \varrho(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}^l) = 0. \tag{16}$$

Для кожного $k$ беремо існуючу внаслідок щільності $\mathfrak{X}_0$ послідовність $\mathfrak{z}^k \equiv (z_k, z_k, \ldots) \in \mathfrak{X}_0$ таку, що $\varrho(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{z}^k) < 1/k$, або, що те саме,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n^k, z_k) < \frac{1}{k}. \tag{17}$$

Тоді, перейшовши в нерівності

$$\rho(z_k, z_l) \leqslant \rho(z_k, x_n^k) + \rho(x_n^k, x_n^l) + \rho(x_n^l, z_l)$$

до границі при $n \to \infty$, одержимо з урахуванням (15) $\rho(z_k, z_l) \leqslant 1/k + \varrho(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{x}^l) + 1/l$. А це спільно з (16) означає фундаментальність послідовності $\mathfrak{z} \equiv (z_1, z_2, \ldots)$. Переписавши нерівність (17) у вигляді $\varrho(\mathfrak{x}^k, \mathfrak{z}) < 1/k$, бачимо, що $\mathfrak{x}^k \to \mathfrak{z}$.

Очевидно, відповідність $\leftrightarrow (x)$ між $X$ і $\mathfrak{X}_0$ взаємно однозначна і зберігає відстані: $\varrho((x), (x')) = \rho(x, x')$. Це в поєднанні з повнотою $\mathfrak{X}$ і щільністю $\mathfrak{X}_0$ означає, що $\mathfrak{X}$ псевдопоповнення $X$. Доведення для випадку псевдометричних просторів завершується посиланням на лему 6.13.

Нехай тепер $(X, \rho)$ метричний простір. Тоді за вже доведеним і за лемою 6.14 метричний зліпок простору $(\mathfrak{X}, \varrho)$ є поповненням $(X, \rho)$. Залишається послатись на лему 6.12. ▶

## § 7. Компактність і споріднені властивості

7.1.Загальні поняття і факти. Множина в топологічному просторі називається *компактною*, якщо всяке покриття її відкритими множинами містить скінченне підпокриття. Якщо ж скінченне підпокриття можна виділити з усякого з л і ч е н н о г о покриття множини відкритими множинами, то її називають *зліченно компактною*. Очевидно, друга властивість слабша[9] за першу.

Із цих означень і теореми Лінделефа (наслідок 5.15) маємо

**Наслідок 7.1.** *У топологічному просторі зі зліченною базою зліченна компактність рівносильна компактності.*

**Теорема 7.1.** *Для того щоб множина $A$ в топологічному просторі $X$ була компактною, необхідно і достатньо, щоб усяка сукупність $\{F_i, i \in I\}$ замкнутих множин така, що*

$$\bigcap_{i\in I} F_i \cap A = \emptyset, \tag{1}$$

*містила скінченну сукупність $\{F_i, i \in J \subset I\}$ таку, що*

$$\bigcap_{i\in J} F_i \cap A = \emptyset. \tag{2}$$

◀ Позначимо $G_i = F_i^c$. Тоді рівність (1) означає, що сукупність $\{G_i, i \in I\}$ покриває $A$; рівність (2) стверджує те саме для $\{G_i, i \in J\}$. При цьому за побудовою множини $G_i$ відкриті. ▶

Дослівно так само доводиться

**Теорема 7.2.** *Для того щоб множина $A$ в топологічному просторі була зліченно компактною, необхідно і достатньо, щоб усяка задовольняюча умову (1) сукупність $\{F_i, i \in I\}$ замкнутих множин містила скінченну сукупність $\{F_i, i \in J \subset I\}$ з властивістю (2).*

**Теорема 7.3.** *Для того щоб множина $A$ в топологічному просторі була зліченно компактною, необхідно і достатньо, щоб для всякої спадної за включенням зліченної послідовності $(D_n)$ замкнутих множин такої, що*

$$A \cap D_n \neq \emptyset, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

*перетин усіх $A \cap D_n$ також був непорожнім.*

[9] у розумінні "не сильніша"

◀ Необхідність. Припустимо супротивне:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A \cap D_n) = \emptyset. \tag{4}$$

Тоді за теоремою 7.2 знайдеться скінченна множина $J \subset \mathbb{N}$ така, що $\bigcap\limits_{k\in J}(A \cap D_k) = \emptyset$. Але за припущенням про $(D_n)$

$$\bigcap_{k\in J}(A \cap D_k) = A \cap D_{n^*},$$

де $n^*$ – найбільший елемент множини $J$. Отже $A \cap D_{n^*} = \emptyset$, що суперечить (3).

Достатність. Нехай $\{F_i, i \in I\}$ – довільна зліченна сукупність замкнутих множин така, що справджується рівність (1). Зліченність множини $I$ рівносильна існуванню такої зростаючої послідовності $(I_n)$ скінченних підмножин її, що

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{5}$$

Позначимо $B_n = \bigcap\limits_{i\in I_n} F_i$, так що послідовність $(B_n)$ спадає і

$$A \cap B_n = \bigcap_{i\in I_n} F_i \cap A. \tag{6}$$

Із (6) і (5) маємо

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(A \cap B_n) = \bigcap_{i\in I} F_i \cap A.$$

Тоді зважаючи на (1) $\bigcap\limits_{n}(A \cap B_n) = \emptyset$, тож за припущенням про $A$ знайдеться натуральне $n$ таке, що $A \cap B_n = \emptyset$. А це з огляду на (6) рівносильно (2) з $J = I_n$. Отже, за теоремою (2), $A$ зліченно компактна. ►

**Лема 7.1.** *Нехай $(x_n)$ – послідовність точок топологічного простору, а $x$ – точка цього простору, пристайна до кожної з множин $A_n \equiv \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Тоді $(x_n)$ містить збіжну до $x$ підпослідовність.*

◄ Припустимо супротивне: існують $m \in \mathbb{N}$ і окіл $U$ точки $x$ такі, що $x_n \notin U$ при $n > m$. Тоді при $n > m \quad A_n \cap U = \emptyset$, а значить $x$ не пристайна до $A_n$. ►

Множина в наділеному збіжністю (зокрема топологічному) просторі називається *послідовно компактною*, якщо всяка послідовність її точок містить збіжну до точки цієї множини підпослідовність.

**Теорема 7.4.** *Множина в топологічному просторі зліченно компактна в точності тоді, коли вона послідовнісно компактна.*

◄ Нехай $(x_n)$ – послідовність точок зліченно компактної множини $A$. Очевидно $A \cap A_n \neq \emptyset$ при всіх $n$, звідки за теоремою 7.3 в частині необхідності, застосованою до $D_n = \overline{A}_n, \quad A$ містить точку $x$, приналежну всім $\overline{A}_n$. За лемою 5.3 вона пристайна до всіх $A_n$, відтак лема 7.1 стверджує існування збіжної до $x$ підпослідовності $(x_n, n \in I \subset \mathbb{N})$.

Нехай тепер множина $A$ не зліченно компактна. Тоді за теоремою 7.3 існує задовольняюча умови (3) і (4) спадна послідовність $(D_n)$ замкнутих множин. Для кожного $n$ беремо, спираючись на аксіому вибору, точку $x_n \in A \cap D_n$. Оскільки $(D_n)$ спадає, то $x_m \in A \cap D_n$ при $m > n$. Тоді зважаючи на замкнутість (а значить, за лемою 5.13, і послідовнісну замкнутість) множин $D_n$ границя всякої збіжної підпослідовності $(x_m, m \in M \subset \mathbb{N})$ належить усім $D_n$, відтак, згідно із (4), не може належати $A$. ►

Називатимемо топологічний простір компактним (зліченно компактним, послідовнісно компактним), якщо такою є множина його точок. З огляду на теорему 7.4 останні два терміни є синонімами.

**Теорема 7.5.** *Замкнута множина в компактному топологічному просторі компактна.*

◄ Якщо $\mathcal{G}$ – відкрите покриття замкнутої множини $F$ у топологічному просторі $X$, то $\mathcal{G} \cup \{F^c\}$ – відкрите покриття множини $X$. Якщо з першого не можна виділити скінченне підпокриття, то й з другого також, очевидно, не можна. ►

**Теорема 7.6.** *Послідовнісно замкнута множина в послідовнісно компактному просторі послідовнісно компактна.*

◀ Довільна послідовність $(x_n)$ у такому просторі містить збіжну підпослідовність. Якщо всі $x_n$ належать деякій послідовнісно замкнутій множині, то й усі границі цієї підпослідовності належать їй же. ▶

**Теорема 7.7.** *Компактна множина в гаусдорфовому топологічному просторі замкнута.*

◀ Нехай $K$ – непорожня множина в гаусдорфовому топологічному просторі, а $y$ – неприналежна їй точка простору. Тоді для кожної $x \in K$ існують $U_x \in \tau(x)$ і $V_x \in \tau(y)$ такі, що

$$U_x \cap V_x = \varnothing. \tag{7}$$

Околи $U_x, x \in K$, покривають $K$, тому за умови компактності $K$ знайдуться $n \in \mathbb{N}$ і $x_1, \ldots, x_n \in K$ такі, що

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}. \tag{8}$$

Тоді, поклавши $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{x_i} \quad (\in \tau(y))$, одержимо з (7) і (8) $V \cap K = \varnothing$. Таким чином, усяка неприналежна компактній множині $K$ точка не є пристайною до $K$. З огляду на лему 5.3 це означає, що $\overline{K} \subset K$. При цьому за означенням замикання $K \subset \overline{K}$. ▶

**Теорема 7.8.** *Нехай $f$ – неперервне відображення послідовнісно компактного топологічного простору $X$ у топологічний простір $Y$, а $(E_n)$ – зростаюча послідовність відкритих множин в $Y$ така, що*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = Y. \tag{9}$$

*Тоді* $\operatorname{im} f \subset E_n$ *для деякого* $n$.

◀ Припустимо супротивне: для кожного $n$ існує точка $x_n \in X$ така, що $f(x_n) \in E_n^c$. Тоді внаслідок зростання $(E_n)$ (а значить спадання $(E_n^c)$)

$$f(x_k) \in E_n^c \quad \text{при } k \geqslant n. \tag{10}$$

За умовою послідовнісної компактності $X$ існують нескінченна множина $J \subset \mathbb{N}$ і точка $x \in X$ такі, що $x_k \to x$ при $k \to \infty, k \in J$, звідки за припущенням неперервності $f$ і за лемою 5.17 $f(x_k) \to f(x)$ при

$k \to \infty, k \in J$. Це спільно з (9), лемою 5.13 і замкнутістю (за побудовою) всіх $E_n^c$ дає $f(x) \in E_n^c, n \in \mathbb{N}$, що з огляду на (9) неможливо. ►

Оскільки всякий псевдометричний простір є об'єднанням концентричних відкритих куль радіусів $1, 2 \ldots$, то теорема 7.8 стверджує, зокрема, таке:

**Наслідок 7.2.** *Неперервне відображення послідовнісно компактного топологічного простору в метричний простір обмежене.*

**Наслідок 7.3.** *Нехай $X$ – послідовнісно компактний топологічний простір, а $(Y, \rho_Y)$ – повний псевдометричний простір. Тоді псевдометричний простір $(\mathrm{C}(X \to Y), \rho_{XY})$ де $\rho_{XY}$ задається рівністю (6.11), повний.*

**Теорема 7.9.** *Неперервна $\mathbb{R}$-значна функція на послідовнісно компактному топологічному просторі обмежена і досягає своїх точних меж.*

◄ Нехай $X$ і $f$ – такі простір і функція відповідно. Обмеженість $f$ є твердженням наслідку 7.2. Позначимо $M = \sup_{x \in X} f(x)$ $(< \infty)$. Якби для всіх $x$ було $f(x) < M$, то функція $\frac{f}{M-f}$ була би неперервною функцією, визначеною на всьому $X$. А це суперечить наслідкові 7.2, оскільки чисельник дробу обмежений, а знаменник може набувати як завгодно малих додатних значень. Цим доведено, що $f$ досягає своєї верхньої грані. Замінивши $f$ на $-f$, доходимо такого ж висновку для нижньої грані. ►

**Наслідок 7.4** (з теореми 7.9 і наслідку 6.3)**.** *Нехай $X$ – топологічний простір, а $(Y, \rho_Y)$ – повний псевдометричний простір. Тоді псевдометричний простір $(\mathrm{C}(X \to Y), \rho_{XY})$, де $\rho_{XY}$ задається рівністю* (11)*, повний.*

**Теорема 7.10** (Діні)**.** *Нехай монотонна послідовність $(f_n)$ неперервних $\mathbb{R}$-значних функцій на послідовнісно компактному топологічному просторі $X$ поточково збігається до неперервної функції $f$. Тоді вона збігається до неї рівномірно, тобто*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{11}$$

◄ Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $(f_n)$ спадає і $f = 0$. Припустимо, міркуючи від супротивного, що для деякого $c > 0$

$$\{x : f_n(x) \geqslant c\} \neq \varnothing, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді за аксіомою вибору існує послідовність $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ така, що $f_n(x_n) \geqslant c$. Звідси за умовою спадання $(f_n)$ маємо

$$f_n(x_k) \geqslant c \quad \text{при } k \geqslant n. \tag{12}$$

Зважаючи на послідовнісну компактність $X$ існують нескінченна множина $J \subset \mathbb{N}$ і точка $x \in X$ такі, що $x_k \to x$ при $k \to \infty, k \in J$. Тоді із (12) і неперервності $f$ маємо за лемою 5.17 $f_n(x) \geqslant c$, що суперечить поточковій збіжності $(f_n)$ до нуля. ►

Множина в топологічному просторі, замикання якої компактне (зліченно компактне), називається *передкомпактною* (відповідно *зліченно передкомпактною*). Так само називають і простір, множина точок якого має одну з поіменованих властивостей. Зіставивши ці означення з теоремою 7.4, лемою 5.13 і означенням замикання (п. 5.1), доходимо такого висновку.

**Наслідок 7.5.** *Множина в топологічному просторі зліченно передкомпактна в точності тоді, коли всяка послідовність її точок містить збіжну до точки цього простору підпослідовність.*

7.2. Компактність у псевдометричних просторах. Множина $Y$ у псевдометричному просторі $X$ називається *$\varepsilon$-сіткою* множини $T \subset X$, якщо

$$T \subset \bigcup_{y \in Y} B(y, \varepsilon), \tag{13}$$

або, що те саме, для будь-якої $x \in T$ знайдеться точка $y \in Y$, віддалена від $x$ менше ніж на $\varepsilon$. Якщо $\varepsilon$-сітка множини $T$ міститься в ній самій, то говорять "$\varepsilon$-сітка в $T$".

У наступному твердженні використовується введене в п. 1.1 поняття селектора.

**Лема 7.2.** *Нехай $Y$ – $\varepsilon$-сітка множини $T$ в деякому псевдометричному просторі така, що для всякого будь-якого $y \in Y \quad T \cap B(y, ve) \neq \emptyset$. Тоді для всякого селектора $f$ сукупності $\{T \cap B(y, \varepsilon), y \in Y\}$ множина $\{f(y), y \in Y\}$ – $2\varepsilon$-сітка в $T$.*

◄ Для довільної точки $x \in T$ беремо існуючу за умовою (13) точку $y \in Y$ таку, що $\rho(x, y) < \varepsilon$. За припущенням про $f \quad f(y) \in B(y, \varepsilon)$, що

разом із попередньою нерівністю і нерівністю трикутника дає $\rho(x, f(y)) < 2\varepsilon$. При цьому $f(y) \in T$. ►

**Лема 7.3.** *Нехай $(r_n)$ – прямуюча до нуля послідовність додатних чисел, і нехай для кожного $n$ $X_n$ – $\varepsilon$-сітка в псевдометричному просторі $X$. Тоді множина $\bigcup\limits_n X_n$ щільна в $X$.*

◄ Фіксуємо $x \in X$ і для кожного $n$ беремо, спираючись на аксіому вибору, існуючу за припущенням про $X_n$ точку $x_n \in X_n$ таку, що $\rho(x_n, x) < r_n$. Тоді за припущенням про $(r_n)$ послідовність $(x_n)$ збігається до $x$. Залишається послатись на лему 5.12. ►

Множину $X_0$ у псевдометричному просторі таку, що для будь-кого $\varepsilon > 0$ в $X_0$ існує скінченна $\varepsilon$-сітка, називають *цілком обмеженою*. Оскільки $X_0$ сама є псевдометричним простором, то говорять також "цілком обмежений простір" (чи, в разі потреби, "підпростір"). Із цього означення і леми 7.3 маємо

**Наслідок 7.6.** *Цілком обмежений псевдометричний простір сепарабельний.*

Очевидно, всяка цілком обмежена множина обмежена. У скінченновимірному векторному просторі, наділеному, наприклад, евклідовою метрикою, справджується і обернене твердження (див. наслідок 7.13 нижче). Однак у загальному випадку воно не має місця (див., зокрема, теорему 8.3 нижче).

**Лема 7.4.** *Для того щоб множина в псевдометричному просторі була цілком обмеженою, необхідно і достатньо, щоб з усякої послідовності її точок можна було виділити фундаментальну підпослідовність.*

◄ Необхідність. Нехай $(t_k)$ – послідовність у наділеній псевдометрикою $\rho$ множині $T$ такій, що для кожного натурального $n$ у $T$ існує скінченна $2^{-n}$-сітка $Y_n$. Вважаємо, не обмежуючи загальності, що $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$ (інакше замінимо $Y_n$ на $Y_1 \cap \ldots \cap Y_n$). Випливаюче з означення $\varepsilon$-сітки включення

$$B_T(x, 2^{-(n-1)}) \subset \bigcup_{y \in Y_n} B_T(y, 2^{-n})$$

разом із припущенням скінченності всіх $Y_n$ зумовлює існування послідовності $(y_n)$ такої, що $y_n \in Y_n$, а куля $B_T(y_n, 2^{-n})$ містить $y_{n-1}$ і безліч

із $t_k$. Отже існує ще й строго зростаюча послідовність $(k_n)$ натуральних чисел така, що $\rho(x_n, y_n) < 2^{-n}$, де $x_n = t_{k_n}$. При цьому за побудовою послідовності $(y_n)$ $\rho(y_{n+1}, y_n) < 2^{-(n+1)}$, а за нерівністю трикутника

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \rho(x_{n+1}, y_{n+1}) + \rho(y_{n+1}, y_n) + \rho(y_n, x_n),$$

так що

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} + 2^{-n} = 2^{-(n-1)},$$

звідки $\rho(x_{n+p}, x_n) \leqslant 2^{-(n+p-1)} + \ldots + 2^{-(n-1)} < 2^{-(n-2)}$.

Достатність. Неіснування скінченної $\varepsilon$-сітки в $T$ рівносильне існуванню такої послідовності $(t_n) \in T^{\mathbb{N}}$, що $\rho(t_k, t_n) \neq 0$ при $k \neq n$. Очевидно, вона не містить фундаментальних підпослідовностей. ►

**Наслідок 7.7.** *Зліченно передкомпактна множина в псевдометричному просторі цілком обмежена.*

**Наслідок 7.8** (із наслідків 7.6 і 7.7)**.** *Зліченно компактний псевдометричний простір сепарабельний.*

**Наслідок 7.9** (із наслідків 5.14, 7.1 і 7.8)**.** *Для множини в псевдометричному просторі компактність рівносильна зліченній компактності.*

**Наслідок 7.10.** *Для множини в псевдометричному просторі передкомпактність рівносильна зліченній передкомпактності.*

**Лема 7.5.** *Компактний псевдометричний простір повний.*

◄ Якщо деяка фундаментальна послідовність точок простору не збігається, то за лемою 6.3 вона не має збіжних підпослідовностей. Таким чином, неповний псевдометричний простір не компактний. ►

Із леми 7.4 і наслідків 7.10 і 7.7 випливає

**Наслідок 7.11 (теорема Гаусдорфа).** *Множина в повному псевдометричному просторі передкомпактна в точності тоді, коли вона цілком обмежена.*

**Наслідок 7.12.** *Цілком обмежена замкнута множина в повному псевдометричному просторі компактна.*

Теореми Гаусдорфа і Больцано – Ваєрштраса (остання відома читачеві з курсу математичного аналізу) разом приводять до такого висновку.

**Наслідок 7.13.** *Для множини в наділеному евклідовою метрикою скінченновимірному векторному просторі цілковита обмеженість рівносильна обмеженості.*

Замість евклідової метрики можна взяти будь-яку іншу породжуючуті ж класи фундаментальних і збіжних послідовностей і ту ж сукупність обмежених множин (метрика з прикладу 4.2 не годиться).

**Теорема 7.11.** *Для того щоб псевдометричний простір був компактним, необхідно і достатньо, щоб він був цілком обмеженим і повним.*

◀ Необхідність випливає з леми 7.5 і теореми Гаусдорфа.

Достатність. Лема 7.4 стверджує,зокрема, зліченну компактність повного цілком обмеженого псевдометричного простору. Відтак наслідок 7.10 стверджує компактність його. ▶

**Теорема 7.12.** *Для того щоб множина в повному метричному просторі була компактною, необхідно і достатньо, щоб вона була цілком обмеженою і замкнутою.*

◀ Необхідність випливає з наслідку 7.7, теореми 7.7 і леми 5.35, достатність – із наслідку 7.12. ▶

# Глава 3. Напівнормовані простори

## § 8. Загальні напівнормовані простори

`8.1. Базові означення і приклади.` Скрізь нижче $\mathbb{K}$ означає одне з двох полів $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$; елементи поля $\mathbb{K}$ позначаємо грецькими буквами. Число нуль і нульовий вектор розрізняємо по контексту.

Пригадаймо, що в аналітичній геометрії відстань між двома точками простору $\mathbb{K}^d$ означується як довжина різниці їхніх радіус-векторів. В абстрактному векторному просторі немає заданої конкретним виразом довжини. Але постулювавши посутні властивості довжини як фунціонала на векторному просторі, можемо виділити клас векторних просторів, на яких функціонал із такими властивостями існує. Так ми приходимо до понять, які є центральними у функціональному аналізі.

Нехай $X$ – векторний простір над полем $\mathbb{K}$. *Напівнормою* на $X$ називається функціонал $\|\cdot\|$ на $X$ із властивостями:

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \tag{1}$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|. \tag{2}$$

Поклавши у (2) $x=0$, дістанемо для довільного $\lambda \in \mathbb{K}$ $\|0\| = |\lambda|\ \|0\|$. Таким чином, *напівнорма нульового вектора дорівнює нулю*. Також із (2) маємо $\|-x\| = \|x\|$. Відтак, поклавши в (1) $y=-x$, одержимо $\|0\| \leqslant 2\|x\|$. Отже, *напівнорма – невід'ємний функціонал*.

Напівнорма, значення якої на ненульових векторах відмінні від нуля (а значить додатні), називається *нормою*. Векторний простір, на якому задано (напів)норму, називається *(напів)нормованим*. Повний нормований простір називається *банаховим*. *Підпростором* напівнормованого простору називається замкнута лінійна множина в ньому.

Усяка напівнорма породжує псевдометрику:

$$\rho(x,y) = \|x-y\| \tag{3}$$

і відновлюється за нею: $\|x\| = \rho(x,0)$. Для цієї псевдометрики нерівність (5) набуває вигляду

$$|\,\|x-z\| - \|y-z\|\,| \leqslant \|x-y\|. \tag{4}$$

Очевидно, задана рівністю (3) псевдометрика $\rho$ буде метрикою в точності тоді, коли $\|\cdot\|$ норма. Таким чином, (напів)нормований простір – окремий випадок (псевдо)метричного. Скрізь нижче під топологією в (напів)нормованому просторі розуміємо ту, яка породжується означеною вище (псевдо)метрикою $\rho$. Про таку топологію говорять, що вона *породжується (напів)нормою*. Очевидно, в цій топології *кожний окіл довільної точки містить деяку відкриту кулю з центром у ній*.

**Лема 8.1.** *Напівнормований простір архімедів.*

◀ Нехай $X$ – напівнормований простір. Очевидно, для будь-якого $r > 0 \quad rB_X(0,1) = B_X(0,r)$. Тому

$$\bigcap_{r\geqslant n} rB_X(0,1) = B_X(0,n), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{r\geqslant n} rB_X(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_X(0,n) \equiv X.$$

Це разом із передуючим лемі реченням показує, що в $X$ усякий окіл нуля $U$ має властивість (5.16). ▶

Наступне твердження читач легко доведе сам.

**Лема 8.2.** *Замиканням відкритої кулі в напівнормованому просторі є замкнута куля того ж радіуса з тим же центром.*

Приклад 4.3 показує, що у псевдометричному просторі це, взагалі кажучи, не так.

Наведемо основні для нашого курсу приклади нормованих просторів.

**Приклад 8.1.** Для $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d$ і $p > 1$ позначимо

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{5}$$

Властивість (2) так заданого функціонала $\|\cdot\|_p$ очевидна, а властивість (1) випливає з *нерівності Мінковського*

$$\left(\sum_{k=1}^{d} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{d} |y_k|^p\right)^{1/p}, \tag{6}$$

відомої читачеві з курсу математичного аналізу. Отже $\|\cdot\|_p$ напівнорма. Більше того, це норма, оскільки, очевидно, $\|x\|_p \neq 0$ при $x \neq 0$. Наділений цією нормою простір $\mathbb{K}^d$ позначатимемо $\mathbb{K}^d_p$. Простір $\mathbb{K}^d_2$ і, як побачимо в п. 9.1, тільки він серед усіх $\mathbb{K}^d_p$, евклідів. А саме, норма $\|\cdot\|_2$ породжується скалярним множенням

$$\langle x \,|\, y\rangle = \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y_k}.$$

Зауважимо, що права частина рівності (5) має смисл при всіх $p \neq 0$. Однак при $p < 1$ справджується нерівність $\|x+y\|_p \geqslant \|x\|_p + \|y\|_p$, яка може бути й строгою (наведіть приклади), так що в цьому випадку функціонал $\|\cdot\|_p$ не є напівнормою.

Під $\mathbb{K}^d_\infty$ розуміють векторний простір $\mathbb{K}^d$, наділений нормою $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p$. Цю рівність можна з урахуванням (5) записати ще у вигляді

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant d} |x_k|.$$

Усі норми $\|\cdot\|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, породжують однакову топологію. Це видно з нерівностей

$$\|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant d^{1-1/p}\|x\|_p,$$

які читач легко виведе з (5). Збіжністю в цій топології є покомпонентна збіжність векторів.

**Приклад 8.2.** Нескінченновимірним аналогом простору $\mathbb{K}^d_p$ є простір $\ell_p(\mathbb{K})$ (якщо поле $\mathbb{K}$ визначається контекстом або конкретизувати його немає потреби, то пишуть просто $\ell_p$), який означується так:

$$\ell_p(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}, \quad 1 \leqslant p < \infty;$$

$$\ell_\infty(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_k |x_k| < \infty \right\}.$$

Наділимо $\ell_p(\mathbb{K})$ нормою, позначуваною так само, як норма простору $\mathbb{K}^m_p$ і утвореною з останньої граничним переходом при $d \to \infty$:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}, \ 1 \leqslant p < \infty; \quad \|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|. \tag{7}$$

Оскільки нестрогі нерівності витримують граничні переходи, то з (6) випливає властивість (1) заданих першою з рівностей (7) функціоналів $\|\cdot\|_p$ (а для $\|\cdot\|_\infty$ вона очевидна). Властивість же (2) очевидна при всіх значеннях $p$. Таким чином, функціонали $\|\cdot\|_p$ – справді норми. Простір $\ell_2$ і, як побачимо в п. 9.1, тільки він серед усіх $\ell_p$, евклідів. А саме, норма $\|\cdot\|_2$ породжується скалярним множенням

$$\langle x \,|\, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$$

(доведіть абсолютну збіжність ряду).

Збіжність у кожному з просторів $\ell_p$ зумовлює почленну збіжність, але не рівносильна їй. Справді, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_{nk}|^p = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_k |x_{nk}| = 0,$$

то, очевидно, при кожному $k$ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{nk}|$, але з останнього співвідношення не випливає збіжність за нормою $\|\cdot\|_p$ послідовності $((x_{nk}, k \in \mathbb{N}), n \in \mathbb{N}) \in \ell_p^{\mathbb{N}}$ (проілюструйте на прикладах).

Очевидно, $\ell_p \subset \ell_q$ при $p < q$, причому включення строге. Але це не означає, що $\ell_p$ – підпростір $\ell_q$. Справді, позначимо породжену нормою $\|\cdot\|_q$ топологію в множині $\ell_p$ через $\tau_{pq}$. Тоді, очевидно, в $\tau_{pp}$ менше збіжних послідовностей ніж у $\tau_{pq}$, а значить (раз обидві топології метризовні) більше замкнутих множин.

**Приклад 8.3.** Нехай $T$ – довільна непорожня множина. Вважаючи поле $\mathbb{K}$ і розмірність $d$ фіксованими, скорочуємо позначення $\mathrm{B}(T \to \mathbb{K}^d)$ до $\mathrm{B}(T)$. Задана рівністю

$$\|x\| = \sup_{t\in T} |x(t)|$$

норма в $\mathrm{B}(T)$ називається *рівномірною*. Назва пояснюється тим, що збіжність за такою нормою це рівномірна збіжність функцій.

Якщо $T$ топологічний простір, то за теоремою 5.4 і лемою 6.10 $\mathrm{C_b}(T)$ (у повному записі – $\mathrm{C_b}(T \to \mathbb{K}^d)$) підпростір нормованого простору $\mathrm{B}(T)$. Якщо в міркуваннях фігурують тільки неперервні функції, то його розглядають як самостійний простір. Якщо до того ж $T$ зліченно компактний, то: 1) за теоремою 7.9 $\mathrm{C_b}(T) = \mathrm{C}(T)$ і в означенні рівномірної

норми можна замінити sup на max; 2) за наслідком 7.3 простір $\mathrm{C}(T)$ повний. У цьому випадку рівномірну норму називають іще *чебишовською*.

**Приклад 8.4.** Через $\mathrm{C}^m[a,\,b]$ (при $m = 0$ просто $\mathrm{C}[a,\,b]$) позначають простір $m$ разів диференційовних у внутрішніх точках відрізка $[a,\,b]$ $\mathbb{K}^d$-значних ($\mathbb{K}$ і $d$ визначаються контекстом) функцій, похідні яких до $m$-го порядку включно рівномірно неперервні (а значить однозначно продовжуються за неперервністю на $[a,\,b]$). Зокрема, $\mathrm{C}[a,\,b]$ – простір неперервних функцій на $[a,\,b]$ (за теоремою Кантора всі вони рівномірно неперервні). Згідно з синтаксисом попереднього прикладу слід було би писати $\mathrm{C}([a,\,b])$, але зазвичай зовнішні дужки випускають.

Для $\mathrm{C}^m[a,\,b]$ природним узагальненням чебишовської норми є будь-яка з норм, збіжність за якою рівносильна рівномірній збіжності функцій та їхніх похідних до $m$-го порядку включно. Побудуємо деякі з них.

Щоб розрізняти різні норми, позначаємо їх (тільки в цьому прикладі) буквами. Зокрема, чебишовську норму позначимо $\mathfrak{u}$, так що

$$\mathfrak{u}(x) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|.$$

Також позначимо

$$\mathfrak{p}_m(x) = \sum_{i=0}^{m} \mathfrak{u}\left(x^{(i)}\right), \quad \mathfrak{q}_m(x) = \max_{0\leqslant i\leqslant m} \mathfrak{u}\left(x^{(i)}\right)$$

і, вибравши довільне $t_0 \in [a,\,b]$,

$$\mathfrak{n}_m(x) = \max_{0\leqslant i<m} \left|x^{(i)}(t_0)\right| + \mathfrak{u}\left(x^{(m)}\right).$$

Очевидно,

$$\mathfrak{n}_m(x) \leqslant \mathfrak{q}_m(x) \leqslant \mathfrak{p}_m(x) \leqslant (m+1)\mathfrak{q}_m(x). \tag{8}$$

Так само очевидно, що $\mathfrak{p}_m$ і $\mathfrak{q}_m$ норми і що обидві вони задовольняють поставлену вимогу. Про $\mathfrak{n}_m$ поки що можна сказати, що це напівнорма. Щоб показати, що всі три напівнорми задають однакову топологію (так що $\mathfrak{n}_m$ теж норма і теж задовольняє поставлену вимогу), достатньо, з огляду на (8), встановити існування такого додатного числа $C$, що для всіх $x \in \mathrm{C}^m[a,\,b]$ справджується нерівність

$$\mathfrak{q}_m(x) \leqslant C\mathfrak{n}_m(x). \tag{9}$$

Записавши для довільної $k$ разів неперервно диференційовної в околі точки $t_0$ функції $f$ формулу Тейлора

$$f(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(t_0)}{j!}(t-t_0)^j + R_k(t),$$

де $|R_k(t)| \leqslant \frac{|t-t_0|^k}{k!}\mathfrak{u}\left(f^{(k)}\right)$, і поклавши в ній $f = x^{(i)},\ k = m-i \quad (i < m)$, дістанемо

$$\mathfrak{u}\left(x^{(i)}\right) \leqslant \sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{\left|x^{(i+j)}(t_0)\right|(b-a)^j}{j!} + \frac{(b-a)^{m-i}}{(m-i)!}\mathfrak{u}\left(x^{(m)}\right),$$

що разом з очевидною нерівністю

$$\sum_{j=0}^{m-i-1} \frac{\left|x^{(i+j)}(t_0)\right|(b-a)^j}{j!} \leqslant e^{b-a} \max_{0\leqslant k<m} \left|x^{(k)}(t_0)\right|$$

дає (8) із $C = e^{b-a}$.

Множина в напівнормованому просторі називається *лінійно щільною*, якщо її лінійна оболонка щільна в цьому просторі. Пригадавши означення щільної множини в топологічному просторі (п. 5.1) і лему 5.3, можемо переформулювати цю властивість множини $A \subset X$ так: для будь-яких $x \in X$ і $\varepsilon > 0$ існують $n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in A$ і $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ такі, що $\|c_1x_1 + \ldots + c_nx_n - x\| < \varepsilon$.

Нехай $A$ множина в напівнормованому просторі $X$ над полем $\mathbb{K}$ така, що множина

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} c_kx_k,\ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in A,\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\right\}$$

щільна в $X$. Тоді, очевидно, для будь-якої щільної в $\mathbb{K}$ множини $\mathbb{K}_0$ множина

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} c_kx_k,\ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in A,\ c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}_0\right\}$$

також щільна в $X$. Цим з урахуванням сепарабельності полів $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ як метричних просторів (див. п. 5.1) ми довели таке:

**Лема 8.3.** *Якщо в напівнормованому просторі існує злічена лінійно щільна множина, то він сепарабельний.*

8.2. Факторизація напівнормованих просторів. Нехай $X$ – напівнормований простір, а $L$ – лінійна підмножина в ньому. Тоді за наслідком 3.11 $X/L$ векторний простір.

**Лема 8.4.** *Заданий рівністю*

$$\|\xi\| = \inf_{x\in\xi} \|x\| \tag{10}$$

*функціонал $\|\cdot\|$ на $X/L$ – напівнорма.*

◀ Нехай $\xi, \eta \in X/L$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують $x \in \xi$ і $y \in \eta$ такі, що

$$\|x\| < \|\xi\| + \varepsilon/2, \quad \|y\| < \|\eta\| + \varepsilon/2. \tag{11}$$

За означенням додавання в $X/L$ $x + y \in \xi + \eta$, відтак згідно з (10) $\|\xi + \eta\| \leqslant \|x + y\|$, що разом із (1) і (11) дає $\|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\| + \varepsilon$. А це з огляду на довільність $\varepsilon$ означає, що $\|\xi + \eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|$.

Зважаючи на (10) і встановлену вище невід'ємність напівнорми $\|\xi\| \geqslant 0$. Із цієї ж рівності і очевидного співвідношення $0 \in [0]$ маємо $\|[0]\| \leqslant \|0\|$. Отже $\|[0]\| = 0$, що доводить рівність

$$\|\lambda\xi\| = |\lambda| \, \|\xi\| \tag{12}$$

для $\lambda = 0$. Записавши за означенням множення на скаляри в $X/L$ $\lambda\xi = \{\lambda x, x \in \xi\}$, одержимо з (10) при $\lambda \neq 0$

$$\|\lambda\xi\| = \inf_{x/\lambda\in\xi} \|x\| = |\lambda| \inf_{y\in\xi} \|y\|,$$

що разом із (10) доводить (12) для $\lambda \neq 0$. ▶

**Теорема 8.1.** *Нехай $X$ – повний напівнормований простір, а $L$ – лінійна множина в ньому. Тоді напівнормований простір $X/L$ теж повний.*

◀ Нехай $(\xi_n)$ – фундаментальна послідовність в $X/L$. Тоді існує строго зростаюча послідовність ($k_n$ натуральних чисел така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\eta_{n+1} - \eta_n\| < \infty, \tag{13}$$

де $\eta_n = \xi_{k_n}$ (достатньо взяти довільне $k_1$ і для $n = 2, 3\ldots$ покласти $k_n = \min\{k > k_{n-1} : \|\xi_k - \xi_{k_{n-1}}\| < 2^{-n}\}$). За побудовою $(\eta_n)$, наслідком 3.15 і означенням напівнорми в $X/L$ існує послідовність $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ така, що $x_n \in \eta_n$ (рівносильно: $[x_n] = \eta_n$) і $\|x_{n+1} - x_n\| < \|\eta_{n+1} - \eta_n\| + 2^{-n}$. Зважаючи на (13) вона фундаментальна, а значить, раз $X$ повний, збігається до деякого $x \in X$. Залишається зауважити, що за наслідком 3.15 і означенням напівнорми в $X/L$ $\|[x_{n+1}] - [x]\| \leqslant \|x_{n+1} - x\|$. ▶

Позначимо

$$N = \{x \in X : \|x\| = 0\}. \tag{14}$$

Це лінійна множина в $X$. Справді, якщо $\|x\| = 0$, то за властивістю (2) напівнорми для будь-якого $\lambda \in \mathbb{K}$ $\|\lambda x\| = 0$, тобто $\lambda x \in N$; якщо $\|x\| = 0 = \|y\|$, то за властивістю (1) напівнорми $\|x + y\| \leqslant 0$, звідки з огляду на невід'ємність напівнорми маємо $\|x + y\| = 0$, тобто $x + y \in N$.

Записавши на підставі (1) $\|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|$, виводимо з (14) співвідношення

$$x - y \in N \Rightarrow \|x\| = \|y\|.$$

Це означає, що у випадку $L = N$ інфімум у правій частині (10) можна не писати, оскільки значення $\|x\|$ однакове для всіх $x \in \xi$. При цьому згідно з (12) воно дорівнює нулю для $x \in N$. Ми довели таке.

**Теорема 8.2.** *Нехай $X$ – напівнормований простір, а множина $N$ задається рівністю* (14). *Тоді: множина $N$ лінійна; значення $\|x\|$ однакове для всіх представників $x$ кожного класу еквівалентності в $X/N$; заданий рівністю $\|[x]\| = \|x\|$ функціонал $\|\cdot\|$ на $X/N$ є нормою, а нормований простір $X/N$ є метричним зліпком простору $X$.*

Теорему 8.2 формулюють ще так: *ототожнення злиплих точок перетворює напівнормований простір на нормований.*

`8.3. Топологічна характеризація скінченновимірних напівнормованих просторів.` Якщо псевдометрика $\rho$ виражається через напівнорму $\|\cdot\|$ за формулою (3), то рівність (7) конкретизується так:

$$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

Вираз у правій частині часто записують як $\|x - A\|$.

**Лема 8.5.** *Нехай $L$ – лінійна множина у векторному просторі $X$ над полем $\mathbb{K}$, а $\|\cdot\|$ – напівнорма на $X$. Тоді для будь-яких $u, v \in X$, $w \in L$ і $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\|\lambda u - L\| = |\lambda| \|u - L\|, \tag{15}$$

$$\|v - w - L\| = \|v - L\|. \tag{16}$$

◀ При $\lambda = 0$ обидві частини (15) дорівнюють нулю, тому міркуємо для $\lambda \neq 0$. У цьому випадку $\lambda y$ пробігає ту саму лінійну множину, що й $y$, тож $\|\lambda u - L\| = \inf\limits_{y \in L} \|\lambda u - \lambda y\|$, що разом із (2) доводить (15).

Написавши $\|v - w, L| = \inf\limits_{y \in L} \|v - w - y\|$ і врахувавши, що $w + y$ пробігає ту саму множину $L$, що й $y$, одержимо (16). ▶

Ця лема була підготовчим кроком до доведення наступного важливого твердження, значення якого повною мірою розкриється нижче.

**Лема 8.6.** *Нехай $L$ – власний підпростір нормованого простору $X$. Тоді існує вектор $x \in X \setminus L$ такий, що*

$$\|x - L\| = 1, \tag{17}$$

$$\|x\| < 2. \tag{18}$$

◀ Візьмемо довільний вектор $u \in X \setminus L$ і позначимо $a = \|u - L\|$. Оскільки підпростір нормованого простору це, за означенням, замкнута множина, то за лемою 4.6 $L$ містить усі свої пристайні точки. Отже $u$ не пристайна точка, тобто $a > 0$. Позначимо $v = u/a$. За лемою 8.5

$$\|v - L\| = 1, \tag{19}$$

а значить існує вектор $w \in L$ такий, що $\|v - w\| < 2$. Покладемо $x = v - w$. За побудовою цей вектор має властивість (18). Із (19) випливає за лемою 8.5 і властивість (17). ▶

Перш ніж формулювати основний результат цього пункту, відзначимо такий очевидний факт: якщо $A$ – $\varepsilon$-сітка множини $T$ в напівнормованому просторі $X$ над полем $\mathbb{K}$, то для будь-яких $\lambda \in \mathbb{K}$ і $x_0 \in X$ $\quad \lambda A + x_0$ – $|\lambda|\varepsilon$-сітка множини $\lambda T + x_0$. Звідси випливає, що *в напівнормованому просторі або всі кулі цілком обмежені, або немає жодної цілком обмеженої кулі додатного радіуса.*

**Теорема 8.3** (Pic). *Якщо в нормованому просторі кулі цілком обмежені, то він скінченновимірний.*

◀ Нехай для деякого $n \in \mathbb{N}$ у нормованому просторі $X$ вдалось побудувати вектори $x_0, \dots, x_{n-1} \in B_X(0,2)$ такі, що $\|x_k - L\| = 1,\ k = 1, \dots, n-1$, де $L_k$ – натягнутий на $x_0, \dots, x_{k-1}$ підпростір (для $n = 1$ це можливо завжди, крім випадку $X = \{0\}$, коли доводити нічого). Якщо для деякого $n$ $L_n = X$, то простір $X$ скінченновимірний (а саме $n$-вимірний), що і стверджувалось. Якщо ж при всіх $n$ $L_n \neq X$, то, спираючись на лему 8.6, необмежено продовжуємо цей процес і одержуємо множину $\{x_n, n \in \mathbb{Z}_+\} \in B_X(0,2)$ таку, що $\|x_n - x_k\| \geqslant 1$ при $n \neq k$. Для неї в $X$ не існує скінченної $(1/2)$-сітки, що суперечить цілковитій обмеженості кулі $B_X(0,2)$. Таким чином, другий випадок неможливий. ▶

## § 9. Евклідові простори

`9.1. Евклідів простір як напівнормований.` Пригадаймо, що в дійсному евклідовому просторі термін "півторалінійна форма" означає те саме, що "білінійна форма".

**Лема 9.1.** *Нехай $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ – додатна півторалінійна форма на векторному просторі* E *над полем* $\mathbb{K}$. *Тоді заданий рівністю*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x \,|\, x \rangle} \tag{1}$$

*функціонал $\|\cdot\|$ на* E *– напівнорма. Ця напівнорма буде нормою в точності тоді, коли $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ невироджена.*

◀ Із (1) і додатності $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ маємо $\|x\| \in \mathbb{R}_+$. Ця ж рівність разом із властивостями (3.46) і (3.48) довільної півторалінійної форми зумовлює властивість (8.2) функціонала $\|\cdot\|$. Перевіримо (8.1).

Із (1) маємо за властивостями (3.45) і (3.47) довільної півторалінійної форми

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \langle x \,|\, y \rangle + \langle y \,|\, x \rangle + \|y\|^2. \tag{2}$$

Лема 3.31 стверджує, що у випадку $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\langle x \,|\, y \rangle + \langle y \,|\, x \rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle x \,|\, y \rangle$ $(\leqslant 2|\langle x \,|\, y \rangle)$, звідки за лемою 3.33 і з урахуванням (1) маємо $\langle x \,|\, y \rangle + \langle y \,|\, x \rangle \leqslant 2\|x\|\,\|y\|$. Цю ж нерівність стверджує лема 3.34 у випадку $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Таким чином,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2,$$

що доводить (8.1) і тим самим перше твердження. Друге твердження очевидне. ►

Лема 9.1 стверджує, зокрема, що *всякий евклідів простір напівнормований, а всякий строго евклідів простір нормований*. З'ясуємо, чим вирізняються евклідові простори в класі напівнормованих.

Замінивши в (2) $y$ на $-y$ і додавши утворену рівність до (2), одержимо *тотожність паралелограма*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2. \tag{3}$$

**Теорема 9.1 (**Йордан, фон Нойман**).** *Для того щоб напівнорма у векторному просторі породжувалась деякою додатною півторалінійною формою за формулою* (1)*, необхідно і достатньо, щоб вона справджувала тотожність паралелограма.*

◄ Необхідність доведено вище.

Достатність. а) Поле скалярів – $\mathbb{R}$.

Замінивши в (3) $x$ спочатку на $x_1$, а затим на $x_2$, і віднявши другу рівність від першої, дістанемо

$$\|x_1+y\|^2-\|x_2-y\|^2+\|x_1-y\|^2-\|x_2-y\|^2=2\|x_1\|^2-2\|x_2\|^2. \tag{4}$$

Позначимо

$$\varphi(x,y)=\|x+y\|^2-\|x-y\|^2 \tag{5}$$

і покажемо, що $\varphi$ білінійна форма.

За побудовою

$$\varphi(x_1+x_2,y)=\|x_1+y+x_2\|^2+\|x_1+y-x_2\|^2-(\|x_1+y-x_2\|^2+\|x_1-(y-x_2)\|^2),$$

що разом із (3) дає

$$\varphi(x_1+x_2,y)=2\|x_1+y\|^2+2\|x_2\|^2-2\|x_1\|^2-2\|y-x_2\|^2.$$

Звідси $\varphi(x_1+x_2,y)-\varphi(x_1,y)-\varphi(x_2,y)=\|x_1+y\|^2+\|x_1-y\|^2-2\|x_1\|^2-(\|x_2+y\|^2+\|x_2-y\|^2-2\|x_1\|^2)\overset{(3)}{=}\|y\|^2-\|y\|^2$. Отже $\varphi$ адитивна по першому аргументові.

Згідно з (3) $|\,\|x_2\pm y\|^2-\|x_1\pm y\|^2\,|\leqslant\|x_2-x_1\|$, а значить

$$|\,\|x_2\pm y\|^2-\|x_1\pm y\|^2\,|\leqslant(\|x_1\|+\|x_2\|+2\|y\|)\,\|x_2-x_1\|.$$

Цим з огляду на (5) доведено неперервність функції $\varphi(\cdot, y)$. Будучи до того ж адитивною, вона за наслідком 5.24 лінійна над полем $\mathbb{R}$. Оскільки, як видно з (5), $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$, то й $\varphi(x, \cdot)$ лінійна. Отже $\varphi$ – симетрична білінійна форма. Тоді з (5) маємо $\|x\|^2 = \langle x \,|\, x\rangle$, де $\langle x \,|\, y\rangle = \varphi(x, y)/4$.

б) Поле скалярів – $\mathbb{C}$.

Позначимо

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) + i\varphi(x, iy) \tag{6}$$

і покажемо, що $\psi$ півторалінійна форма.

Очевидно, $\psi$ успадковує від $\varphi$ лінійність над $\mathbb{R}$ по першій змінній. Рівність (6) і випливаюча з (2) тотожність

$$\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 = \|x - iy\|^2 - \|x + iy\|^2$$

показують, що

$$\varphi(x, iy) = -\varphi(x, iy), \tag{7}$$

звідки з урахуванням очевидної рівності $\varphi(iv, iy) = \varphi(x, y)$ маємо

$$\varphi(ix, y) + i\varphi(x, iy) = i(\varphi(x, y) + i\varphi(x, iy)),$$

тобто $\psi(ix, y) = i\psi(x, y)$. Залишається показати, що $\psi(y, x) = \overline{\psi(x, y)}$. Для цього напишемо, спираючись на (6), (7) і симетричність $\varphi$,

$$\psi(y, x) = \varphi(x, y) - i\varphi(x, iy)$$

і зауважимо, що $\varphi$ набуває, як видно з (5), тільки дійсних значень.

Так само з (5) маємо

$$\varphi(x, ix) = \|(1 + i)x\|^2 - \|(1 - i)x\|^2 = 0, \quad \varphi(x, x) = 4\|x\|^2,$$

що разом із (6) дає $\|x\|^2 = \langle x \,|\, x\rangle$, де $\langle x \,|\, y\rangle = \psi(x, y)/4$. ▶

**Наслідок 9.1.** *Скалярне множення в евклідовому просторі виражається через породжену ним напівнорму за формулами:*

*а) в дійсному просторі*

$$\langle x \,|\, y\rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}; \tag{8}$$

*б) в комплексному просторі*

$$\mathrm{Re}\langle x \,|\, y\rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}, \tag{9}$$

$$\operatorname{Im}\langle x \,|\, y\rangle = \frac{\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2}{4} = \frac{\|x+iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}. \qquad (10)$$

◀ Першу з рівностей (8) ми встановили в ході доведення теореми 9.1.

Оскільки білінійна форма дійсна, то з (6) маємо $\operatorname{Re}\psi(x,y) = \varphi(x,y)$, $\operatorname{Im}\psi(x,y) = \varphi(x,y)$, що разом із (5) і останньою рівністю в доведенні теореми дає перші половини формул (9) і (10). Друга рівність у всіх трьох формулах є не що інше, як тотожність паралелограма. ▶

**Лема 9.2.** *Нехай $x$ і $M$ – вектор і лінійна множина вевклідовому просторі, а $(y_n)$ – послідовність в $M$ така, що $\|x-y_n\| \to \|x-M\|$. Тоді для будь-якої обмеженої послідовності $(u_n) \in M^{\mathbb{N}}$*

$$\langle x - y_n \,|\, u_n\rangle \to 0. \qquad (11)$$

◀ Доводимо для випадку $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ міркування аналогічні і простіші).

Якщо $\|u_n\| = 0$, то за нерівністю Шварца $\langle x - y_n \,|\, u_n\rangle = 0$, тож розглядаємо випадок, коли $\|u_n\| > 0$ для зрештою всіх $n$. Позначимо $u'_n = u_n/\|u_n\|$ (так що $\|u'_n\| = 1$). З огляду на обмеженість $(u_n)$ достатньо показати, що $\langle x - y_n \,|\, u'_n\rangle \to 0$. Тому вважаємо, не зменшуючи загальність, що $\|u_n\| = 1$.

Позначимо $x_n = x - y_n$. Оскільки $y_n \in M$, то для всякого $v \in M$ $v + u_n$ також належить $M$, а значить $\|x - (y_n + v)\| \geqslant \|x - M\|$. При цьому за умовою $\|x_n\| \to \|x - M\|$. Отже для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\underline{\lim}(\|x_n \pm \varepsilon u_n\|^2 - \|x_n\|^2) > 0,\ \underline{\lim}(\|x_n \pm i\varepsilon u_n\|^2 - \|x_n\|^2) > 0.$$

А це з огляду на (9), (10) і рівність $\|u_n\| = 1$ те саме, що

$$2\,\underline{\lim}(\pm \operatorname{Re}\langle x_n \,|\, u_n\rangle) + \varepsilon \geqslant 0,\ 2\,\underline{\lim}(\pm \operatorname{Im}\langle x_n \,|\, u_n\rangle) + \varepsilon \geqslant 0,$$

тобто

$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{\lim} \operatorname{Re}\langle x_n \,|\, u_n\rangle \leqslant \overline{\lim} \operatorname{Re}\langle x_n \,|\, u_n\rangle \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$
$$-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{\lim} \operatorname{Im}\langle x_n \,|\, u_n\rangle \leqslant \overline{\lim} \operatorname{Im}\langle x_n \,|\, u_n\rangle \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зважаючи на довільність $\varepsilon$ ці нерівності зумовлюють (11). ▶

**Наслідок 9.2.** *За умов леми 9.2 послідовність $(y_n)$ фундаментальна.*

◀ Треба показати, що для будь-якої послідовності $(k_n)$ натуральних чисел $w_n \equiv y_{n+k_n} - y_n \to 0$.

Послідовність $(\|x - y_n\|)$, будучи збіжною, обмежена, що разом із (1) зумовлює обмеженість $(\|y_n\|)$, відтак і $(\|w_n\|)$. Тоді за лемою 9.2 $\langle x_n \,|\, w_n\rangle \to 0$, $\langle x_{n+k_n} \,|\, w_n\rangle \to 0$, а значить і $\langle x_n - x_{n+k_n} \,|\, w_n\rangle \to 0$. Але $x_n - x_{n-k_n} = w_n$. ▶

**Лема 9.3.** *Нехай $x$ і $M$ – вектор і лінійна множина вевклідовому просторі, а $(y_n)$ і $y$ – послідовність і вектор в $M$ такі, що $\|x - y_n\| \to \|x - M\| = \|x - y\|$. Тоді $\|y_n - y\| \to 0$.*

◀ Із тотожності $x - y = x_n + y_n - y$ маємо за вибором $y$

$$\|x - M\|^2 = \|x_n\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x_n \,|\, y_n - y\rangle + \|y_n - y\|^2.$$

За умовою $\|x_n\| \to \|x - M\|$. Як показано в доведенні наслідку 9.2, послідовність $(y_n)$ обмежена, тож за лемою 9.2 $\langle x_n \,|\, y_n - y\rangle \to 0$. ▶

`9.2. Ортогональні доповнення і проекції.` Для векторів $x, y$ в евклідовому просторі запис $x \perp y$ означає, що $\langle x \,|\, y\rangle = 0$. Такі вектори називаються *ортогональними*. Для множини $A$ в евклідовому просторі E позначимо

$$A^\perp = \{y \in \mathrm{E} :\ \forall\, x \in A \quad x \perp y\}. \tag{12}$$

Множина $A^\perp$ називається *ортогональним доповненням* $A$. Якщо $A_1 \subset A_2^\perp$ і $A_2 \subset A_1^\perp$, то говорять, що *множини $A_1$ і $A_2$ ортогональні* і записують це так: $A_1 \perp A_2$.

У наступній лемі зібрано випливаючі безпосередньо з (12) властивості операції $^\perp$.

**Лема 9.4.** *(i) Якщо $A_1 \subset A_2$, то $A_2^\perp \subset A_1^\perp$. (ii) $A \subset A^{\perp\perp}$. (iii) Ортогональне доповнення довільної множини замкнуте. (iv) $\overline{A}^\perp = A^\perp$.*

Скінченна або зліченна послідовність в евклідовому просторі називається *ортонормованою*, якщо її члени попарно ортогональні і норма кожного дорівнює одиниці (використовуючи символ Кронекера, можемо ці дві властивості послідовності $(h_n)$ виразити одною рівністю $\langle h_n \,|\, h_k\rangle = \delta_{nk}$).

Далі до кінця параграфа E евклідів простір, а $M$ – лінійна множина в ньому.

*Проекцією* вектора $x \in \mathrm{E}$ на $M$ називається вектор $y \in M$ такий, що $x - y \in M^{\perp}$.

**Лема 9.5.** *Якщо $y_1$ і $y_2$ – проекції $x$ на $M$, то $\|y_1 - y_2\| = 0$.*

◀ Позначимо $y = y_1 - y_2$. З одного боку, $y \in M$, а з іншого $y = x - y_2 - (x - y_1) \in M^{\perp}$, так що $\langle y \,|\, y\rangle = 0$. ▶

Лема 9.5 стверджує, що проекція $x$ на $M$, якщо вона існує, єдина з точністю до нерозрізненності, зокрема в строго евклідовому просторі буквально єдина. Наступна лема стверджує існування проекції на скінченновимірний підпростір і дає явний вираз її.

**Лема 9.6.** *Нехай $(e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормована послідовність в* E. *Тоді для довільного $x \in \mathrm{E}$ однією з проекцій $x$ на породжений цією послідовністю підпростір $L$ є вектор $y \equiv \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x \,|\, e_k\rangle e_k$.*

◀ За побудовою $y \in L$ і $\langle y \,|\, e_j\rangle = \langle x \,|\, e_j\rangle$, $j = 1, \ldots, n$, так що $x - y \in L$. ▶

**Лема 9.7.** *Нехай $y$ – проекція $x$ $M$. Тоді для всякого $u \in M$* $\|x-u\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - u\|^2$.

◀ Оскільки $y - u \in M$, то $x - y \perp y - u$. ▶

**Наслідок 9.3** (з лем 9.6 і 9.7)**.** *Нехай $(e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормована послідовність в* E. *Тоді для довільного $x \in \mathrm{E}$ справджується* тотожність Бесселя

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x \,|\, e_k\rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x \,|\, e_k\rangle|^2.$$

**Наслідок 9.4.** *Нехай $(h_n)$ – ортонормована послідовність в* E. *Тоді для всякого $x \in \mathrm{E}$ справджується* нерівність Бесселя

$$\sum |\langle x \,|\, h_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

◀ Для скінченної послідовності це випливає з тотожності Бесселя, тому міркуємо для випадку, коли $n$ пробігає деяку зліченну множину $S$.

Візьмемо довільну зростаючу послідовність $(S_m, m \in \mathbb{N})$ скінченних множин таку, що $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_m = S$. Тоді для всякої послідовності $(b_n, n \in S)$

невід'ємних чисел

$$\sum_{n\in S} b_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{k\in S_m} b_k.$$

При цьому за вже доведеним $\sum\limits_{k\in S_m} |\langle x \,|\, h_k\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$. ►

**Теорема 9.2.** *Для того щоб вектор $y \in M$ був проекцією вектора $x$ на $M$, необхідно і достатньо, щоб $\|x - y\| = \|x - M\|$.*

◄ Необхідність. За лемою 9.7 для будь-якого $u \in M \quad \|x-u\| \geqslant \|x-y\|$.

Достатність. Візьмемо довільну послідовність $(y_n) \in M^{\mathbb{N}}$ таку, що $\|x - y_n\| \to \|x - M\|$. За лемою 9.2 для будь-якого $u \in M \quad \langle x - y_n \,|\, u\rangle \to 0$, а за лемою 9.3 $y_n \to y$. Отже для всякого $u \in M \quad \langle x-y \,|\, u\rangle = 0$. ►

**Наслідок 9.5** (із теореми 9.2 і леми 9.6)**.** *Нехай $(e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормована послідовність в* E. *Тоді для всякого $x \in$ E*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x \,|\, e_k\rangle e_k \right\| = \min_{c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{K}} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|.$$

Повний строго евклідів простір називається *гільбертовим*. Це одне з найважливіших понять функціонального аналізу.

**Теорема 9.3** (Беппо Леві)**.** *Нехай $L$ – підпростір гільбертового простору* H. *Тоді всякий вектор $x \in$ H єдиним чином зображується у вигляді $x = y + z$, де $y \in L, z \in L^{\perp}$.*

◄ Візьмемо довільну послідовність $(y_n) \in L^{\mathbb{N}}$ таку, що $\|x - y_n\| \to \|x - L\|$. За наслідком 9.2 вона фундаментальна, відтак з огляду на повноту H збігається до деякого $y \in$ H. Оскільки підпростір нормованого простору це, за означенням, замкнута множина, то $y \in L$. При цьому за побудовою $\|x-y\| = \|x-L\|$, тож за теоремою 9.2 $z \equiv x - y \in L^{\perp}$. Лема 9.5 стверджує єдиність подання $x$ як суми векторів із $L$ і $L^{\perp}$. ►

Доведену теорему часто називають **теоремою про проекцію** і формулюють так:

*Нехай $L$ – підпростір гільбертового простору* H. *Тоді для всякого вектора $x \in$ H проекція $x$ на $L$ існує і єдина.* Нею є, у використаних вище позначеннях, вектор $y$.

Зауважимо, що теорема стосується обох варіантів поля скалярів.

Існування і єдиність проекції $x$ на $L$ дозволяють розглядати її як результат дії на $x$ деякого оператора, який позначимо $\mathrm{Pr}_L$ (так що $y = \mathrm{Pr}_L\, x$).

**Наслідок 9.6.** *Нехай $L$ – підпростір гільбертового простору* H. *Тоді для всякого $x \in$ H*

$$\|x - L\|^2 + \|x - L^\perp\|^2 = \|x\|^2.$$

◀ Оскільки в теоремі 9.3 $y \perp z$, то $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$. За побудовою вектора $y$ у доведенні теореми $\|z\| = \|x - L\|$. Позначимо $K = L^\perp$. За лемою 9.4 $L \subset K^\perp$, тож $y \in K^\perp$, що разом із рівністю $y = x - z$, у якій за теоремою 9.3 $z \in K$, означає, що $z = \mathrm{Pr}_K\, x$. Тоді за теоремою 9.2 $\|y\| = \|x - K\|$. ▶

**Наслідок 9.7.** *Нехай $M$ – лінійна множина в гільбертовому просторі. Тоді $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.*

◀ Застосувавши наслідок 9.6 до $L = \overline{M}$ і $L = M^\perp$, дістанемо з урахуванням твердження (iv) леми 9.4

$$\|x - \overline{M}\|^2 + \|x - M^\perp\|^2 = \|x\|^2 = \|x - M^\perp\|^2 + \|x - M^{\perp\perp}\|^2,$$

звідки $\|x - \overline{M}\| = \|x - M^{\perp\perp}\|$. Це разом із замкнутістю множин $\overline{M}$ і, за лемою 9.4, $M^{\perp\perp}$ зумовлює згідно з наслідком 4.3 рівносильність співвідношень $x \in \overline{M}$ і $x \in M^{\perp\perp}$. ▶

`9.3. Ортогональні розклади в евклідових просторах.` У цьому пункті, як і в наслідку 9.4 вище, під послідовністю, скажімо $(x_n)$, розуміємо відображення $n \mapsto x_n$ із деякої скінченної або зліченної множини $S$ значень змінної $n$ у множину, з якої вибираються члени послідовності. Відсутність апріорі заданого порядку в $S$ змушує нас дещо змінити поняття збіжного ряду в напівнормованому, зокрема евклідовому просторі. А саме, говоримо, що *ряд* $\sum\limits_{n\in S} x_n$ *збігається до* $x$, якщо для будь-якої зростаючої послідовності $(S_n, n \in \mathbb{N})$ скінченних множин такої, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n = S$, справджується співвідношення $\left\| \sum\limits_{k\in S_n} x_k - x \right\| \to 0$.

**Лема 9.8.** *Нехай $(h_n, n \in S)$ – нескінченна ортонормована послідовність в евклідовому просторі надполем $\mathbb{K}$, а $(c_n, n \in S)$ – послідовність у $\mathbb{K}$. Тоді умова*

$$\sum |c_n|^2 < \infty \tag{13}$$

*необхідна, а якщо простір повний, то й достатня для збіжності ряду $\sum c_n h_n$. Якщо він збігається, то*

$$\left\| \sum c_n h_n \right\|^2 = \sum |c_n|^2 \tag{14}$$

*і сума ряду не залежить, із точністю до нерозрізненості, від нумерації членів, тобто для будь-якої бієкції $\varphi : \ S \to S$*

$$\left\| \sum c_{\varphi(n)} h_{\varphi(n)} - \sum c_n h_n \right\| = 0.$$

◀ З ортонормованості $(h_n)$ маємо для довільної скінченної множини $J \subset S$

$$\left\| \sum_{k \in J} c_k h_k \right\|^2 = \sum_{k \in J} |c_k|^2.$$

Тому для будь-якої зростаючої послідовності $(S_n)$ скінченних підмножин множини $S$ фундаментальність послідовності $\left( \sum\limits_{k \in S_n} c_k h_k, n \in \mathbb{N} \right)$ рівносильна фундаментальності $\left( \sum\limits_{k \in S_n} |c_k|^2, n \in \mathbb{N} \right)$, що доводить перше твердження.

Нехай $x$ – якась із сум ряду $\sum\limits_{n \in S} c_n h_n$. Візьмемо довільну зростаючу послідовність $(S_n, n \in \mathbb{N})$ скінченних множин таку, що $\bigcup S_n = S$, і позначимо $u_n = \sum\limits_{k \in S_n} c_k h_k$, так що $\|u_n - x\| \to 0$, а значить і $\|u_n\|^2 \to \|x\|^2$. Зважаючи на ортонормованість $(h_n)$ і скінченність $S_n \quad \|u_n\|^2 = \sum\limits_{k \in S_n} |c_k|^2$, що доводить рівність (14).

Нехай $\varphi$ – бієкція $S$ на себе. Позначимо

$$T_n = \varphi(S_n), v_n = \sum_{k \in S_n} c_{\varphi(k)} h_{\varphi(k)} \equiv \sum_{k \in T_n} c_k h_k.$$

За другим твердженням леми

$$\|x - v_n\|^2 = \sum_{k \in S \setminus T_n} |c_k|^2, \tag{15}$$

а за першим справджується нерівність (13). За побудовою послідовність $(T_n)$ зростає і $\cup T_n = S$, що разом із (15) і (13) зумовлює співвідношення $v_n \to x$. ►

**Теорема 9.4.** *Нехай $(h_n)$ – нескінченна ортонормована послідовність в евклідовому просторі, а $x$ – елемент цього простору. Тоді необхідною і достатньою умовою збіжності ряду $\sum\langle x \mid h_n\rangle h_n$ до $x$ є* рівність Парсеваля – Ляпунова

$$\sum |\langle x \mid h_n\rangle|^2 = \|x\|^2. \tag{16}$$

◄ Візьмемо довільну зростаючу послідовність $(S_m, m \in \mathbb{N})$ скінченних множин, об'єднання яких дає множину значень $n$, і позначимо $y_m = \sum\limits_{k\in S_m} \langle x \mid h_k\rangle h_k$. За наслідком 9.3

$$\|x - y_m\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k\in S_m} |\langle x \mid h_k\rangle|^2,$$

тож співвідношення $y_m \to x$ і $\sum\limits_{k\in S_m} |\langle x \mid h_k\rangle|^2 \to \|x\|^2$ рівносильні. ►

Ортонормована послідовність $(h_n)$ в евклідовому просторі E називається *ортонормованим базисом* або *ортобазисом*, якщо для будь-якого $x \in$ E ряд $\sum\langle x \mid h_n\rangle h_n$ збігається до $x$ (у строго евклідовому просторі це можна записати так: $\sum\langle x \mid h_n\rangle h_n = x$). Оскільки лінійна множина в евклідовому просторі сама є евклідовим простором, то можна говорити про ортобазис і в ній.

**Теорема 9.5.** *Усяка лінійно щільна ортонормована послідовність в евклідовому просторі є ортобазисом у ньому.*

◄ Для скінченної послідовності твердження очевидне.

Нехай $(h_n, n \in S)$ – нескінченна лінійно щільна ортонормована послідовність в E. Тоді за означенням лінійно щільної множини (п. 8.1) для будь-якого $x \in$ E існують послідовність $(S_m, m \in \mathbb{N})$ скінченних підмножин множини $S$ і послідовність $(c_{m_k}, m \in \mathbb{N}, k \in S_m)$ у $\mathbb{K}$ такі, що

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{k\in S_m} c_{mk} h_k - x \right\| = 0.$$

З ортонормованості $(h_n)$ маємо за наслідком 9.5

$$\left\| \sum_{k\in S_m} \langle x \,|\, h_k\rangle h_k - x \right\| \leqslant \left\| \sum_{k\in S_m} c_{mk} h_k - x \right\|.$$

Це разом із попереднім співвідношенням показує, що ряд $\sum\langle x \,|\, h_n\rangle x$ збігається до $x$. ►

**Наслідок 9.8.** *Ортобазис у лінійній підмножині $M$ евклідового простору є ортобазисом і в $\overline{M}$.*

◄ Очевидно, всяка лінійно щільна в $M$ послідовність залишається такою і в $\overline{M}$. ►

**Наслідок 9.9.** *Нехай $T$ – довільна скінченна або зліченна множина, а $M_t, t \in T$, – попарно ортогональні лінійні множини в деякому евклідовому просторі, і нехай при кожному $t$ $\quad (h_{tn}, n \in S_t)$ – ортобазис в $M_t$. Тоді $(h_{tn}, n \in S_t, t \in T)$ – ортобазис у замиканні лінійної оболонки множини $\bigcup\limits_{t\in T} M_t$.*

◄ Послідовність $(h_{tn}, n \in S_t, t \in T)$ ортонормована і, очевидно, лінійно щільна в лінійній оболонці множини $\cup M_t$. ►

`9.4. Ізоморфність сепарабельних гільбертових просторів над однаковим полем.` Нехай $\mathrm{E}_1$ і $\mathrm{E}_2$ – евклідові простори. Зберігаючий відстані лінійний оператор з $\mathrm{E}_1$ в $\mathrm{E}_2$ називається *ізометричним*, а якщо він до того ж сюр'єктивний, то *унітарним*. Якщо простори $\mathrm{E}_1$ і $\mathrm{E}_2$ строго евклідові, то унітарний оператор називають іще *ізоморфізмом*. Слід, однак, мати на увазі, що це не ізоморфізм алгебр, оскільки відмінний від поля скалярів евклідів простір не є алгеброю ($\langle x \,|\, y\rangle \notin \mathrm{E}$, крім випадку $\mathrm{E} = \mathbb{K}$).

Рівності (8) (для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) і (9), (10) (для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) показують, що ізометричний оператор $U$ зберігає і скалярні добутки:

$$\langle Ux \,|\, Uy\rangle_2 = \langle x \,|\, y\rangle_1 \tag{17}$$

(нижній індекс вказує, в якому просторі виконується скалярне множення). У свою чергу властивість (17) у поєднанні з сюр'єктивністю зумовлює лінійність $U$ (доведіть). Таким чином, унітарний оператор можна

рівносильно означити як зберігаючий скалярні добутки сюр'єктивний оператор.

**Лема 9.9.** *У сепарабельному евклідовому просторі існує ортобазис.*

◀ Візьмемо в E щільну (і тим більше лінійно щільну) множину і занумеруємо її елементи натуральними числами. З утвореної таким чином послідовності викинемо всі ті члени, які лінійно залежать від попередніх, що, очевидно, не порушить лінійної щільності. Отже в E існує лінійно щільна послідовність $(e_n, n \in \mathbb{N})$ лінійно незалежних векторів. Покладаємо $g_1 = e_1, g_n = e_n - \Pr_{L_{n-1}} e_n$, де $L_k$ – натянутий на $e_1, \ldots, e_k$ (рівносильно: на $g_1, \ldots, g_k$) підпростір. За побудовою послідовність $(g_n)$ успадковує від $(e_n)$ лінійну щільність, а члени її попарно ортогональні і відрізненні від нуля. Тоді за теоремою 9.5 $(g_n/\|g_n\|)$ – ортобазис в E. ▶

**Теорема 9.6 (**Ріс, Фішер**).** *Нехай $(h_n, n \in \mathbb{N})$ – ортобазис у гільбертовому просторі $H$ над полем $\mathbb{K}$. Тоді для будь-якої послідовності $(c_n, n \in \mathbb{N}) \in \ell_2(\mathbb{K})$ існує єдиний вектор $x \in H$ такий, що $c_n = \langle x \,|\, h_n \rangle, n \in \mathbb{N}$.*

◀ Позначимо $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k h_k$. З ортонормованості $(h_n)$ маємо

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |c_k|^2.$$

При цьому за вибором $(c_n)$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|^2 = 0.$$

Отже послідовність $(x_n)$ фундаментальна, відтак, зважаючи на повноту $H$, збігається до деякого $x \in H$. Тоді для кожного $m$

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n \,|\, h_m \rangle = \langle x \,|\, h_m \rangle.$$

Але $\langle x \,|\, h_m \rangle = c_m$ при $n \geqslant m$. Залишається довести єдиність $x$.

Якщо $\langle x' \,|\, h_n \rangle = \langle x'' \,|\, h_n \rangle, n \in \mathbb{N}$, то за припущенням про $(h_n)$ і теоремою 9.4 $\|x' - x''\| = 0$. А це означає, оскільки гільбертів простір за означенням строго евклідів, що $x' = x''$. ▶

**Теорема 9.7** (фон Нойман)**.** *Усі сепарабельні гільбертові простори над полем* $\mathbb{K}$ *ізоморфні просторові* $\ell_2(\mathbb{K})$ *і, таким чином, один одному.*

◀ Нехай $H$ – сепарабельний гільбертів простір над полем $\mathbb{K}$. Візьмемо в $H$ існуючий за лемою 9.9 ортобазис $(h_n, n \in \mathbb{N})$ і задамо оператор $U : H \to \ell_2(\mathbb{K})$ рівністю $Ux = (\langle x \,|\, h_n \rangle, n \in \mathbb{N})$. Очевидно, він лінійний. Переписавши рівність Парсеваля – Ляпунова у вигляді $\|Ux\|^2_{\ell_2} = \|x\|^2$, бачимо, що $U$ зберігає відстані. Теорема Ріса – Фішера стверджує сюр'єктивність $U$. Отже це ізоморфізм. ▶

# Глава 4. Елементи теорії інтеграла

## § 10. Міра, інтеграл і зв'язок між ними

10.1. Міра. Пригадаймо, що згідно з теоремою Стоуна (п. 3.6) усяка булева ґратка є булевим кільцем і навпаки. Відповідність між операціями ґратки і кільця дається формулами (3.27), (3.28) і (3.31), які відтворимо тут, змінивши позначення аргументів:

$$A \wedge B = AB, \quad A \vee B = A + B + AB, \quad A + B = (A \vee B) \ominus (A \wedge B).$$

Відображення $\nu$ булевого кільця в адитивну напівгрупу, визначене не обов'язково на всій області відправлення, назвемо *булево адитивним*, якщо для будь-яких $A, B \in \operatorname{dom}\nu$ таких, що $A \vee B \in \operatorname{dom}\nu$ і (увага!) $A \cap B = \mathbf{0}$, справджується рівність

$$\nu(A \vee B) = \nu(A) + \nu(B).$$

У літературі цю властивість називають, допускаючи вільність мови, просто адитивністю. Але в нашому викладі не меншу роль відіграватимуть і справжні адитивні відображення, тож традиційна термінологія могла би заплутати читача. Певним (і єдиним) виправданням її є той факт, що для диз'юнктних елементів кільця $A \vee B = A + B$.

**Приклад 10.1.** При фіксованому $x \in X$ індикатор $\chi_A(x)$ – булево адитивна функція від $A \subset X$.

**Лема 10.1.** *Нехай $\nu$ – булево адитивне відображення булевого кільця $\mathcal{R}$ в адитивну напівгрупу, визначене на всьому $\mathcal{R}$. Тоді для будь-яких $A, B \in \mathcal{R}$*

$$\nu(A) + \nu(B \ominus A) = \nu(A \vee B),$$
$$\nu(A \wedge B) + \nu(B \ominus A) = \nu(B).$$

◀ За означенням операції $\ominus$ (п. 2.3)

$$A \wedge (B \ominus A) = 0, \quad A \vee (B \ominus A) = A \vee B,$$

звідки за умовою булевої адитивності $\nu$ випливає перша із стверджуваних рівностей. Замінивши в ній $A$ на $A \wedge B$, одержимо з урахуванням леми 2.17 другу рівність. ▶

Позначимо $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Поклавши $a + \infty = \infty + a + \infty$, перетворимо $\overline{\mathbb{R}}_+$ на адитивну напівгрупу. Крім того, це $\sigma$-ґратка відносно природного порядку (тоді як $\overline{\mathbb{R}}_+$ тільки $\delta$-ґратка).

Із леми 10.1 очевидним чином виводимо

**Наслідок 10.1.** Булево адитивна $\overline{\mathbb{R}}_+$-значна функція на булевому кільці ізотонна.

Звідси, у свою чергу, з очевидністю випливає

**Наслідок 10.2.** Нехай $\mu$ – $\overline{\mathbb{R}}_+$-значна булево адитивна функція на булевому кільці $\mathcal{R}$. Тоді для будь-яких $D, D_1, D_2, \ldots \in \mathcal{R}$ таких, що $D_1 \prec D, D_2 \prec D \ldots$ і $D_k \wedge D_n = \mathbf{0}$ при $k \neq n$, справджується нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) \leqslant \mu(D).$$

Нехай $\mathcal{R}$ – булеве кільце, $\varnothing \neq \mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$, а $T$ – одна з множин $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_+$. Відображення $\mu : \mathcal{R}_0 \to T$ (або, що те саме, $T$-значна функція $\mu$ на $\mathcal{R}_0$) називається:

• *неперервним зверху в нулі*, якщо для всякої послідовності $(A_n) \in \mathcal{R}_0^{\mathbb{N}}$ такої, що $A_n \searrow \mathbf{0}$ і $\mu(A_1) < \infty$ (друга умова нетривіальна тільки у випадку $T = \overline{\mathbb{R}}_+$), послідовність $(\mu(A_n))$ прямує до нуля;

• *булево зліченно адитивним*, якщо для всякої послідовності $(B_n, n \in \mathbb{N})$ попарно диз'юнктних елементів $\mathcal{R}_0$ такої, що $\vee B_n \in \mathcal{R}_0$, справджується рівність $\mu(\vee B_n) = \sum \mu(B_n)$.

Оскільки $\vee B_n$ не залежить від нумерації членів послідовності, то ряд у правій частині останньої рівності збігається абсолютно.

Булево зліченно адитивна $T$-значна функція на булевому кільці називається: *мірою*, якщо $t + \overline{\mathbb{R}}_+$; *скінченною мірою*, якщо $T = \mathbb{R}_+$; *знакозмінною мірою*, якщо $T = \mathbb{R}$. Остання назва не зовсім вдала, бо знакозмінна міра може бути знакосталою функцією. Вживають також термін *заряд*. Однак автор цього напрочуд вдалого терміна, О.Д. Александров, вкладав у нього дещо інакший смисл.

Далі розглядаємо булеві кільця підмножин фіксованої множини (коротко: кільця множин). У таких булевих кільцях у ролі $\prec, \vee, \wedge, \ominus, \oplus$ і $\mathbf{0}$ виступають відповідно $\subset, \cup, \cap, \setminus, \triangle$ і $\varnothing$ (однак термін "неперервність зверху в нулі" традиційно зберігається), а диз'юнктність означає непересетинність. Отже, кільце множин це непорожня сукупність підмножин

деякої множини, яка (сукупність) разом з усякими двома множинами $A, B$ містить $A \cup B$ і $A \setminus B$. Рівності

$$\varnothing = A \setminus A, \quad A \cap B = A \cup B \setminus (A \setminus B) \setminus (B \setminus A)$$

показують, що кільце множин містить порожню множину (як елемент) і перетин усяких двох своїх елементів.

Заміна абстрактних булевих кілець кільцями множин надає поняттям і твердженням геометричну наочність, однак не є необхідною для побудови теорії міри. Усі викладені нижче факти можна переформулювати і довести для функцій на абстрактних булевих кільцях – але ціною невиправданих у навчальному курсі технічних ускладнень.

**Лема 10.2.** *Неперервна зверху в нулі булево адитивна $\mathbb{R}$-значна функція на кільці множин булево зліченно адитивна.*

◀ Позначимо функцію і кільце через $\mu$ і $\mathcal{R}$відповідно. Нехай $(B_n, n \in \mathbb{N})$ – послідовність попарно неперетинних множин із $\mathcal{R}$ така, що $B \equiv \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R}$. Позначимо

$$A_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k \equiv B \setminus \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

За лемою 10.1

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) + \mu(A_n) = \mu(B),$$

а внаслідок попарної неперетинності множин $B_k$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k),$$

тож залишається показати, що $A_n \searrow \varnothing$.

За побудовою $A_n$ міститься в $B$ і не перетинається з $B_n$, так що $\cap A_n \subset B \setminus \cup B_n$ $(= \varnothing)$. При цьому послідовність $(A_n)$ за побудовою спадає. ▶

**Лема 10.3.** *Булево зліченно адитивна $\mathbb{R}$-значна або $\overline{\mathbb{R}}_+$-значна функція на кільці множин неперервна зверху в нулі.*

◄ Нехай $(A_n)$ – послідовність в $\mathcal{R}$ така, що $A_n \searrow \emptyset$ і $\mu(A_1) < \infty$. Позначимо $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, так що

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_1 \setminus A_{n+1}. \tag{1}$$

За побудовою

$$B_i \cap B_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, \tag{2}$$

що разом із (1) дає з урахуванням булевої адитивності $\mu$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \mu(A_1 \setminus A_{n+1}).$$

Тоді за лемою 10.1 і умовою спадання $(A_n)$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) + \mu(A_{n+1}) = \mu(A_1). \tag{3}$$

Із (1) і припущення $\cap A_n = \emptyset$ маємо $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = A_1$, звідки з урахуванням (2) і булевої зліченної адитивності $\mu$ одержуємо

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \mu(A_1).$$

Порівнявши це з (3), де за умовою $\mu(A_1) < \infty$, бачимо, що $\mu(A_{n+1}) \to 0$. ►

Важливу роль у теорії міри відіграють, поряд із кільцями, і загальніші системи множин. Сукупність $\mathfrak{Q}$ підмножин деякої множини називається *напівкільцем*, якщо вона має властивості:

(i) $\emptyset \in \mathfrak{Q}$; (ii) для будь-яких $A \in \mathfrak{Q}$ і $B \in \mathfrak{Q}$ $A \cap B \in \mathfrak{Q}$; (iii) для всяких $A_1 \in \mathfrak{Q}$ і $A_2 \in \mathfrak{Q}$ множина $A_1 \setminus A_2$ є об'єднанням скінченного числа попарно неперетинних елементів $\mathfrak{Q}$.

Очевидно, всяке кільце множин є й напівкільцем. А ось змістовний приклад.

**Приклад 10.2.** Сукупність відрізків усіх чотирьох видів, або тільки виду $]a, b]$, або тільки виду $[a, b[$ утворюють напівкільце в $\mathbb{R}$.

Тотожності

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \cap \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} A_i \cap B_j,$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n} (A_i \setminus B_j),$$

$$\bigcap_{j=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{p_j} C_{jk} = \bigcup_{j=1}^{n}\bigcup_{k_j=1}^{p_j} C_{1k_1} \cap \ldots \cap C_{mk_m}$$

приводять до такого висновку.

**Лема 10.4.** *Нехай $\mathfrak{Q}$ – напівкільце множин. Тоді сукупість усеможливих скінченних об'єднань елементів $\mathfrak{Q}$ утворює кільце.*

Про задане формулюванням леми кільце говорять, що воно *породжується напівкільцем* $\mathfrak{Q}$. Породжене кільце можна означити й описово, як найменше з кілець, що містять $\mathfrak{Q}$.

**Лема 10.5.** *Нехай $\mathfrak{Q}$ – напівкільце множин. Тоді для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $A_1 \in \mathfrak{Q}, \ldots, A_n \in \mathfrak{Q}$ існують $l \in \mathbb{N}$ і попарно неперетинні множини $B_1 \in \mathfrak{Q}, \ldots, B_l \in \mathfrak{Q}$ такі, що*

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_l. \tag{4}$$

◀ Нехай $A_1 \in \mathfrak{Q}, A_2 \in \mathfrak{Q}$. Позначивши $B_1 = A_1 \cap A_2$ і взявши існуючі за означенням напівкільця попарно неперетинні множини $B_2, \ldots, B_l \in \mathfrak{Q}$ такі, що $A_1 \setminus A_2 = B_2 \cup \ldots \cup B_l$, одержимо (4) для $n = 2$. Далі міркуємо за індукцією.

Нехай $n > 2$. Позначимо $A'_1 = A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1},\ A'_2 = A_n$. За припущенням індукції існують натуральне число $k$ і попарно неперетинні множини $C_1, \ldots, C_k \in \mathfrak{Q}$ такі, що $A'_1 = C_1 \cup \ldots \cup C_k$. Тоді

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = D_1 \cup \ldots \cup D_{2k}, \tag{5}$$

де $D_1 = C_1 \cap A_1, \ldots, D_k = C_k \cap A_1,\ D_{k+1} = C_1 \setminus A_1, \ldots, D_{2k} = C_k \setminus A_1$. За побудовою ці $2k$ множин попарно не перетинаються. За вибором $C_1, \ldots, C_k$ і означенням напівкільця множини $D_1, \ldots, D_k$ належать $\mathfrak{Q}$, а кожна з множин $D_{k+1}, \ldots, D_{2k}$ є об'єднанням скінченного числа попарно неперетинних множин з $\mathfrak{Q}$, так що й права частина рівності (5) має таку ж будову. ▶

**Лема 10.6.** *Нехай $\mathfrak{Q}_i$ – напівкільце підмножин множини $X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тоді сукупність $\mathfrak{Q}$ усеможливих декартових добутків $A_1 \times \ldots \times A_n$, де $A_i \in \mathfrak{Q}_i$, – напівкільце в $X_1 \times \ldots \times X_n$.*

◀ Тотожність

$$(A_1 \times \ldots \times A_n) \cap (B_1 \times \ldots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \ldots \times (A_n \cap B_n)$$

із прикладу 1.2 показує, що $\mathfrak{Q}$ містить перетин усяких двох своїх елементів.

Тотожність

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = (A_1 \setminus B_1) \times A_2 \cup A_1 \times (A_2 \setminus B_2) \cup (A_1 \setminus B_1) \times (A_2 \setminus B_2)$$

показує, що при $n = 2$ $\mathfrak{Q}$ містить теоретико-множинну різницю всяких двох своїх елементів. Цей факт узагальнюється за індукцією, крок якої очевидний, на довільне натуральне $n > 1$. ▶

Зверніть увагу: $\mathfrak{Q}$ не буде (крім тривіальних винятків) кільцем, навіть якщо всі $\mathfrak{Q}_i$ кільця.

**Лема 10.7.** *Нехай $\mu$ – булево адитивне відображення напівкільця множин $\mathfrak{Q}$ у деяку адитивну напівгрупу, визначене на всьому $\mathfrak{Q}$. Нехай далі $B_1, \ldots, B_l, C_1, \ldots, C_m$ – елементи напівкільця такі, що*

$$B_1 \cup \ldots \cup B_l = C_1 \cup \ldots \cup C_m \tag{6}$$

*і*

$$B_i \cap B_{i'} = \emptyset = C_j \cap C_{j'} \quad \textit{при} \quad i \neq i',\ j \neq j'. \tag{7}$$

*Тоді*

$$\sum_{i=1}^{l} \mu(B_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(C_j).$$

◀ Позначимо спільне значення обох частин рівності (6) через $B$. Тоді $B_i = B_i \cap B$, $C_j = C_j \cap B$, звідки за розподільчими законами

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_i \cap C_j, \quad C_j = \bigcup_{i=1}^{l} B_i \cap C_j. \tag{8}$$

За умовою всі $B_i$ і всі $C_j$ належать $\mathfrak{Q}$, тож за означенням напівкільця всі $B_i \cap C_j$ також належать $\mathfrak{Q}$. Крім того, за умовою (7)

$$B_i \cap C_j \cap B_i \cap C_{j'} = \emptyset = B_i \cap C_j \cap B_{i'} \cap C_j$$

при $i = i', j = j'$. Тоді з (8) маємо за припущенням булевої адитивності $\mu$

$$\mu(B_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_i \cap C_j),\ \mu(C_j) = \sum_{i=1}^{l} \mu(B_i \cap C_j),$$

звідки очевидним чином випливає стверджувана рівність. ►

**Лема 10.8.** *Нехай $\mu$ – булево адитивне відображення напівкільця $\mathfrak{Q}$ у деяку адитивну напівгрупу, визначене на всьому $\mathfrak{Q}$. Тоді $\mu$ однозначно породжується до булево адитивного відображення, визначеного на породженому цим напівкільцем кільці.*

◄ За лемами 10.4 і 10.5 кожний елемент породженого кільця можна подати у вигляді

$$A = \bigcup_{i=1}^{l} B_i, \tag{9}$$

де $B_1, \ldots, B_l$ – попарно неперетинні елементи напівкільця. Покладаємо

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{l} \mu(B_i).$$

Подання множини $A$ у вигляді (9) узагалі кажучи не єдине, але лема 10.7 стверджує, що задане останньою рівністю значення $\mu(A)$ не залежить від цієї неоднозначності. Очевидно, так продовжена функція $\mu$ успадковує булеву адитивність від свого звуження на $\mathfrak{Q}$. ►

**Теорема 10.1.** *Нехай $T$ – одна з множин $\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}_+$, а $\mu$ – $T$-значна булево зліченно адитивна функція на деякому напівкільці множин. Тоді $\mu$ однозначно продовжується до булево зліченно адитивної функції на породженому цим напівкільцем кільці.*

◄ Напівкільце, на якому початково задано $\mu$, позначимо через $\mathfrak{Q}$, а породжене ним кільце – через $\mathcal{R}$. Нехай $(B_n, n \in \mathbb{N})$ – послідовність попарно неперетинних множин в $\mathcal{R}$ така, що $B \equiv \cup B_n \in \mathcal{R}$. За лемою 10.4 існують натуральні числа $m, m_1, m_2 \ldots$ і множини $D_1, \ldots, D_m, D_{11}, \ldots, D_{1m}$, $D_{21}, \ldots, D_{2m_2} \ldots$, усі приналежні $\mathfrak{Q}$ і такі, що

$$B = D_1 \cup \ldots \cup D_m, \quad B_n = D_{n1} \cup \ldots \cup D_{nm_n},$$

$$D_i \cap D_j = \emptyset = D_{nk} \cap D_{nl} \quad \text{при } i \neq j, k = l.$$

Тоді

$$\mu(B) = \sum_{i=1}^{m} \mu(D_i), \tag{10}$$

$$B_n = B \cap B_n = \bigcup_{i=1}^{m} D_i \cap \bigcup_{j=1}^{m_n} D_{nj} \equiv \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{m_n} D_i \cap D_{nj}, \tag{11}$$

$$D_i = D_i \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_i \cap B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{m_n} D_i \cap D_{nj}, \tag{12}$$

$$D_i \cap D_{nj} \cap D_{i'} \cap D_{n'j'} = \emptyset \quad \text{при} \quad (i, n, j) \neq (i', n', j'). \tag{13}$$

Із (12) і (13) маємо за вибором множин у цих рівностях і за припущенням булевої зліченної адитивності $\mu$ на $\mathfrak{Q}$

$$\mu(D_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m_n} \mu(D_i \cap D_{nj}),$$

звідки з огляду на (10)

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_n} \mu(D_i \cap D_{nj}).$$

Аналогічно з (11) і (12), спираючись тільки на скінченну булеву адитивність $\mu$, одержуємо

$$\mu(B_n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m_n} \mu(D_i \cap D_{nj}).$$

Таким чином, $\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$. ▶

**Теорема 10.2.** *Нехай $F$ – зростаюча неперервна справа функція на $\mathbb{R}$. Тоді задана рівністю*

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a) \tag{14}$$

*функція $\mu$ на напівкільці відрізків виду $]a, b]$ булево зліченно адитивна.*

◀ Очевидно, $\mu$ адитивна і $\mathbb{R}_+$-значна. Нехай $]a,b] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} ]a_n, b_n]$,

$$]a_k, b_k] \cap ]a_n, b_n] = \varnothing \quad \text{при } k \neq n. \tag{15}$$

Тоді за наслідком 10.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(]a_n, b_n]) \leqslant \mu(]a, b]). \tag{16}$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і для кожного $n$ візьмемо існуюче внаслідок неперервності $F$ справа число $c_n > b_n$ таке, що

$$F(c_n) - F(b_n) < 2^{-n}\varepsilon. \tag{17}$$

Для будь-якого $\alpha \in ]0, b-a]$ інтервали $]a_n, c_n[$, $n \in \mathbb{N}$, покривають відрізок $[a+\alpha, b]$. Усякий замкнутий відрізок за теоремою Больцано–Вайєрштраса послідовнісно компактний, відтак за теоремою 7.4 зліченно компактний. Тому існує скінченна множина $J \subset \mathbb{N}$ така, що

$$[a+\alpha, b] \subset \bigcup_{n \in J} ]a_n, c_n]$$

і тим більше

$$]a+\alpha, b] \subset \bigcup_{n \in J} ]a_n, c_n].$$

Звідси з урахуванням (15) і зростання $F$ маємо

$$F(b) - F(a+\alpha) \leqslant \sum_{n \in J} (F(c_n) - F(a_n)),$$

що разом із (17) дає

$$F(b) - F(a+\alpha) \leqslant \sum_{n \in J} (F(b_n) - F(a_n)) + \varepsilon.$$

За умовою $\lim\limits_{\alpha \to +0} F(a+\alpha) = F(a)$. Тому, спрямувавши в останній нерівності $\alpha$ і $\varepsilon$ до нуля, дістанемо

$$F(b) - F(a) \leqslant \sum_{n \in J} (F(b_n) - F(a_n))$$

і тим більше

$$F(b) - F(a) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n)).$$

Це спільно з (14) і (16) доводить рівність

$$\mu(]a, b]) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(]a, b_n]). \qquad \blacktriangleright$$

Аналогічно доводиться

**Теорема 10.3.** *Нехай $F$ – зростаюча неперервна зліва функція на $\mathbb{R}$. Тоді задана рівністю*

$$\mu([a, b[) = F(b) - F(a)$$

*функція $\mu$ на напівкільці відрізків виду $[a, b[$ булево зліченно адитивна.*

**Наслідок 10.3** (з теорем 10.1 і 10.2)**.** *Нехай $F$ – зростаюча неперервна справа функція на $\mathbb{R}$. Тоді задана рівністю* (14) *функція $\mu$ на напівкільці відрізків виду $]a, b]$ однозначно продовжується до скінченної міри на породженому цим напівкільцем кільці.*

Аналогічний наслідок із теорем 10.1 і 10.3 читач сформулює сам.

10.2. Інтеграл. Назвемо відображення $Q$ одної адитивноїґратки в іншу *неперервним зверху в нулі*, якщо для будь-якої спадної до нуля послідовності $(u_n)$ у $\operatorname{dom} Q$ справджується рівність $(os)\lim Q(u_n) = 0$ (означення порядкової збіжності див. у п.2.1). Зокрема, неперервність зверху в нулі і з о т о н н о г о відображення $Q$ виражається імплікацією

$$u_n \searrow 0 \implies Q(u_n) \searrow 0.$$

Далі розглядаємо відображення деякої адитивної ґратки E вадитивну ґратку $\mathbb{R}$ і називаємо їх функціоналами на E. Аргумент а д и т и в н о г о функціонала записуємо без дужок.

Неперервний зверху в нулі ізотонний лінійний функціонал навекторній ґратці називається *інтегралом*. Неперервний зверху в нулі ізотонний адитивний функціонал на адитивній ґратці назвемо *протоінтегралом*[10].

Повторивши з очевидними змінами доведення наслідку5.24, доходимо такого висновку.

[10]Новий термін.

**Лема 10.9.** *Усякий протоінтеграл на архімедовій векторній ґратці є інтегралом.*

**Приклад 10.3.** Нехай $F$ – зростаюча неперервна справа функція на $[a,b]$. Для довільної рівномірно неперервної функції $f$ на $]a,b]$ (за теоремою Кантора це фактично те саме, що неперервна функція на $[a,b]$) означимо інтеграл Рімана – Стілтьєса $\int\limits_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}F(t)$ так само, як у математичному аналізі означується ріманів інтеграл $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$, із заміною в інтегральних сумах приростів змінної інтегрування $t$ приростами інтегруючої функції $F$. Очевидні зміни в доведеннях теорем про існування і властивості ріманового інтеграла дозволяють перенести їх на інтеграл Рімана – Стілтьєса. Зокрема, це ізотонний лінійний функціонал від $f$, допускаючий оцінку

$$\Big|\int_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}F(t)\Big| \leqslant \|f\|(F(b)-F(a)), \tag{18}$$

де $\|\cdot\|$ – чебишовська норма. Якщо $(f_n)$ – поточково спадна до нуля послідовність неперервних функцій, то за теоремою 7.9 $\|f_n\| \to 0$, що разом із (18) доводить неперервність зверху в нулі відображення $f \mapsto \int\limits_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}F(t)$. Таким чином, за сформульованих вище припущень про $F$ інтеграл Рімана – Стілтьєса $\int\limits_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}F(t)$ як функціонал на $\mathrm{C}[a,\,b]$ є інтегралом у розумінні аксіоматичного означення.

Якщо ж $F$ визначена не тільки на $[a,b]$, але й у деякому лівому околі точки $a$, то замінивши в першому доданку інтегральної суми $F(t_1)-F(a)$ на $F(t_1)-F(a-0)$, одержимо в результаті граничного переходу теж інтеграл Рімана–Стілтьєса, але вже по замкнутому відрізку $[a,b]$. Очевидно,

$$\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}F(t) = f(a)(F(a)-F(a-0)) + \int_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}F(t).$$

Пов'яжемо з кільцем $\mathcal{R} \subset 2^X$ клас $\underline{\mathrm{L}}_0(X,\mathcal{R})$ функцій $\varphi : X \to \mathbb{R}$ виду

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_k}, \tag{19}$$

де $a_1, a_2 \dots$ – відмінні від нуля дійсні числа, а $A_1, A_2 \dots$ – попарно неперетинні множини (так що в кожній точці $x \in X$ сума в (19) містить щонайбільше один ненульовий доданок) з $\mathcal{R}$.

Із кільцем $\mathcal{R} \subset 2^X$ і невід'ємною булево адитивною функцією $\mu$ на ньому пов'яжемо клас $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$ тих функцій $\varphi \in \underline{\mathrm{L}}_0(X, \mathcal{R})$, для яких, у позначеннях формули (19),

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \mu(A_k) < \infty. \tag{20}$$

**Лема 10.10.** $\underline{\mathrm{L}}_0(X, \mathcal{R})$ *і* $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$ *– лінеали.*

◀ Очевидно, обидва класи містять усеможливі добутки своїх елементів на дійсні числа.

Нехай

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi_{B_k}, \tag{21}$$

де $b_1, b_2 \dots$ – відмінні від нуля дійсні числа, а $B_1, B_2 \dots$ – попарно неперетинні множини з $\mathcal{R}$. За лемою 10.2 для будь-яких $p, q \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathcal{R}$ і дійснозначної булево адитивної функції $\nu$ на $\mathcal{R}$

$$p\nu(A) + q\nu(B) = (p+q)\nu(A \cap B) + p\nu(A \setminus B) + q\nu(B \setminus A). \tag{22}$$

Зафіксувавши $x \in X$ і поклавши $\nu(D) = \chi_D, D \in \mathcal{R}$,виводимо з рівностей (19), (21) і пояснень до них, що

$$\varphi + \psi = \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k + b_k)\chi_{A_k \bigcap B_k} + a_k \chi_{A_k \setminus B_k} + b_k \chi_{B_k \setminus A_k}), \tag{23}$$

а множини $A_1 \cap B_1, A_1 \setminus B_1, B_1 \setminus A_1, A_2 \cap B_2, A_2 \setminus B_2, B_2 \setminus A_2 \dots$ попарно не перетинаються і, таким чином, $\varphi + \psi \in \underline{\mathrm{L}}_0(X, \mathcal{R})$.

За наслідком 10.1 для будь-яких $A, B \in \mathcal{R}$

$$\mu(A \setminus B) \leqslant \mu(A),\ \mu(B \setminus A) \leqslant \mu(B),\ \mu(A \cap B) \leqslant \mu(A) + \mu(B),$$

що разом із (22) дає

$$|a+b|\mu(A \cap B) + |a|\mu(A \setminus B) + |b|\mu(B \setminus A) \leqslant 2|a|\mu(A) + 2|b|\mu(B).$$

Отже, якщо виконано умову (20) і

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\mu(B_k) < \infty, \tag{24}$$

то

$$\sum (|a_k + b_k|\mu(A_k \cap B_k) + |a_k|\mu(A_k \setminus B_k) + |b_k|\mu(B_k \setminus A_k)) < \infty,$$

відтак рівність (23) означає, що $\varphi + \psi \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$.

Очевидно, для будь-яких $A, B \subset X, a, b \in \mathbb{R}$ і функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(a\chi_A, b\chi_B) = f(a,b)\chi_{A\cap B} + f(a,0)\chi_{A\setminus B} + f(b,0)\chi_{B\setminus A}.$$

Узявши спочатку $f(p,q) = p \wedge q$, а потім $f(p,q) = p \vee q$, переконуємося, що і один, і другий клас разом із кожними двома функціями $\varphi$ і $\psi$ містить також $\varphi \wedge \psi$ і $\varphi \vee \psi$. ►

**Лема 10.11.** *Нехай $\mu$ – невід'ємна булево адитивна функція на кільці $\mathcal{R} \subset 2^X$. Тоді функціонал $I_\mu$ на $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$, діючий на задану рівністю* (19) *і поясненням до неї функцію $\varphi$ за формулою*

$$I_\mu \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(A_k), \tag{25}$$

*ізотонний і лінійний.*

◄ Ізотонність і однорідність $I_\mu$ очевидні.

Нехай $\psi$ задано рівністю (21) і поясненням до неї, а числа $b_k$ задовольняють умову (24), так що за лемою 10.10 $\varphi + \psi \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$. Тоді з рівності (23) маємо за означенням $I_\mu$

$$I_\mu(\varphi + \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} ((a_k + b_k)\mu(A_k \cap B_k) + a_k\mu(A_k \setminus B_k) + b_k\mu(B_k \setminus A_k)),$$

звідки за формулою (22), застосованою до $\nu = \mu$,

$$I_\mu(\varphi + \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\mu(A_k) + b_k\mu(B_k)) \equiv I_\mu\varphi + I_\mu\psi. \qquad ►$$

Оскільки в (25) $\varphi \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$, то складовою частиною означення функціонала $I_\mu$ є умова (20).

**Лема 10.12.** *Нехай $\mu$ – невід'ємна булево адитивна функція на кільці $\mathcal{R} \subset 2^X$. Тоді для будь-яких $\varphi \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$ і $c > 0$ функції $\chi_{\varphi^{-1}(]c,\infty[)}$, $\chi_{\varphi^{-1}([c,\infty[)}$, $\chi_{\varphi^{-1}(]-\infty,-c[)}$ і $\chi_{\varphi^{-1}(]-\infty,-c])}$ належать $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$.*

◀ Нехай $\varphi$ задано рівністю (19) і поясненнями до неї, і нехай також виконано умову (20). Тоді

$$\chi_{\varphi^{-1}(]c,\infty[)} = \sum_{k:a_k>c} \chi_{A_k},$$

тож щоб довести перше твердження, достатньо пересвідчитися, що

$$\sum_{k:a_k>c} \mu(A_k) < \infty.$$

А це випливає з (20) і очевидних нерівностей

$$\sum_{k:a_k>c} \mu(A_k) \leqslant \sum_{k:a_k>c} \frac{a_k}{c}\mu(A_k) \leqslant c^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\mu(A_k).$$

Друге твердження доводиться аналогічно, а третє і четверте зводяться до перших двох заміною $\varphi$ на $-\varphi$. ▶

**Теорема 10.4.** *Нехай $\mu$ – міра на кільці $\mathcal{R} \subset 2^X$. Тоді заданий рівністю (25) і поясненням до неї функціонал $I_\mu$ на $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$ – інтеграл.*

◀ У доведенні замість $I_\mu$ пишемо $I$.

Нехай $(\varphi_n)$ – поточково спадна до нуля послідовність в $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$. Зважаючи на лему 10.11 достатньо показати, що $I\varphi_n \to 0$. За умовою члени послідовності мають будову

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\chi_{A_{nk}}, \tag{26}$$

де $a_{nk} > 0, A_{nk} \in \mathcal{R}, A_{ni} \cap A_{nj} = \varnothing$ при $i \neq j$. Індекс $n = 1$ у позначеннях випускаємо, так що функція $\varphi_1$, вона ж $\varphi$, задається рівністю (19), у якій числа $a_k$ додатні і задовольняють умову (20).

Позначимо $X_m = A_1 \cup \ldots \cup A_m$, $\iota_m = \chi_{X_m}$, $D_n^\varepsilon = \{x \in X : \varphi_n(x) \geqslant \varepsilon\}$, $D_{mn}^\varepsilon = X_m \cap D_n^\varepsilon$, $J_n^\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : a_{nk} > \varepsilon\}$, $J_{mn}^\varepsilon = \{1, \ldots, m\} \cap J_n^\varepsilon$. Із (26) маємо

$$D_n^\varepsilon = \bigcup_{k \in J_n^\varepsilon} A_{nk}, \quad D_{mn}^\varepsilon = \bigcup_{k \in J_{mn}^\varepsilon} A_{nk}.$$

Оскільки множина $J_n^\varepsilon$ може бути нескінченною, то без додаткових припущень про $\mathcal{R}$ не можна стверджувати, що $D_n^\varepsilon \in \mathcal{R}$. А от $D_{mn}^\varepsilon$ гарантовано належить $\mathcal{R}$, і це єдина причина появи в міркуваннях множин $X_m$ і взагалі параметра $m$. Доведення значно спростилося б, якби ми припустили, що $X \in \mathcal{R}$ і $\mu(X) < \infty$, – але ці припущення істотно зменшують загальність.

У точках $x \notin D_n^\varepsilon \quad \varphi_n(x) < \varepsilon$, що разом з умовою $\varphi_n \leqslant \varphi_1$ і очевидною рівністю $\iota_m \chi_{D_n^\varepsilon} = \chi_{D_{mn}^\varepsilon}$ дає

$$0 \leqslant \iota_m \varphi_n \leqslant \chi_{D_{mn}^\varepsilon} \varphi + \varepsilon \iota_m. \tag{27}$$

При цьому за побудовою $\iota_m = \chi_{A_1} + \ldots + \chi_{A_m}$, а за умовою (20) $\mu(A_k) < \infty,\ k \in \mathbb{N}$. Отже $\iota_m \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$, відтак із (27) маємо за лемою 10.11

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} I\iota_m \varphi_n \leqslant \lim_{n\to\infty} I\chi_{D_{mn}^\varepsilon} \varphi + \varepsilon I \iota_m. \tag{28}$$

Позначимо $A_{mnk}^\varepsilon = D_{mn}^\varepsilon \cap A_k, c_{mnk}^\varepsilon = \mu(A_{mnk}^\varepsilon)$. Зважаючи на (19)

$$\chi_{D_{mn}^\varepsilon} \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{A_{mnk}^\varepsilon}. \tag{29}$$

Оскільки $A_{mnk}^\varepsilon \subset A_k$, то за наслідком 10.1 $c_{mnk}^\varepsilon \leqslant \mu(A_k)$. Тоді з (29) і (20) маємо $\chi_{D_{mn}^\varepsilon} \varphi \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$,

$$I\chi_{D_{mn}^\varepsilon} \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_{mnk}^\varepsilon,$$

звідки для довільного $l \in \mathbb{N}$

$$I\chi_{D_{mn}^\varepsilon} \varphi \leqslant \sum_{k=1}^{l} a_k c_{mnk}^\varepsilon + \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k \mu(A_k). \tag{30}$$

Оскільки $A_{mnk}^\varepsilon \subset D_n^\varepsilon$, то за наслідком 10.1

$$c_{mnk}^\varepsilon \leqslant \mu(D_n^\varepsilon). \tag{31}$$

За побудовою множин $D_n^\varepsilon$ і умовою спадання $(\varphi_n)$

$$D_{n+1}^\varepsilon \subset D_n^\varepsilon. \tag{32}$$

Так само за побудовою цих множин

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^{\varepsilon} = \left\{ x : \inf_n \varphi_n(x) \geqslant \varepsilon \right\},$$

тож за умовою поточкової збіжності $(\varphi_n)$ до нуля і з огляду на (32) для будь-якого $\varepsilon > 0$ $\mu(D_n^{\varepsilon}) \to 0$, що разом із (31) і (30) дає

$$\lim_{n\to\infty} I\chi_{D_{mn}^{\varepsilon}}\varphi \leqslant \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k \mu(A_k).$$

А це з огляду на довільність $l$ означає, що

$$\lim_{n\to\infty} I\chi_{D_{mn}^{\varepsilon}}\varphi = 0.$$

Тоді з (28) і довільності $\varepsilon > 0$ маємо для будь-якого $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} I\iota_m\varphi_n = 0.$$

При цьому за лемою 10.11 і умовою спадання $(\varphi_n)$

$$I\varphi_n = I\iota_m\varphi_n + I(1-\iota_m)\varphi_n \leqslant I\iota_m\varphi_n + I(1-\iota_m)\varphi,$$

тож залишається показати, що

$$\lim_{m\to\infty} I(1-\iota_m)\varphi = 0. \tag{33}$$

За умовою (19) і побудовою функції $\iota_m$

$$(1-\iota_m)\varphi = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \chi_{A_k},$$

звідки

$$I(1-\iota_m)\varphi = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \mu_{A_k}.$$

Тепер (33) випливає з (20). ►

Обернене до теореми 10.4 твердження доводиться значно простіше.

**Теорема 10.5.** *Нехай $\mu$ – $\overline{\mathbb{R}}_+$-значна булево адитивна функція на кільці $\mathcal{R} \subset 2^X$ така, що заданий рівністю (25) і поясненням до неї функціонал $I$ на $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$ неперервний зверху в нулі. Тоді $\mu$ міра.*

◀ Окремим випадком (коли всі множини $A_k$, крім одної, порожні) рівності (25) є $\mu(D) = I_\mu \chi_D$ (за умов $D \in \mathcal{R},\ \mu(D) < \infty$). Отже, якщо $(D_n)$ – послідовність в $\mathcal{R}$ така, що $D_n \searrow \emptyset$ і $\mu(D_1) < \infty$, то за припущенням про $I_\mu \quad \mu(D_n) \to 0$. ▶

## § 11 Продовження інтеграла і міри

11.1. Задачі продовження. Булеве кільце, зокрема кільце множин, називається *$\delta$-кільцем* (*$\sigma$-кільцем*), якщо воно є $\delta$-ґраткою (відповідно $\sigma$-ґраткою) відносно свого порядку. Зокрема, $\sigma$-кільце ($\delta$-кільце) множин це таке кільце підмножин деякої множини, яке містить об'єднання всіх членів довільної (відповідно довільної обмеженої) послідовності своїх елементів. Обмеженість розуміється, звичайно, відносно порядку $\subset$, так що послідовність $(A_n)$ у кільці множин $\mathfrak{R}$ обмежена в точності тоді, коли існує множина $A \in \mathfrak{R}$ така, що $A_n \subset A,\ n \in \mathbb{N}$.

Відтепер стандартними позначеннями $\delta$-кільця ($\sigma$-кільця) множин будуть $\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{S}$ відповідно.

**Лема 11.1.** *Для того щоб кільце множин було $\delta$-кільцем, необхідно і достатньо, щоб воно містило перетин усіх членів довільної послідовності своїх елементів.*

◀ Необхідність. Нехай $A_n \in \mathfrak{D},\ n \in \mathbb{N}$. Позначимо $B_n = A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Тоді $B_1 \setminus B_n \subset \mathfrak{D} \cap 2^{B_1}$, тож за означенням $\delta$-кільця $\cup(B_1 \setminus B_n) \in \mathfrak{D}$, відтак і $\cap A_n \equiv B_1 \setminus \cup(B_1 \setminus B_n) \in \mathfrak{D}$.

Достатність. Якщо $A_n \subset A,\ n \in \mathbb{N}$, то $\cup A_n = A \setminus (A \setminus \cap A_n)$, відтак за умови $A, A_1, A_2 \ldots \in \mathfrak{R}$ із припущення леми в частині достатності маємо $\cup A_n \in \mathfrak{R}$. ▶

Лінеал (див. п. 3.6), який є $\delta$–ґраткою відносно свого порядку, називається *$\delta$-лінеалом*.

Для довільної сукупності $\mathfrak{E} \subset 2^X$ серед тих $\delta$-кілець ($\sigma$-кілець) в $X$, які містять $\mathfrak{E}$ $\big($такі існують, хоча би $2^X\big)$, знайдеться найменше, а саме перетин усіх містячих $\mathfrak{E}$ $\delta$-кілець (відповідно $\sigma$-кілець) в $X$. Воно називається *$\delta$-кільцем* (*$\sigma$-кільцем*), *породженим даною сукупністю множин*, і позначатиметься $\delta(\mathfrak{E})$ (відповідно $\sigma(\mathfrak{E})$). Із таких же міркувань для довільної множини $A$ в $\delta$-лінеалі E серед тих $\delta$-лінеалів K $\subset$ E, які

містять $A$, є найменший. Він називається *$\delta$-лінеалом, породженим множиною $A$*, і позначатиметься $\delta(A)$. Таким чином, інтерпретація запису $\delta(\cdot)$ залежить від контексту – треба дивитися, щó підставляється замість крапки.

11.2. Підготовче продовження (прото)інтеграла. Підмножину $X_0$ впорядкованої множини $X$ називаємо *конфінальною* (в $X$), якщо для всякого $x \in X$ існують $\underline{x} \in X_0$ і $\overline{x} \in X_0$ такі, що $\underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}$. Назвемо підмножину впорядкованої множини *монотонно замкнутою*, якщо вона містить обидві точні межі всякої монотонної обмеженої послідовності своїх елементів (вимога обмеженості в цьому означенні істотна). Підмножину $X_0$ монотонно замкнутої впорядкованої множини $X$ таку, що єдиною містячою $X_0$ монотонно замкнутою підмножиною $X$ є сама $X$, назвемо *монотонно щільною* (в $X$).

Для довільної підмножини $A$ впорядкованої множини $X$ означимо $A^{\nearrow}$ (відповідно $A^{\searrow}$) як множину тих $x \in X$, для яких існує послідовність $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ така, що $x_n \nearrow x$ (відповідно $x_n \searrow x$). Також позначимо $\mathfrak{m}(A) = A^{\searrow} \cup A^{\nearrow}$.

Із теореми 3.2 випливає

**Наслідок 11.1.** *Нехай* G *– впорядкована комутативна група. Тоді для будь-яких* $A, B \subset \mathrm{G}$ $A^{\searrow}+B^{\searrow} \subset (A+B)^{\searrow}$, $A^{\nearrow}+B^{\nearrow} \subset (A+B)^{\nearrow}$, $(-A)^{\nearrow} = -(A^{\searrow})$, $(-A)^{\searrow} = -(A^{\nearrow})$.

**Наслідок 11.2.** *Нехай* K *– підгрупа впорядкованої комутативної групи. Тоді:* $\mathrm{K}^{\searrow}$ *і* $\mathrm{K}^{\nearrow}$ *напівгрупи;* $\mathrm{K}^{\nearrow} = -\mathrm{K}^{\searrow}$, $\mathrm{K}^{\searrow} = -\mathrm{K}^{\nearrow}$.

Скрізь нижче F – конфінальна монотонно щільна адитивна підґратка адитивної $\delta$-ґратки E.

**Лема 11.2.** *Нехай $I$ – протоінтеграл на* F, *а* $(u_n)$, $(v_n)$ *– монотонні збіжні послідовності в* F *такі, що* $\lim u_n \leqslant \lim v_n$. *Тоді* $\lim Iu_n \leqslant \lim Iv_n$. *Зокрема, якщо* $\lim u_n = \lim v_n$, *то* $\lim Iu_n = \lim Iv_n$.

◀ Нехай спершу $u_n \searrow x$, $v_n \nearrow y \geqslant x$. Тоді за теоремою 3.2 і наслідком 3.9 $u_n - v_n \searrow x - y$, $(u_n - v_n)_+ \searrow (x - y)_+$ $(= 0)$, звідки внаслідок монотонної неперервності протоінтеграла $I(u_n - v_n)_+ \searrow 0$, відтак за іншими двома (з трьох) властивостями інтеграла $\overline{\lim}(Iu_n - Iv_n) \leqslant 0$, що, очевидно, приводить до потрібного висновку.

Нехай тепер $u_n \nearrow x,\ v_n \nearrow y \geqslant x$. Тоді за вже доведеним $Iu_k \leq \lim Iv_n$ при всіх $k$. Залишається спрямувати $k$ до нескінченності.

Якщо ж $u_n \searrow x,\ v_n \searrow y \geqslant x$, то записавши $-v_n \nearrow -y,\ -u_n \nearrow -x \geqslant -y$, зводимо цей випадок до попереднього.

Наостанок, випадок $u_n \nearrow x,\ v_n \searrow y \geqslant x$ тривіальний. ►

Нижче $\widetilde{F}$ означає $\mathrm{F}^{\nearrow} \cup \mathrm{F}^{\searrow}$. Продовжимо $I$ на $\widetilde{F}$, поклавши для всякого $x \in \widetilde{F} \quad Ix = \lim Iu_n$, де $(u_n)$ – довільна збіжна до $x$ монотонна послідовність в F (лема 11.2 стверджує, що значення $Ix$ не залежить від вибору послідовності $(u_n)$ із зазначеними властивостями). Відтепер і аж до останньої леми під $I$ розуміємо щойно побудоване продовження. Область визначення його не є ні групою, ані ґраткою, але наслідок 11.2 стверджує, що $\mathrm{F}^{\nearrow}$ і $\mathrm{F}^{\searrow}$ напівгрупи, раз F, за припущенням, група.

**Наслідок 11.3** (з леми 11.2)**.** *$I$ ізотонний.*

**Лема 11.3.** *$I$ адитивний на $\mathrm{F}^{\nearrow}$ і на $\mathrm{F}^{\searrow}$. Якщо до того ж* E *і* F *лінеали, то для будь-яких $x \in \widetilde{F}$ і $a \in \mathbb{R}_+ \quad Iax = aIx$.*

◄ Це випливає безпосередньо із способу продовження. ►

**Лема 11.4.** *Для будь-якого $x \in \widetilde{F} \quad I(-x) = -Ix$.*

◄ За теоремою 3.2 співвідношення $u_n \nearrow x$ і $-u_n \searrow -x$ рівносильні. Якщо при цьому $u_n \in \mathrm{F}$, то за побудовою продовження $Ix = \lim Iu_n$, $I(-x) = \lim I(-u_n)$ і за вибором $u_n, \quad I(-u_n) = -Iu_n$. ►

**Лема 11.5.** *Нехай $(x_n)$ – зростаюча послідовність в $\mathrm{F}^{\nearrow}$ (спадна послідовність в $\mathrm{F}^{\searrow}$), збіжна до деякого $x \in \mathrm{E}$. Тоді: 1) $x \in \mathrm{F}^{\nearrow}$ (відповідно $x \in \mathrm{F}^{\searrow}$); 2) $Ix = \lim Ix_n$.*

◄ Нехай $x_n \in \mathrm{F}^{\nearrow},\ n \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного $n$ існує зростаюча послідовність $(u_{nk}, k \in \mathbb{N}) \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ така, що

$$u_{nk} \nearrow x_n \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{1}$$

Позначимо $u_k = u_{1k} \vee \ldots \vee u_{kk}$. Тоді $(u_k)$ – зростаюча послідовність в F, тож існує $y \in \mathrm{F}^{\nearrow}$ такий, що $u_k \nearrow y$. За побудовою $u_k \geqslant u_{nk}$ при $k \geqslant n$, що спільно з попереднім співвідношенням і (1) дає $y \geqslant x_n$. Нехай далі $x_n \nearrow x$. Тоді, по-перше, $y \geqslant x$ за лемою 11.1 і, по-друге, $u_{ik} \leqslant x_i \leqslant x_k$ при $i \leqslant k$, так що за тією ж лемою $u_k \leqslant x_k$. З останньої нерівності і

співвідношень $u_k \nearrow y$, $x_k \nearrow x$ маємо за лемою 11.1 $y \leqslant x$. Отже $y = x$ і, таким чином, $u_k \nearrow x$, $Iu_k \nearrow Ix$. При цьому $u_k \leqslant x_k \leqslant x$, так що $Iu_k \leqslant Ix_k \leqslant Ix$.

Для $x_n \in \mathrm{F}^{\searrow}$, $x_n \searrow x$ міркування аналогічні. ►

Для довільних $A \subset \mathrm{E}$ і $x \in \mathrm{E}$ позначимо

$$A^{\leqslant x} = \{u \in A : u \leqslant x\}, \quad A^{\geqslant x} = \{v \in A : v \geqslant x\}.$$

Нехай Q – конфінальна підмножина деякої впорядкованої множини, $J$ – ізотонний функціонал на Q, а функціонали $J_*^{\mathrm{Q}}$, $J_{\mathrm{Q}}^*$ на всій множині задаються рівностями

$$J_*^{\mathrm{Q}} x = \sup_{u \in \mathrm{Q}^{\leqslant x}} Ju, \quad J_{\mathrm{Q}}^* x = \inf_{v \in \mathrm{Q}^{\geqslant x}} Jv,$$

праві частини яких скінченні внаслідок ізотонності $J$ і конфінальності Q. Безпосередньо з означення цих функціоналів випливає

**Лема 11.6.** *Функціонали $J_*^{\mathrm{Q}}$ і $J_{\mathrm{Q}}^*$ ізотонні.*

Замість $I_*^F$, $I_F^*$ пишемо $\underline{I}$, $\overline{I}$. Інакше кажучи,

$$\underline{I}x = \sup_{u \in F^{\leqslant x}} Iu, \quad \overline{I}x = \inf_{v \in F^{\geqslant x}} Iv. \tag{2}$$

Наступна лема і наслідок із неї будуть використані аж у § 12.

**Лема 11.7.** *Нехай $x \in \mathfrak{m}(\mathrm{F})$. Тоді:*

*1. Для всякої поточково збіжної до $x$ зростаючої послідовності $(u_n) \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ $\lim Iu_n = \underline{I}x$.*

*2. Для всякої поточково збіжної до $x$ спадної послідовності $(v_n) \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ $\lim Iv_n = \overline{I}x$.*

◄ Нехай $(z_n)$ – послідовність в F така, що $Iz_n \to \underline{I}x$. Позначимо $y_n = z_1 \vee \ldots z_n$ $(\in \mathrm{F})$. За побудовою $z_n \leqslant y_n \leqslant x$, звідки $Iz_n \leqslant Iy_n \leqslant \underline{I}x$, а значить

$$Iy_n \to \underline{I}x. \tag{3}$$

При цьому для будь-якого $m$ $(y_m - u_n)_+ \searrow 0$ при $n \to \infty$, тож за означенням інтеграла

$$\lim I(y_m - u_n)_+ = 0.$$

Звідси, зауваживши, що $y_m - u_n \leqslant (y_m - u_n)_+$, одержуємо $Iy_m \leqslant \lim Iu_n$, $m \in \mathbb{N}$. Отже

$$\lim Iy_n \leqslant \lim Iu_n. \tag{4}$$

З умов $u_n \in \mathrm{F},\ u_n \leqslant x$ маємо $Iu_n \leqslant \underline{I}x$, що разом із (3) і (4) доводить перше твердження. Друге доводиться аналогічно. ▶

**Наслідок 11.4.** *Для будь-якого* $x \in \mathfrak{m}(\mathrm{F})\quad \underline{I}x = Ix = \overline{I}x.$

◀ Нехай $(u_n)$ і $(v_n)$ – існуючі за вибором $x$ послідовності в F такі, що $u_n \nearrow x,\ v_n \searrow x$. Тоді $v_n - u_n \in \mathrm{F}$ і, за теоремою 3.2, $v_n - u_n \searrow 0$, звідки з огляду на лінійність і монотонну неперервність $I$ як функціонала на F маємо $Iv_n - Iu_n \to 0$. Тепер обидві стверджувані рівності випливають із леми 11.7. ▶

Наслідок 11.4 дозволяє продовжити функціонал $I_\mu f$ з $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ на $\mathrm{L}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$, поклавши для довільної $f \in \mathrm{L}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$

$$I_\mu f = I_{\mu *} f, \text{ або, що те саме,}\quad I_\mu f = I^*_\mu f. \tag{5}$$

Нехай Q – конфінальна підмножина деякої впорядкованої множини, $J$ – ізотонний функціонал на Q, а функціонали $J^{\mathrm{Q}}_*$, $J^*_{\mathrm{Q}}$ на всій множині задаються рівностями

$$J^{\mathrm{Q}}_* x = \sup_{u \in \mathrm{Q}, u \leqslant x} Ju, \quad J^*_{\mathrm{Q}} x = \inf_{v \in \mathrm{Q}, v \geqslant x} Jv,$$

праві частини яких скінченні внаслідок ізотонності $J$ і конфінальності Q. Безпосередньо з означення цих функціоналів випливає

**Лема 11.8.** *Функціонали* $J^{\mathrm{Q}}_*$ *і* $J^*_{\mathrm{Q}}$ *ізотонні.*

11.3. Продовження (прото)інтеграла. Основними результатами параграфа є такі дві теореми.

**Теорема 11.1.** *Нехай* $I$ *– протоінтеграл на адитивній підґратці* F *адитивної* $\delta$*-ґратки* E. *Припустимо, що множина* F *конфінальна і монотонно щільна в* E. *Тоді* $I$ *єдиним чином продовжується до протоінтеграла на* E.

**Теорема 11.2.** *Нехай* $I$ *– інтеграл на підлінеалі* F $\delta$*-лінеала* E. *Припустимо, що множина* F *конфінальна і монотонно щільна в* E. *Тоді* $I$ *єдиним чином продовжується до інтеграла на* E.

Ми виведемо їх із низки лем і наслідків.

У наступних трьох лемах Q конфінальна піднапівгрупа впорядкованої комутативної напівгрупи G, а $J$ – ізотонний функціонал на Q.

**Лема 11.9.** *Нехай для всіх* $u, v \in \mathrm{Q} \quad J(u+v) \geqslant Ju + Jv$. *Тоді для всіх* $x, y \in G \quad J_*^{\mathrm{Q}}(x+y) \geqslant J_*^{\mathrm{Q}}x + J_*^{\mathrm{Q}}y$.

◀ Достатньо написати

$$\sup_{w \leqslant x+y} Jw \geqslant \sup_{u \leqslant x, v \leqslant y} J(u+v), \qquad \sup_{u \leqslant x, v \leqslant y} (Ju + Jv) = \sup_{u \leqslant x} Ju + \sup_{v \leqslant y} Jv,$$

де $w, u, v$ беруться з Q. ▶

Так само доводиться наступне твердження.

**Лема 11.10.** *Нехай для всіх* $u, v \in \mathrm{Q} \quad J(u+v) \leqslant Ju + Jv$. *Тоді для всіх* $x, y \in \mathrm{G} \quad J_{\mathrm{Q}}^*(x+y) \leqslant J_{\mathrm{Q}}^*x + J_{\mathrm{Q}}^*y$.

**Лема 11.11.** *За умов леми 11.10 для будь-яких* $n \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{G}$

$$J_{\mathrm{Q}}^*(y_1 \vee \ldots \vee y_n) \leqslant J_{\mathrm{Q}}^* y_1 + \sum_{k=2}^{n} J_{\mathrm{Q}}^*(y_k - y_{k-1})_+ \,. \tag{6}$$

◀ Позначимо $z_k = y_1 \vee \ldots \vee y_k$. Тоді $z_k = z_{k-1} \vee y_k = z_{k-1} + (y_k - z_{k-1})_+$, звідки за лемою 11.10

$$J_{\mathrm{Q}}^* z_k \leqslant J_{\mathrm{Q}}^* z_{k-1} + J_{\mathrm{Q}}^*(y_k - z_{k-1})_+ \,.$$

Але $y_k - z_{k-1} \leqslant y_k - y_{k-1}$, тому за лемою 11.8 $J_{\mathrm{Q}}^*(y_k - z_{k-1})_+ \leqslant J_{\mathrm{Q}}^*(y_k - y_{k-1})_+$. Отже $J_{\mathrm{Q}}^* z_k - J_{\mathrm{Q}}^* z_{k-1} \leqslant J_{\mathrm{Q}}^*(y_k - y_{k-1})_+$ . Просумувавши цю нерівність по $k$ від 2 до $n$ і взявши до уваги, що $z_1 = y_1$, одержимо (6). ▶

Замість $I_*^{\mathrm{F}^\searrow}$, $I_{\mathrm{F}^\nearrow}^*$ пишемо $I_*$, $I^*$. Отже, за означенням

$$I_*x = \sup_{u \in \mathrm{F}^\searrow, u \leqslant x} Iu, \quad I^*x = \inf_{v \in \mathrm{F}^\nearrow, v \geqslant x} Iv. \tag{7}$$

**Лема 11.12.** *За умов леми 11.10 для всякого* $x \in \mathrm{E} \quad I_*x \leqslant I^*x$.

◀ Для будь-яких $u, v \in \widetilde{F}$ таких, що $u \leqslant x \leqslant v$, маємо за наслідком 6 $Iu \leqslant Iv$, після чого потрібний висновок випливає з (7). ▶

Застосувавши лему 11.5 до $J = I$ та $\mathrm{Q} = \mathrm{F}^\searrow$ або $\mathrm{Q} = \mathrm{F}^\nearrow$ (наслідок 11.2 дозволяє це зробити), дістанемо

**Наслідок 11.5.** *Функціонали $I_*$ та $I^*$ ізотонні.*

**Наслідок 11.6** (із наслідку 11.3 і лем 11.3, 11.9, 11.10, 11.12)**.** *Для будь-яких $x, y \in \mathrm{E}$*

$$I_*x + I_*y \leqslant I_*(x+y) \leqslant I^*(x+y) \leqslant I^*x + I^*y.$$

**Наслідок 11.7** (із наслідку 11.6)**.** *Нехай $x, y \in \mathrm{E},\ I_*x = I^*x,\ I_*y = I^*y$. Тоді*

$$I_*x + I_*y = I_*(x+y) = I^*(x+y) = I^*x + I^*y.$$

**Лема 11.13.** *Для всякого $x \in \mathrm{E}$* $\quad I_*(-x) = -I^*x, \quad I^*(-x) = -I_*x.$

◀ Згідно з (7)

$$I_*(-x) = \sup_{u \in \mathrm{F}^{\searrow}, -u \geqslant -x} Iu \equiv \sup_{v \in -\mathrm{F}^{\searrow}, v \geqslant -x} I(-v).$$

Звідси, зауваживши, що за наслідком 11.2 $-\mathrm{F}^{\searrow} = \mathrm{F}^{\nearrow}$, а за лемою 11.4 $I(-v) = -Iv$ при $v \in \mathrm{F}^{\nearrow}$, одержуємо $I_*(-x) = \sup\limits_{v \in \mathrm{F}^{\nearrow}, v \geqslant -x} (-Iv)$, що спільно з (7) доводить першу з двох стверджуваних рівностей. Друга доводиться так само. ▶

Безпосередньо з (7) випливає

**Лема 11.14.** *Для всякого $x \in \mathrm{F}^{\nearrow}$* $\quad I^*x = Ix$*; для всякого $x \in \mathrm{F}^{\searrow}$ $I_*x = Ix$. Зокрема, для всіх $x \in \mathrm{F}$*

$$I_*x = Ix = I^*x. \tag{8}$$

**Лема 11.15.** *Рівності* (8) *мають місце для всіх $x \in \widetilde{F}$.*

◀ Нехай $x \in \mathrm{F}^{\nearrow}$, тобто існує послідовність $(u_n) \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ така, що $u_n \nearrow x$. Тоді $Iu_n \nearrow Ix$. За наслідком 11.5 $I_*x \geqslant I_*u_n$; за лемою 11.14 $I_*u_n = Iu_n$. Тому $I_*x \geqslant Ix$. Звідси, зауваживши, що $Ix = I^*x$ за лемою 11.14, одержуємо $I_*x \geqslant I^*x$. За лемою 11.12 має місце і зворотна нерівність. Цим рівність (8) доведено для $x \in \mathrm{F}^{\nearrow}$. Для $x \in \mathrm{F}^{\searrow}$ міркування аналогічні. ▶

Позначимо $\mathrm{L} = \{x \in \mathrm{E} : I_*x = I^*x\}$.

**Наслідок 11.8** (із леми 11.13)**.** *Нехай $x \in \mathrm{L}$. Тоді $-x \in \mathrm{L}$.*

**Наслідок 11.9** (із леми 11.15). $\widetilde{F} \subset \mathrm{L}$.

**Наслідок 11.10** (із наслідків 11.7 і 11.8). L *група, а функціонал* $I_*$ *адитивний на* L *(або, що те саме,* $I^*$ *адитивний на* L*).*

**Наслідок 11.11** (із наслідку 11.10 і леми 11.3). *Якщо* E *і* F *лінеали, то й* L *лінеал, а функціонал* $I_*$ *лінійний на ньому (або, що те саме,* $I^*$ *лінійний на* L*).*

Вирішальним кроком на шляху до основних результатів є

**Лема 11.16.** *Нехай* $(x_n)$ *– монотонна збіжна послідовність в* L*. Тоді:* $\lim x_n \in \mathrm{L}$*;*

$$I^* \lim x_n = \lim I^* x_n. \tag{9}$$

За вибором послідовності $(x_n)$ і згідно з першим твердженням леми рівність (9) рівносильна такій: $I_* \lim x_n = \lim I_* x_n$.

◀ Нехай $x_n \nearrow x$ і

$$I_* x_n = I^* x_n. \tag{10}$$

Фіксуємо $\varepsilon > 0$ і для кожного $k \in \mathbb{N}$ беремо існуючий за означенням $I^*$ елемент $v_k^\varepsilon \in \mathrm{F}^\nearrow$ такий, що

$$v_k^\varepsilon \geqslant x_k \tag{11}$$

і

$$I v_k^\varepsilon < I^* x_k + 2^{-k}\varepsilon. \tag{12}$$

Конфінальність F дозволяє без обмеження загальності вважати, що послідовність $(v_k^\varepsilon)$ обмежена зверху (інакше візьмемо довільний $t \in \mathrm{F}$ такий, що $t \geqslant x$, і замінимо $v_k^\varepsilon$ на $v_k^\varepsilon \wedge t$).

Позначимо $w_n^\varepsilon = v_1^\varepsilon \vee \ldots \vee v_n^\varepsilon$ ($\in \mathrm{F}^\nearrow$ за побудовою). За лемами 11.15 і 11.11

$$I w_n^\varepsilon = I^* w_n^\varepsilon \leqslant I^* v_1^\varepsilon + \sum_{k=2}^{n} I^*(v_k^\varepsilon - v_{k-1}^\varepsilon)_+ \ . \tag{13}$$

За лемою 11.15

$$I^* v_k^\varepsilon = I v_k^\varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Із (11) маємо за лемою 11.8

$$I^*(v_k^\varepsilon - v_{k-1}^\varepsilon)_+ \leqslant I^*(v_k^\varepsilon - x_{k-1})_+.$$

Але $v_k^\varepsilon - x_{k-1} \geqslant v_k^\varepsilon - x_k \geqslant 0$, тож

$$I^*(v_k^\varepsilon - x_{k-1})_+ = I^*(v_k^\varepsilon - x_{k-1}). \tag{15}$$

При цьому $v_k^\varepsilon \in \mathrm{L}$ за наслідком 11.9. Так само, зважаючи на (10), $x_k \in \mathrm{L}$. Тоді за наслідком 11.10 $v_k^\varepsilon - x_k \in \mathrm{L}$ and $I^*(v_k^\varepsilon - x_{k-1}) = I^* v_k^\varepsilon - I^* x_{k-1}$, що спільно з (13) – (15) спричинюється до

$$Iw_n^\varepsilon \leqslant Iv_1^\varepsilon + \sum_{k=2}^{n} (Iv_k^\varepsilon - I^* x_{k-1}).$$

При цьому внаслідок (12) $-I^* x_{k-1} < 2^{-(k-1)}\varepsilon - Iv_{k-1}^\varepsilon$. Отже, $Iw_n^\varepsilon < Iv_n^\varepsilon + \varepsilon \sum\limits_{k=2}^{n} 2^{-k}$, що разом із (12) дає

$$Iw_n^\varepsilon < I^* x_n + \varepsilon. \tag{16}$$

За побудовою $w_n^\varepsilon \in \mathrm{F}^\nearrow$, послідовність $(w_n^\varepsilon)$ зростає і обмежена зверху. Тому існує $w^\varepsilon \in \mathrm{E}$ такий, що $w_n^\varepsilon \nearrow w^\varepsilon$. За лемою 11.5 $w^\varepsilon \in \mathrm{F}^\nearrow$ і

$$Iw_n^\varepsilon \nearrow Iw^\varepsilon. \tag{17}$$

Оскільки $x_n \leqslant v_n^\varepsilon \leqslant w_n^\varepsilon$ і $x_n \nearrow x$, то лема 11.1 стверджує, що $x \leqslant w^\varepsilon$, звідки за наслідком 11.3 $I^* x \leqslant I^* w^\varepsilon$. Але $I^* w^\varepsilon = Iw^\varepsilon$ за лемою 11.15. Таким чином,

$$I^* x \leqslant Iw^\varepsilon. \tag{18}$$

Для кожного $n$ беремо існуючий за означенням функціонала $I_*$ елемент $u_n \in \mathrm{F}^\searrow$ такий, що $u_n \leqslant x_n$ і

$$Iu_n > I_* x_n - 2^{-n}. \tag{19}$$

Оскільки $u_n \leqslant x_n \leqslant w_n^\varepsilon$, то за наслідком 11.3

$$Iu_n \leqslant Iw_n^\varepsilon, \tag{20}$$

що разом із (16) і (19) дає

$$I_* x_n - 2^{-n} < Iu_n \leqslant Iw_n^\varepsilon < I^* x_n + \varepsilon.$$

Звідси з урахуванням (10) і (20) маємо $0 \leqslant Iw_n^\varepsilon - Iu_n < \varepsilon + 2^{-n}$. Це разом із (17) показує, що $Iw^\varepsilon \leqslant \lim Iu_n + \varepsilon$, відтак унаслідок (18)

$$I^* x \leqslant \lim Iu_n + \varepsilon. \tag{21}$$

З іншого боку, з нерівностей $u_n \leqslant x_n \leqslant x$ маємо за наслідком 11.5 $I_* u_n \leqslant I_* x_n \leqslant I_* x$. Крім того, за вибором $u_n$ і лемою 11.15 $I_* u_n = I u_n$. Отже $\lim I u_n \leqslant \lim I_* x_n \leqslant I_* x$. Порівнявши це із (21), бачимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ $I^* x \leqslant \lim I_* x_n \leqslant I_* x + \varepsilon$. Звідси і з (10) одержуємо за лемою 11.12

$$I^* x = \lim I^* x_n = \lim I_* x_n = I_* x.$$

Цим лему доведено для зростаючих послідовностей. Такі ж міркування застосовні й до спадних послідовностей (а ще можна звести другий випадок до першого, замінивши $x_n$, $x$ на $-x_n$, $-x$ і скориставшись лемою 11.13 і теоремою 3.2). ►

*Доведення теорем 11.1 і 11.2.*

◄ Для $x \in \mathrm{L}$ покладаємо $Ix = I_* x$ $(= I^* x$ за вибором $x)$. Лема 11.15 стверджує, що так заданий функціонал $I$ на L є продовженням так само позначуваного функціонала, визначеного до того тільки на $\widetilde{F}$ (а спочатку тільки на F). За побудовою $\mathrm{F} \subset \mathrm{L} \subset \mathrm{E}$, а за лемою 11.16 множина L монотонно замкнута. Звідси за припущенням монотонної щільності F маємо $\mathrm{L} = \mathrm{E}$. Функціонал $I$ ізотонний за наслідком 11.5, адитивний за наслідком 11.10 і монотонно неперервний за лемою 11.16. Якщо E і F лінеали, то за наслідком 11.11 $I$ лінійний.

Якщо $I_1$ і $I_2$ протоінтеграли на E, то множина $\{x \in \mathrm{E} : I_1 x = I_2 x\}$, очевидно, монотонно замкнута. Тому всякий інтеграл, заданий початково на монотонно щільній адитивній ґратці $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, допускає не більше одного продовження на E. ►

**Наслідок 11.12** (з теорем 10.4 і 11.2)**.** *Нехай $\mu$ – міра на кільці $\mathcal{R} \subset 2^X$, а інтеграл $I_\mu$ на $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)$ задається рівністю* (25) *і поясненням до неї. Тоді $I_\mu$ однозначно продовжується до інтеграла на $\delta\left(\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathcal{R}, \mu)\right)$.*

## § 12. Інтеграл $\delta$-лінеалі функцій

Скрізь у цьому параграфі $\mu$ – міра на $\sigma$-кільці $\mathfrak{S} \subset 2^X$.

12.1. Підготовчі результати. Позначимо $\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$ клас тих функцій $f \in \mathfrak{m}\left(\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)\right)$, для яких існує функція $\varphi \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$ така, що $|f| \leqslant \varphi$. Також позначимо

$$\mathfrak{D}_\mu = \{A \in \mathfrak{S} : \mu(A) < \infty\} \equiv \left\{A \in \mathfrak{S} : \chi_A \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)\right\}.$$

Очевидно, $\mathfrak{D}_\mu$ $\delta$-кільце і

$$\mathfrak{m}\left(\underline{\mathrm{L}}_1(X,\mathfrak{S},\mu)\right)\subset\delta\left(\underline{\mathrm{L}}_1(X,\mathfrak{S},\mu)\right). \tag{1}$$

У доведеннях замість $I_\mu$ пишемо $I$.

**Лема 12.1.** *Для будь-яких $f\in\mathrm{L}_1^0(X,\mathfrak{S},\mu)$ і додатного числа множина $f^{-1}(]\,,\infty[)$ належить $\mathfrak{D}_\mu$.*

◀ Нехай $\varphi_n\nearrow f\leqslant\varphi$, де $\varphi,\varphi_1,\varphi_2\ldots\in\underline{\mathrm{L}}_1(X,\mathfrak{S},\mu)$. Тоді

$$f^{-1}(]c,\infty[)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{-1}(]c,\infty[),\quad \varphi_n^{-1}(]c,\infty[)\subset\varphi^{-1}(]c,\infty[).$$

За лемою 10.12 $\varphi^{-1}(]c,\infty[)\in\mathfrak{D}_\mu$, що разом із двома попередніми співвідношеннями дає $f^{-1}(]c,\infty[)\in\mathfrak{D}_\mu$.

Нехай тепер $\varphi_n\searrow f$. Тоді для всякого $b>0$

$$f^{-1}([b,\,\infty[)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\varphi_n^{-1}([b,\infty[)\in\mathfrak{D}_\mu,$$

відтак, написавши

$$f^{-1}(]c,\infty[)=\bigcap_{m=1}^{\infty}f^{-1}([c+1/m,\infty[),$$

бачимо, що і в цьому випадку $f^{-1}(]c,\infty[)\in\mathfrak{D}_\mu$. ▶

**Лема 12.2.** *Нехай $f$ – невід'ємна функція на $X$ така що: для будь-якого $a>0$ $f\chi_{f^{-1}(]a,\,\infty[)}\in\mathrm{L}_1^0(X,\mathfrak{S},\mu)$;*

$$\sup_{a>0}I_\mu f\chi_{f^{-1}(]a,\,\infty[)}<\infty. \tag{2}$$

*Тоді $f\in\mathrm{L}_1^0(X,\mathfrak{S},\mu)$ і $I_\mu f=\lim\limits_{a\to+0}I_\mu f\chi_{f^{-1}(]a,\,\infty[)}$.*

◀ Позначимо $g=f\chi_{f^{-1}(]0,\,1)}$, $h=f\chi_{f^{-1}(]1,\,\infty[)}$. За умовою в $\underline{\mathrm{L}}_1(X,\mathfrak{S},\mu)$ існують поточково збіжні до $h$ зростаюча і спадна послідовності. Тому потрібно тільки побудувати такі ж послідовності для $g$.

Позначимо

$$S_{nki}=\left\{x:(1+(i-1)2^{-n})2^{-k}<f(x)\leqslant(1+i2^{-n})2^{-k}\right\},$$

$$T_{nk} = \left\{x : 2^{-k} < f(x) \leqslant 2^{-k+1}\right\} \equiv S_{nk1} \cup \ldots \cup S_{nk2^n},$$

$$\chi_{nki} = \chi_{S_{nki}}, \quad \iota_{nk} = \chi_{T_{nk}} \equiv \chi_{nk1} + \ldots + \chi_{nk2^n},$$

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^n}(1 + (i-1)2^{-n})2^{-k}\chi_{nki}, \quad \Gamma_n = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^n}(1 + i2^{-n})2^{-k}\chi_{nki}.$$

З очевидної нерівності

$$(1 + (i-1)2^{-n})2^{-k}\chi_{nki} \leqslant f\chi_{nki} \tag{3}$$

маємо для довільного $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{2^n}(1 + (i-1)2^{-n})\mu(S_{nki}) \leqslant If\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{2^n}\chi_{nki} \equiv If\chi_{f^{-1}(]2^{-p},1])},$$

звідки за умовою (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^n}(1 + (i-1)2^{-n})\mu(S_{nki}) < \infty,$$

тобто $\gamma_n \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$.

Із виразів функцій $\gamma_n$, $\Gamma_n$ і з передуючої їм рівності маємо

$$\Gamma_n - \gamma_n = 2^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\iota_{nk}. \tag{4}$$

Звідси з урахуванням (3) і очевидної нерівності $2^{-k}\iota_{nk} \leqslant f\iota_{nk}$ одержуємо оцінки

$$\gamma_n \leqslant g \leqslant \Gamma_n \leqslant (1 + 2^{-n})g, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{p}2^{-k}\mu(T_{nk}) \leqslant If\chi_{f^{-1}(]2^{-p},1])}.$$

Остання нерівність разом із (4) і (2) показує, що $\Gamma_n - \gamma_n \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$, відтак і $\Gamma_n \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$.

Зауваживши, що за побудовою послідовність $(\Gamma_n)$ зростає, а $(\gamma_n)$ спадає, виводимо співвідношення $\Gamma_n \searrow g$ і $\gamma_n \nearrow g$ з (5). ▶

12.2. Одноходове продовження інтеграла за булево зліченно адитивною мірою з $\underline{\mathrm{L}}_1(X,\mathfrak{S},\mu)$ на $\delta\left(\underline{\mathrm{L}}_1(X,\mathfrak{S},\mu)\right)$. Пригадаймо, що згідно з лемою 10.3 і означенням міри всяка булево зліченно адитивна $\overline{\mathbb{R}}_+$-значна функція на кільці множин є мірою. Обернене твердження – лема 10.2 – містить вимогу скінченності, яку ми більше ніде не накладаємо.

Читач легко доведе таке:

**Лема 12.3.** *Нехай $\mu$ – булево зліченно адитивна міра на $\sigma$-кільці $\mathfrak{S}$, а $(D_n)$ – зростаюча послідовність в $\mathfrak{S}$. Тоді $\mu(\cup D_n)=\lim\mu(D_n)$.*

Неперервності зверху в нулі для цього висновку недостатньо!

**Теорема 12.1 (Лебег).** *Нехай $\mu$ – булево зліченно адитивна міра на $\sigma$-кільці $\mathfrak{S}\subset 2^X$, а $(f_n)$ – монотонна послідовність в $\mathrm{L}_1^0(X,\mathfrak{S},\mu)$, поточково збіжна до деякої функції $f$ і така, що*

$$\sup_n |I_\mu f_n|<\infty. \tag{6}$$

*Тоді $f\in\mathrm{L}_1^0(X,\mathfrak{S},\mu)$ і $I_\mu f_n\to I_\mu f$.*

◀ Вважаємо, не обмежуючи загальності, що $(f_n)$ зростає.

За вибором функцій $f_n$ і означенням класу $\mathrm{L}_1^0(X,\mathfrak{S},\mu)$ для кожного $n$ в $\underline{\mathrm{L}}_1(X,\mathfrak{S},\mu)$ існує послідовність $(\varphi_{nm},n\in\mathbb{N})$ така, що $\varphi_{nm}\nearrow f_n$ при $m\to\infty$. Покладемо $\varphi_m=\varphi_{1m}\vee\ldots\vee\varphi_{mm}$. За побудовою $\varphi_m\in\underline{\mathrm{L}}_1(X,\mathfrak{S},\mu)$. Повторивши доведення леми 11.5, переконуємося, що $\varphi_m\nearrow f$. Отже, щоб довести перше твердження теореми, потрібно побудувати спадну поточково збіжну до $f$ послідовність в $\underline{\mathrm{L}}_1(X,\mathfrak{S},\mu)$.

Вважаємо, не обмежуючи загальності, що $f_1\geqslant 0$ (інакше замінимо $f_n$ на $f_n-f_1$). Вводимо позначення: $a_{mk}=2^{-m}k$, $\Delta_{mk}=]a_{mk-1},\,a_{mk}]$, $A_{mk}=f^{-1}(\Delta_{mk})$, $A_{nmk}=f_n^{-1}(\Delta_{mk})$, $B_{nm}=\{x:f_n(x)>2^{-m}\}\equiv\bigcup\limits_{k=2}^{\infty}A_{nmk}$, $\psi_m=\sum\limits_{k=2}^{\infty}a_{mk}\chi_{A_{mk}}$, $\psi_{nm}=\sum\limits_{k=2}^{\infty}a_{mk}\chi_{A_{nmk}}$. За побудовою

$$A_{mi}\cap A_{mj}=\varnothing=A_{nmi}\cap A_{nmj}\quad\text{при}\quad i\neq j,$$

так що $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\chi_{A_{nmk}}=\chi_{B_{nm}}$. Із цієї рівності і очевидних співвідношень $a_{mk}=a_{mk-1}+2^{-m}$, $\sum\limits_{k=2}^{\infty}a_{mk-1}\chi_{A_{nmk}}\leqslant f_n$ маємо

$$\psi_{nm}\leqslant f_n+2^{-m}\chi_{B_{nm}}. \tag{7}$$

При цьому $\chi_{B_{nm}} \leqslant 2^m f_n$ (бо в точках множини $B_{nm}$ права частина більша за одиницю), тож $2^{-m} I\chi_{B_{nm}} \leqslant If_n$, що спільно з (12.2) дає

$$I\psi_{nm} \leqslant 2If_n. \tag{8}$$

Позначимо далі

$$D_{mk} = \{x : f(x) > a_{mk}\}, \quad D_{nmk} = \{x : f_n(x) > a_{mk}\},$$

так що

$$A_{mk} = D_{mk-1} \setminus D_{mk}, \quad A_{nmk} = D_{nmk-1} \setminus D_{nmk}. \tag{9}$$

За вибором функцій $f_n$ і лемою 12.1 $D_{nmk} \in \mathfrak{D}_\mu$, що разом із (9) дає

$$\mu(A_{nmk}) = \mu(D_{nmk-1}) - \mu(D_{nmk}). \tag{10}$$

Оскільки для кожного $x \quad f(x) = \sup\limits_n f_n(x)$, то для всякого $a \in \mathbb{R}$

$$\{x : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\}. \tag{11}$$

Зокрема, $D_{mk} = \bigcup\limits_n D_{nmk}$. Звідси, зауваживши, що послідовність $(D_{nmk}, n \in \mathbb{N})$ зростає, раз $(f_n)$ має цю властивість, одержуємо за лемою 12.3

$$\mu(D_{mk}) = \lim_{n\to\infty} \mu(D_{nmk}). \tag{12}$$

З очевидної нерівності $f_n > a_{mk}\chi_{D_{nmk}}$ маємо $\mu(D_{nmk}) \leqslant If_n$, звідки з урахуванням (6) і (12) одержуємо за лемою 12.2 $\mu(D_{mk}) < \infty$. Тоді з першої рівності в (9) і очевидного включення $D_{mk} \subset D_{mk-1}$ маємо за лемою 10.1 $\mu(A_{mk}) = \mu(D_{mk-1}) - \mu(D_{mk})$. Порівнявши це з (10), бачимо, що $\mu(A_{mk}) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_{nmk})$, а значить для будь-якого $l \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=2}^{l} a_{mk}\mu(A_{mk}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{l} a_{mk}\mu(A_{nmk}).$$

Звідси, записавши очевидну нерівність

$$\sum_{k=2}^{l} a_{mk}\mu(A_{mk}) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} a_{mk}\mu(A_{nmk})$$

і пригадавши, що функціонал $I_\mu$ на $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$ задається рівністю (25), одержуємо

$$\sum_{k=2}^{l} a_{mk}\mu(A_{mk}) \leqslant \sup_n I\psi_{nm},$$

що разом із (8) дає

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{mk}\mu(A_{mk}) \leqslant 2\sup_n If_n.$$

А це з огляду на (6) означає, що $\psi_m \in \underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$.

Припустимо тимчасово існування такого натурального $p$, що $f_n > 2^{-p},\ n \in \mathbb{N}$, а значить і $f > 2^{-p}$. Тоді

$$\Delta_{mk} = \varnothing \quad \text{при} \quad k \leqslant 2^{m+p}, \tag{13}$$

відтак у виразі $\psi_m$ можна підсумовувати починаючи з $k = 2^{m+p} + 1$. Очевидна нерівність $f\chi_{A_{mk}} \leqslant a_{mk}\chi_{A_{mk}}$ показує, що в такому разі $f \leqslant \psi_m$ $m > p$.

Щоб завершити доведення теореми за зробленого тимчасового припущення, залишається показати, що послідовність $(\psi_m)$ спадає.

З очевидної рівності $\Delta_{mk} = \Delta_{m+1,2k-1} \cup \Delta_{m+1,2k}$ маємо $A_{mk} = A_{m+1,2k-1}$ $\cup\, A_{m+1,2k}$, що разом із не менш очевидними співвідношеннями $a_{mk} = a_{m+1,2k} > a_{m+1,2k-1}$ зумовлює нерівність

$$a_{mk}\chi_{A_{mk}} \geqslant a_{m+1,2k-1}\chi_{A_{m+1,2k-1}} + a_{m+1,2k}\chi_{A_{m+1,2k}},$$

права частина якої згідно з (13) дорівнює нулю при $2k \leqslant 2^{m+1+p}$, або, що те саме, при $k \leqslant 2^{m+p}$. Просумувавши її, дістанемо

$$\sum_{k=2^{m+p}+1}^{\infty} a_{mk}\chi_{A_{mk}} \geqslant \sum_{i=2^{m+1+p}+1}^{\infty} a_{m+1,i}\chi_{A_{m+1,i}},$$

тобто $\psi_m \geqslant \psi_{m+1}$. Цим доведено (за додаткового припущення $f_n > 2^{-p}$) перше твердження теореми.

Формула (1) означає, що область визначення існуючого за наслідком 11.12 продовження інтеграла $I$ з лінеала $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$ на породжений ним $\delta$-лінеал містить $\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$. Тому для всякої спадної поточково збіжної до нуля послідовності $(g_n)$ в $\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$ $Ig_n \to 0$. Поклавши

$g_n = f - f_n$, виводимо (все ще за додаткового припущення!) друге твердження з першого.

Вернувшись до повної загальності, позначимо індикатори множин $D_{p1}$ і $D_{np1}$ через $\varkappa_p$ і $\varkappa_{np}$ відповідно. Зважаючи на (12) $\varkappa_{np} \nearrow \varkappa_p$ $n \to \infty$, відтак $f_n\varkappa_{np} \nearrow f\varkappa_p$. Тоді за вже доведеним $f\varkappa_p \in \mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$ і

$$If\varkappa_p = \lim_{n\to\infty} If_n\varkappa_{np}, \tag{14}$$

що разом з (6) і очевидною нерівністю $f_n\varkappa_{np} \leqslant f_n$ дає $\sup\limits_{p\in\mathbb{N}} If\varkappa_p < \infty$, звідки за лемою 12.2 $f \in \mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$ і

$$If = \lim_{p\to\infty} If\varkappa_p. \tag{15}$$

Написавши $0 \leqslant If - If_n = If - If\varkappa_p + If\varkappa_p - If_n\varkappa_{np} + If_n\varkappa_{np} - If_n$ $\leqslant If - If\varkappa_p + If\varkappa_p - If_n\varkappa_{np}$, виводимо співвідношення $If_n \to If$ з (14) і (15). ►

**Наслідок 12.1.** *Нехай $\mu$ – булево зліченно адитивна міра на $\sigma$-кільці $\mathfrak{S} \subset 2^X$. Тоді породжений лінеалом $\underline{\mathrm{L}}_1(X, \mathfrak{S}, \mu)$ $\delta$-лінеал співпадає з* $\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$.

Таким чином, за умов наслідку 12.1 інтеграл $I_\mu$ можна продовжити з $\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$ на $\delta\left(\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)\right)$ за спрощеною схемою, виконавши тільки описане в п. 11.2 підготовче продовження. У загальному ж випадку, коли кільце $\mathfrak{R}$ не є $\sigma$-кільцем, клас $\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{R}, \mu)$ , буде значно вужчим за $\delta\left(\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)\right)$.

**Теорема 12.2.** *Нехай $(f_n)$ – послідовність в $\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$ така, що $|f_n| \leqslant F$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і деякої $F \in \mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$. Тоді: 1) нижня $\underline{\lim}\, f_n$ і верхня $\overline{\lim}\, f_n$ поточкові границі належать $\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$ і співпадають із порядковими границями; 2) справджуються нерівності*

$$I_\mu \underline{\lim}\, f_n \leqslant \underline{\lim}\, I_\mu f_n \leqslant \overline{\lim}\, I_\mu f_n \leqslant I_\mu \overline{\lim}\, f_n.$$

◄ Перше твердження випливає з першого припущення за наслідком 12.1. Очевидно також, що за умови $-F \leqslant f_n \leqslant F$, $n \in \mathbb{N}$, поточкові нижня і верхня границі є й порядковими (див. означення в п. 2.1), відтак друге твердження це окремий випадок теореми 2.2. ►

Наступний очевидний наслідок із цієї теореми є водночас окремим випадком наслідку 2.4 з теореми 2.2

**Наслідок 12.2.** *Нехай* $(f_n)$ *– поточково збіжна послідовність в* $\mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$ *така, що* $|f_n| \leqslant F$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *і деякої* $F \in \mathrm{L}_1^0(X, \mathfrak{S}, \mu)$*. Тоді*

$$I_\mu \lim f_n = \lim I_\mu f_n.$$

# Глава 5. Обмежені лінійні оператори

## § 13. Простір неперервних лінійних операторів

13.1. Загальні відомості. Позначимо $\mathcal{L}(X,Y)$ множину всіх неперервних лінійних операторів, діючих із ТВП $X$ у ТВП $Y$ (поле скалярів, однакове для обох просторів, визначатиметься, якщо в цьому буде потреба, контекстом). Теорема 5.4 стверджує, що множина $\mathrm{C}(X \to Y)$ усіх неперервних відображень з $X$ в $Y$ – векторний простір над тим же полем. Оскільки, очевидно, сума лінійних операторів і добуток лінійного оператора на число – лінійний оператор, то $\mathcal{L}(X \to Y)$ – лінійна множина в $\mathrm{C}(X \to Y)$ і, таким чином, сама є векторним простором. Щоб перетворити його на ТВП, потрібно наділити $\mathcal{L}(X,Y)$ топологією, відносно якої лінійні операції над операторами неперервні. Цю вимогу задовольняє, наприклад, слід тихоновської топології простору $Y^X$ (доведіть). За додаткових припущень про $X$ і $Y$ становлять інтерес і інші топології, одна з яких – породжена напівнормою – докладно вивчатиметься нижче.

Як відомо з математичного аналізу, всякий лінійний оператор, область визначення якого – скінченновимірний простір, неперервний. У загальному випадку це не так.

**Приклад 13.1.** Нехай $X = \mathrm{C}^1[a,b],\ Y = \mathrm{C}[a,b]$ і топологія в обох просторах породжується чебишовською нормою (природною в $Y$, але не в $X$). Оператор диференціювання $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : X \to Y$ лінійний, але розривний. Справді, збіжну до нуля послідовність $(x_n)$, де $x_n(t) = n^{-1}\sin nt$, він переводить у розбіжну.

**Приклад 13.2.** Нехай $Y$ – довільний відокремний ТВП, а $X$ – простір фінітних (див. п. 2.3) послідовностей дійсних чисел, наділений деякою нормою такою, що $\|e_n\| = 1,\ n \in \mathbb{N}$, де $e_n = (\delta_{nk}, k \in \mathbb{N})$ (годиться норма будь-якого з просторів $\ell_p$). Задамо лінійний оператор $\mathsf{A} : X \to Y$ рівністю $\mathsf{A}e_n = ny$, де $y$ – фіксований ненульовий вектор в $Y$. Співвідношення $\|e_n/n\| = 1/n \to 0,\ \mathsf{A}e_n/n = y \neq 0$ показують, що $\mathsf{A}$ розривний.

**Лема 13.1.** *Нехай $X$ і $Y$ – напівнормовані простори. Тоді для неперервності адитивного оператора $\mathsf{A} : X \to Y$ необхідно і достатньо, щоб існували додатні числа $r$ і $R$ такі, що*

$$\mathsf{A}B_X(0,r) \subset B_Y(0,R). \tag{1}$$

◀ Необхідність. Неперервність $\mathsf{A}$ в нулі означає, згідно з даним у п.4.1 означенням неперервного відображення псевдометричних просторів, що для будь-якого $R > 0$ включення (1) при достатньо малих $r > 0$.

Достатність. За умови (1) (із фіксованими $r$ і $R$) для всякого натурального $n$

$$\mathsf{A}B_X\left(0, \frac{r}{n}\right) \subset B_Y\left(0, \frac{R}{n}\right). \tag{2}$$

Справді, в супротивному разі знайдуться $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ такі, що $\|x\| < r/n$, $\|\mathsf{A}x\| \geqslant R/n$. Тоді $nx \in B_X(0, r)$,

$$\mathsf{A}nx \equiv \mathsf{A}(x + \ldots + x) = \mathsf{A}x + \ldots + \mathsf{A}x \equiv n\mathsf{A}x \notin B_Y(0, R)$$

(ми можемо користуватись тільки адитивністю оператора), що суперечить (1).

Із (2) маємо для довільного $\varepsilon > 0$ $\mathsf{A}B_X(0, \delta) \subset B_Y(0, \varepsilon)$ при $\delta \leqslant r\varepsilon/R$ (достатньо взяти $n > R/\varepsilon, \delta \leqslant r/n$). Отже $\mathsf{A}$ неперервний у нулі, відтак, за лемою 5.44 і на $X$. ▶

Наступне твердження читач легко доведе сам.

**Лема 13.2.** *Нехай $X$ і $Y$ – напівнормовані простори, а $\mathsf{A} : X \to Y$ – адитивний оператор такий, що для деяких $r > 0$ і $R > 0$ справджується* (1). *Тоді для будь-якої обмеженої множини $Q \subset X$ множина $\mathsf{A}Q$ також обмежена.*

У п. 4.1 ми назвали фігуруючу у висновку останньої леми властивість відображення $\mathsf{A}$ локальною обмеженістю. У теорії лінійних операторів її називають просто обмеженістю (що робитимемо й ми), оскільки для адитивного оператора $\mathsf{A} : X \to Y$, де $X$ і $Y$ напівнормовані простори, обмеженість, як ми її означили в п. 4.1, означає, що $\|\mathsf{A}x\| = 0$ при всіх $x \in X$. Такі оператори не варті уваги, тож і сама властивість не потребує назви.

**Наслідок 13.1** (із лем 13.1 і 13.2)**.** *Адитивний оператор, діючий з одного напівнормованого простору в інший, неперервний у точності тоді, коли він обмежений.*

Лема 8.1 стверджує архімедовість напівнормованих просторів. Це спільно з наслідками 13.1, 5.24 і 5.25 приводить до такого висновку.

**Наслідок 13.2.** *Нехай $X$ – напівнормований простір, а $Y$ – нормований простір, і нехай $\mathsf{A} : X \to Y$ – обмежений адитивний оператор. Тоді $\mathsf{A}$ лінійний над $\mathbb{R}$, а якщо полем скалярів є $\mathbb{C}$ і для всякого $x \in X \quad \mathsf{A}(ix) = i\mathsf{A}x$, то й над $\mathbb{C}$.*

Далі до кінця параграфа $X$ і $Y$ – напівнормовані простори, що формулюватиметься явно тільки в теоремах.

$$\|\mathsf{A}\| = \sup_{x \in \overline{B}_X(0,1)} \|\mathsf{A}x\|. \tag{3}$$

Безпосередньо з цієї рівності випливає

**Лема 13.3.** *Нехай $\mathsf{A}$ – лінійний оператор з $X$ в $Y$ такий, що $\|\mathsf{A}\| = 0$. Тоді $\|\mathsf{A}x\| = 0$ для всіх $x \in X$.*

Необхідною і, згідно з лемою 13.2, достатньою умовою обмеженості $\mathsf{A}$ є нерівність $\|\mathsf{A}\| < \infty$. Із (3) і властивостей (8.1), (8.2) напівнорми випливають аналогічні властивості функціонала на множині $\|\cdot\|$ лінійних операторів:

$$\|\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2\| \leqslant \|\mathsf{A}_1\| + \|\mathsf{A}_2\|, \tag{4}$$

$$\|\lambda\mathsf{A}\| = |\lambda|\|\mathsf{A}\|, \quad \lambda \in \mathbb{K}. \tag{5}$$

Якщо ж простір $Y$ не просто напівнормований, а нормований, то рівність $\|\mathsf{A}\| = 0$ означає, згідно з лемою 13.3, що $\mathsf{A} = O$. Ми довели таке.

**Лема 13.4.** *Заданий рівністю* (3) *функціонал $\|\cdot\|$ – напівнорма в $\mathcal{L}(X, Y)$, а якщо простір $Y$ нормований, то навіть норма.*

Для довільного $x \in X$ позначимо

$$\widetilde{x} = \begin{cases} x/\|x\|, \text{ якщо } \|x\| > 0, \\ 0, \text{ якщо } \|x\| = 0. \end{cases}$$

За побудовою $\|\widetilde{x}\| \leqslant 1$, тож із (3) маємо $\|\mathsf{A}\widetilde{x}\| \leqslant \|\mathsf{A}\|$. Крім того, $x = \|x\|\widetilde{x}$, а значить $\mathsf{A}x = \|x\|\,\mathsf{A}\widetilde{x}$. Отже

$$\|\mathsf{A}x\| \leqslant \|\mathsf{A}\|\,\|x\|. \tag{6}$$

**Наслідок 13.3.** Обмежений лінійний оператор рівномірно неперервний на всій області визначення.

**Наслідок 13.4.** *Нехай $X_1, X_2, X_3$ – напівнормовані простори, а $\mathsf{A}_1 : X_1 \to X_2$, $\mathsf{A}_2 : X_2 \to X_3$ – лінійні оператори. Тоді $\|\mathsf{A}_2\mathsf{A}_1\| \leqslant \|\mathsf{A}_2\| \, \|\mathsf{A}_1\|$.*

Нерівність (6) і рівність (3) дозволяють рівносильно означити напівнорму оператора $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ як найменшу з констант $C$ таких, що нерівність $\|\mathsf{A}x\| \leqslant C\|x\|$ має місце для всіх $x \in X$. Наступні дві леми дають ще три форми означення напівнорми оператора.

**Лема 13.5.** *Для всякого $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$*

$$\|\mathsf{A}\| = \sup_{x \in B_X(0,1)} \|\mathsf{A}x\|. \tag{7}$$

◀ Написавши на підставі (8.4) і (6)

$$| \, \|\mathsf{A}x'\| - \|\mathsf{A}x''\| \, | \leqslant \|\mathsf{A}x' - \mathsf{A}x''\| \leqslant \|\mathsf{A}\| \, \|x' - x''\|,$$

бачимо, що відображення $x \mapsto \|\mathsf{A}x\|$ рівномірно неперервне. Тепер рівність (7) випливає з (3), леми 5.23 і леми 8.2 ▶

Уведене в п. 4.1 позначення $S_X(x, r)$ конкретизується для напівнормованих просторів так: $S_X(x, r) = \{x' \in X : \|x' - x\| = r\}$.

**Лема 13.6.** *Для всякого $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$*

$$\|\mathsf{A}\| = \sup_{x \in S_X(0,1)} \|\mathsf{A}x\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|\mathsf{A}x\|}{\|x\|}.$$

◀ Позначивши $N = \sup\limits_{x \in S_X(0,1)} \|\mathsf{A}x\|$, напишемо очевидні нерівності і рівність

$$N \leqslant \|\mathsf{A}\| \leqslant \sup_{x \in \overline{B}_X(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\|\mathsf{A}x\|}{\|x\|} \leqslant \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|\mathsf{A}x\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \setminus \{0\}} \left\| \mathsf{A} \frac{x}{\|x\|} \right\|. \ ▶$$

Лема 13.5 і очевидна рівність

$$\mathsf{A}B_X(\underline{x}, r) = \mathsf{A}\underline{x} + r\mathsf{A}B_X(0, 1) \tag{8}$$

приводять до такого висновку.

**Наслідок 13.5.** *Для будь-якого $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\underline{x} \in X$, $r > 0$*

$$\|\mathsf{A}\| \leqslant r^{-1}\|\mathsf{A}\underline{x}\| + r^{-1} \sup_{x \in B_X(\underline{x}, r)} \|\mathsf{A}x\|.$$

**Лема 13.7.** *Нехай* $(\mathsf{A}_n)$ *– послідовність в* $\mathcal{L}(X,Y)$*, поточково збіжна до деякого лінійного оператора* $\mathsf{A}$ *і така, що*

$$\sup_n \|\mathsf{A}_n\| < \infty. \tag{9}$$

*Тоді* $\mathsf{A}$ *обмежений і* $\|\mathsf{A}\| \leqslant \varliminf \|\mathsf{A}_n\|$.

◀ Написавши на підставі (8.4) $|\|\mathsf{A}_n x\| - \|\mathsf{A}x\|| \leqslant \|(\mathsf{A}_n - \mathsf{A})x\|$, одержуємо з поточкової збіжності $(\mathsf{A}_n)$ до $\mathsf{A}$ $\|\mathsf{A}x\| = \lim \|\mathsf{A}_n x\|$, що разом із (6) дає $\|\mathsf{A}x\| \leqslant \varliminf \|\mathsf{A}_n\| \, \|x\|$. Тепер висновок лем и випливає з (3). ▶

Зауважимо, що у випадку, коли простір $Y$ не просто напівнормований, а нормований, постулювати лінійність $\mathsf{A}$ в лемі 13.7 не потрібно (поясніть чому).

**Теорема 13.1.** *Нехай* $X$ *– напівнормований простір,* $Y$ *– банахів простір. Тоді простір* $\mathcal{L}(X,Y)$ *також банахів.*

◀ Те, що напівнорма простору $\mathcal{L}(X,Y)$ буде в цьому випадку нормою, є другим твердженням леми 13.4. Тому потрібно тільки довести повноту простору.

Нехай $(\mathsf{A}_n)$ – фундаментальна послідовність в $\mathcal{L}(X,Y)$. Тоді за лемою 6.3 справджується (9), відтак, зважаючи на (6), для будь-якого $x \in X$ послідовність $(\mathsf{A}_n x)$ фундаментальна, а значить і збігається, раз $Y$ повний. Також за умовою простір $Y$ нормований, тому границя послідовності $(\mathsf{A}_n x)$ єдина. Це дозволяє задати оператор $\mathsf{A}$ рівністю $\mathsf{A}x = \lim \mathsf{A}_n x$. Очевидно, він, як і всі $\mathsf{A}_n$, лінійний. Лема 13.7 стверджує обмеженість $\mathsf{A}$. Залишається показати, що $\lim \|\mathsf{A}_n - \mathsf{A}\| = 0$.

Оскільки для кожного $n$ послідовність $(\mathsf{A}_{n+m} - \mathsf{A}_n, m \in \mathbb{N})$ поточково збігається до $\mathsf{A} - \mathsf{A}_n$ і обмежена, то за лемою 13.7

$$\|\mathsf{A} - \mathsf{A}_n\| \leqslant \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\mathsf{A}_{n+m} - \mathsf{A}_n\|.$$

За припущенням фундаментальності $(\mathsf{A}_n)$ права частина нерівності прямує до нуля при $n \to \infty$. ▶

**Лема 13.8.** *Нехай* $X$ *і* $Y$ *– банахові простори, а* $X_0$ *– лінійна множина в* $X$*. Тоді всякий обмежений лінійний оператор* $\mathsf{A}_0 : X_0 \to Y$ *однозначно продовжується зі збереженням норми до обмеженого лінійного оператора* $\mathsf{A} : \overline{X_0} \to Y$.

Збереження норми означає, що

$$\sup_{x\in\overline{B}_{\overline{X_0}}(0,1)} \|\mathsf{A}x\| = \sup_{x\in\overline{B}_{X_0}(0,1)} \|\mathsf{A}_0x\|, \tag{10}$$

або, в короткому записі, $\|\mathsf{A}\|_{\overline{X_0}} = \|\mathsf{A}_0\|_{X_0}$.

Розгорнутий запис пояснює різницю між $\|\cdot\|_{\overline{X_0}}$ і $\|\cdot\|_{X_0}$. Утім, вона визначається й контекстом, тому можемо собі дозволити випускати нижній індекс у позначенні операторної норми.

◀ За наслідком 13.3 $\mathsf{A}_0$ рівномірно неперервний на $X_0$. За лемою 6.11 поповнення підпростору $X_0$ метричного простору $X \in \overline{X_0}$. Тоді за теоремою 6.3 $\mathsf{A}_0$ однозначно продовжується до рівномірно неперервного оператора $\mathsf{A} : \overline{X_0} \to Y$. Покажемо, що $\mathsf{A}$ адитивний.

Позначимо $K_x = \left\{x' \in \overline{X_0} : \mathsf{A}(x+x') = \mathsf{A}x + \mathsf{A}x'\right\},\ x \in \overline{X_0}$. Оскільки для $x, x' \in X_0$

$$\mathsf{A}x = \mathsf{A}_0x,\ \mathsf{A}x' = \mathsf{A}_0x',\ \mathsf{A}(x+x') = \mathsf{A}_0(x+x'),$$

то з адитивності $\mathsf{A}_0$ на $X_0$ випливає, що $K_x \subset X_0$ при $x \in X_0$. Неперервність $\mathsf{A}$ зумовлює за лемою 5.17 послідовнісну замкнутість $K_x$. За наслідком 5.4 в метричних просторах ця властивість рівносильна замкнутості. Отже для будь-якого $x \in X_0$ підмножина $K_x$ множини $\overline{X_0}$ замкнута і містить $X_0$, звідки $K_x = \overline{X_0}$. Із таких же міркувань множина $\left\{x \in \overline{X_0} : K_x = \overline{X_0}\right\}$ замкнута і містить $X_0$, а значить співпадає з $\overline{X_0}$. Таким чином, оператор $\mathsf{A}$ адитивний на $\overline{X_0}$. Аналогічно доводиться однорідність $\mathsf{A}$.

Позначимо $Q = \overline{B}_{X_0}(0,1), q_1 = \overline{B}_{\overline{X_0}}(0,1)$. Очевидно, кожна точка $x \in Q_1$ пристайна до $Q$, тобто (скористаймося вкотре лемою 5.3), $Q_1 \subset \overline{Q}$. З іншого боку, множина $Q_1$ замкнута і містить $Q$, відтак і $\overline{Q}$. Отже $Q_1 = \overline{Q}$. Тепер рівність (10) (у якій $\mathsf{A}_0x = \mathsf{A}x$ за побудовою оператора $\mathsf{A}$) випливає, зважаючи на рівномірну неперервність $\mathsf{A}$, з леми 5.23. ▶

**Наслідок 13.6.** *Нехай* H *– гільбертів простір, $Y$ – банахів простір, а $M$ – лінійна множина в* H. *Тоді всякий обмежений лінійний оператор $\mathsf{A}_0 : M \to Y$ продовжується зі збереженням норми до лінійного оператора $\mathsf{A}_1 : \mathrm{H} \to Y$.*

◀ Шуканим продовженням є $\mathsf{A}_1 = \mathsf{AP}$, де оператор $\mathsf{A}$ такий, як у лемі 13.8 (з $X = \mathrm{H}, X_0 = M$), а $\mathsf{P}$ переводить довільний вектор $x \in \mathrm{H}$ в

існуючий за теоремою 9.3 вектор $x' \in \overline{M}$ такий, що $x - x' \in \overline{M}^{\perp}$ (єдиність такого $x'$ для даного $x$ також є твердженням тієї теореми). Очевидно, $\mathsf{P}$ лінійний. За наслідком 13.4 $\|\mathsf{A}_1\| \leqslant \|\mathsf{A}\|\,\|\mathsf{P}\|$. За лемою 13.8, $\|\mathsf{A}\| = \|\mathsf{A}_0\|$. Оскільки, очевидно, $\|x\|^2 = \|x'\|^2 + \|x - x'\|^2$, то $\|x'\| \leqslant \|x\|$ і, таким чином, $\|\mathsf{P}\| \leqslant 1$. Отже $\|\mathsf{A}_1\| \leqslant \|\mathsf{A}_0\|$. З іншого боку, $\overline{B}_{\overline{M}}(0,1) \subset \overline{B}_{\mathrm{H}}(0,1)$, тож $\|\mathsf{A}\| \leqslant \|\mathsf{A}_1\|$. ►

### 13.2. Принцип рівномірної обмеженості.

**Теорема 13.2** (Банах, Штейнгауз)**.** *Нехай $X$ – повний напівнормований простір, $Y$ – напівнормований простір, а $\{\mathsf{A}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ – множина в $\mathcal{L}(X,Y)$ така, що для кожного $x \in X$* $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma} \|\mathsf{A}_\gamma x\| < \infty$. *Тоді* $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma} \|\mathsf{A}_\gamma\| < \infty$.

◄ У випадку скінченної множини $\Gamma$ висновок теореми випливає безпосередньо з обмеженості всіх $\mathsf{A}_\gamma$. У випадку нескінченної $\Gamma$ неправильність висновку теореми рівносильна існуванню зліченної множини $\Gamma_0$ такої, що $\sup\limits_{\gamma\in\Gamma_0} \|\mathsf{A}_\gamma\| = \infty$. Тому, доводячи теорему від супротивного, можемо вважати, що $\Gamma = \mathbb{N}$.

Отож, припустимо, що $\sup\limits_{n} \|\mathsf{A}_n\| = \infty$ і для кожного $x \in X$ $\sup\limits_{n} \|\mathsf{A}_n x\| < \infty$. Тоді за наслідком 13.5 для будь-яких $\underline{x} \in X$ і $r > 0$

$$\sup_{n} \sup_{x\in B(\underline{x},r)} \|\mathsf{A}_n x\| = \infty. \tag{11}$$

Заготуємо позначення $B_k = B_X(x_k, \varepsilon_k)$, $\overline{B}_k = \overline{B}_X(x_k, \varepsilon_k)$. Беремо довільні $x_0 \in X, \varepsilon_0 > 0$ і для них вибираємо існуюче внаслідок (11) натуральне число $n_1$ таке, що $\sup\limits_{x\in B_0} \|\mathsf{A}_{n_1} x\| > 1$ (одиницю в правій частині можна замінити будь-яким іншим додатним числом). За теоремою 5.3 і з огляду на встановлену в доведенні леми 13.5 неперервність відображення $x \mapsto \|\mathsf{A}x\|$, де $\mathsf{A}$ – обмежений лінійний оператор, множина $\{x \in X : \|\mathsf{A}_{n_1} x\| > 1\}$ відкрита. Тому існують $x_1 \in B_0$ і $\varepsilon_1 > 0$ такі, що $B_1 \subset B_0$ $\big(\Rightarrow \overline{B}_1 \subset \overline{B}_0\big)$ і $\|\mathsf{A}_{n_1} x\| > 1$ при $x \in B_1$. Тоді за лемою 5.23 $\inf\limits_{x\in\overline{B}_1} \|\mathsf{A}_{n_1} x\| \geqslant 1$. Оскільки зменшення $\varepsilon_1$ не порушує співвідношень із попереднього речення, то $\varepsilon_1$ можна вибрати меншим за $\varepsilon_0/2$.

Точнісінько так само виводимо з (11) існування натурального числа

$n_2 > n_1$, точки $x_2 \in B_1$ і додатного числа $\varepsilon_2 < \varepsilon/2$ таких, що

$$\overline{B}_2 \subset \overline{B}_1, \quad \inf_{x \in \overline{B}_2} \|\mathsf{A}_{n_2} x\| \geqslant 2.$$

Так крок за кроком будуємо строго зростаючу послідовність $(n_k)$ натуральних чисел і спадну послідовність $(\overline{B}_k)$ замкнутих куль такі, що

$$\inf_{x \in \overline{B}_k} \|\mathsf{A}_{n_k} x\| \geqslant k \tag{12}$$

і радіуси куль прямують до нуля. За теоремою 6.1 (Кантора) існує точка $\mathring{x}$, приналежна всім $\overline{B}_k$. Зважаючи на (12) $\|\mathsf{A}_{n_k}\mathring{x}\| \geqslant k$, що суперечить обмеженість $(\|\mathsf{A}_n\mathring{x}\|)$. ►

Теорему Банаха – Штейнгауза називають **принципом рівномірної обмеженості**. Це одна з найважливіших теорем функціонального аналізу.

**Наслідок 13.7** (із теореми 13.2 і леми 13.7)**.** *Нехай $X$ – повний напівнормований простір, $Y$ – напівнормований простір, а $(\mathsf{A}_n)$ – поточково збіжна до деякого лінійного оператора $\mathsf{A}$ послідовність в $\mathcal{L}(X, Y)$. Тоді $\mathsf{A}$ також належить $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Як і в лемі 13.7, вимога лінійності $\mathsf{A}$ стає зайвою, якщо простір $Y$ нормований.

### 13.3. Теорема про відкрите відображення.

**Лема 13.9.** *Нехай $\mathsf{A}$ – лінійний оператор з $X$ на $Y$, де $Y$ – повний напівнормований простір, а $X$ – ТВП, в якому всякий окіл нуля $G$ має властивість*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} nG = X. \tag{13}$$

*Тоді для будь-якого околу нуля $E \subset X$ множина $\overline{\mathsf{A}E}$ містить деякий окіл нуля $V \subset Y$.*

Сюр'єктивність $\mathsf{A}$ (виражена прийменником "на") істотна!

◄ Візьмемо в $X$ існуючий за лемою 5.42 окіл нуля $G$ такий, що $G - G \subset E$. Тоді з огляду на адитивність $\mathsf{A}$ $\mathsf{A}G - \mathsf{A}G \subset \mathsf{A}E$, звідки за наслідком 5.21 $\overline{\mathsf{A}G} - \overline{\mathsf{A}G} \subset \overline{\mathsf{A}E}$.

Позначимо $D = \overline{\mathsf{A}G}^{\circ}$. Зважаючи на однорідність $\mathsf{A}$ всі множини $\mathsf{A}(nG)$ гомеоморфні $\mathsf{A}G$, відтак наслідок 6.2, застосований до $Q_n = nG$ і $f = \mathsf{A}$, стверджує, що $D \neq \varnothing$. При цьому за побудовою множина $D$ відкрита і $D - D \subset \overline{\mathsf{A}E}$, тож можемо покласти $V = D - D$. ▶

У напівнормованому просторі $X$ умову (13) задовольняють, очевидно, всі кулі $B_X(0, r)$, $r > 0$, а значить і взагалі всі околи (бо кожен із них містить усі такі кулі достатньо малого радіуса – див. п. 8.1). Це дозволяє сконкретизувати лему 13.9 так:

**Наслідок 13.8.** *Нехай $\mathsf{A}$ – лінійний оператор, відображаючий напівнормований простір $X$ на повний напівнормований простір $Y$, Тоді для будь-якого околу нуля $E \subset X$ множина $\overline{\mathsf{A}E}$ містить деякий окіл нуля $V \subset Y$.*

**Лема 13.10.** *Нехай $X$ – повний напівнормований простір, $Y$ – нормований простір, $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\operatorname{im}\mathsf{A} = Y$. Тоді для будь-яких $r_0 > r_1 > 0$*

$$\overline{\mathsf{A}B_X(0, r_1)} \subset \mathsf{A}B_X(0, r_0). \tag{14}$$

◀ Візьмемо довільну строго спадну послідовність $(r_n, n = 2, 3, \ldots)$ таку, що

$$\sum_{n=2}^{\infty} r_n < r_0 - r_1, \tag{15}$$

і позначимо $B_n = B_X(0, r_n), n \in \mathbb{Z}_+$. Вибираємо довільну точку $y_1 \in \overline{\mathsf{A}B_1}$ і далі для $n = 2, 3, \ldots$ вибираємо $y_n \in \overline{\mathsf{A}B_n}$ хоч і неоднозначно, але вже не зовсім довільно. А саме, маючи $y_{n-1} \in \overline{\mathsf{A}B_{n-1}}$, беремо в $Y$ існуючий за лемою 13.9 окіл нуля $W_n \subset \overline{\mathsf{A}B_n}$. За лемою 5.3 $y_{n-1}$ – пристайна точка множини $\mathsf{A}B_{n-1}$, тобто всякий окіл цієї точки, зокрема $y_{n-1} - W_n$, має непорожній перетин з $\mathsf{A}B_{n-1}$. Тоді із включення $W_n \subset \overline{\mathsf{A}B_n}$ маємо

$$(y_{n-1} - \overline{\mathsf{A}B_n}) \cap \mathsf{A}B_{n-1} \neq \varnothing,$$

а значить існує точка $x_{n-1} \in B_n$ така, що $\mathsf{A}x_{n-1} \in y_{n-1} - \overline{\mathsf{A}B_n}$. Покладаємо $y_n = y_{n-1} - \mathsf{A}x_{n-1}$. За побудовою $y_n \in \overline{\mathsf{A}B_n}$ і $\mathsf{A}x_{n-1} = y_{n-1} - y_n$. Замінивши в останній рівності $n$ на $k$ і просумувавши її по $k$ від 2 до $n$, дістанемо

$$y_n = y_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{A}x_k. \tag{16}$$

Зауваживши, що $\|x_k\| < r_k$ за вибором $x_k$, виводимо з (15) фундаментальність послідовності сум $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Тоді внаслідок повноти $X$ існує (можливо не єдина) точка $z \in X$ така, що

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k \to z, \tag{17}$$

звідки за умовою неперервності $\mathsf{A}$ і лемою 5.17

$$\mathsf{A}\sum_{k=1}^{n-1} x_k \to \mathsf{A}z.$$

При цьому за умовою лінійності $\mathsf{A}$

$$\mathsf{A}\sum_{k=1}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathsf{A}x_k.$$

З останніх двох співвідношень і (16) маємо

$$y_n \to y_1 - \mathsf{A}z. \tag{18}$$

Очевидно, для всякого $y \in \mathsf{A}B_n \quad \|y\| \leqslant \|\mathsf{A}\| r_n$. За лемою 5.23

$$\sup_{y \in \overline{\mathsf{A}B_n}} \|y\| = \sup_{y \in \mathsf{A}B_n} \|y\|.$$

Із цих двох співвідношень, пригадавши, що $y_n \in \overline{\mathsf{A}B_n}$, одержуємо $\|y_n\| \leqslant \|\mathsf{A}\| r_n$. При цьому $r_n \to 0$ за умовою (15), так що $y_n \to 0$. За умовою простір $Y$ нормований (а не просто напівнормований), тож границя всякої збіжної послідовності його точок єдина. Тоді з $y_n \to 0$ і (18) маємо $y_1 = \mathsf{A}z$. При цьому $\|z\| < r_0$ внаслідок (17), (15) і нерівності $\|x_k\| < r_k$ (за вибором $x_k$). Отже, довільним чином вибрана точка $y_1 \in \overline{\mathsf{A}B_1}$ виявилась приналежною $\mathsf{A}B_0$. Співвідношення (14), а з ним і всю лему, доведено. ▶

**Теорема 13.3** (Банах)**.** *Нехай $X$ – повний напівнормований простір, $Y$ – банахів простір, $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\operatorname{im}\mathsf{A} = Y$. Тоді $\mathsf{A}$ – відкрите відображення.*

◀ Візьмемо в $X$ окіл нуля $U$. Щоб довести теорему, достатньо, згідно з лемою 5.41, показати, що $\mathsf{A}U$ містить деякий окіл нуля $V \subset Y$.

Як показано в п. 8.1, $U$ містить деяку кулю $B_X(0,r), r > 0$. Тоді за лемою 13.10 для будь-якого $\delta \in ]0, r[$ $\overline{\mathsf{A}B_X(0,\delta)} \subset \mathsf{A}U$. Тепер існування потрібного околу $V$ випливає з наслідку 13.8, застосованого до $E = B_X(0,\delta)$. ►

Теорему 13.3 називають **теоремою про відкрите відображення**. Усі технічні труднощі доведення цього фундаментального результату увібрала в себе лема 13.10, яку в більшості книг включають безпосередньо в доведення теореми, не формулюючи як окреме твердження. Ми виокремили її почасти для того, щоб розвантажити доведення основного результату, але насамперед тому, що в ній, на відміну від теореми, не вимагається повнота простору $Y$.

### 13.4. Обернені оператори.

**Теорема 13.4.** *Нехай $X$ і $Y$ – напівнормовані простори, а $\mathsf{A} : X \to Y$ – сюр'єктивний адитивний оператор. Тоді для того щоб існував і був обмеженим обернений оператор $\mathsf{A}^{-1} : Y \to X$, необхідно, а якщо простір $X$ нормований, то й достатньо, щоб існувало додатне число $m$ таке, що*

$$\|\mathsf{A}x\| \geqslant m\|x\|, \quad x \in X. \tag{19}$$

*Якщо це виконано, то $\|\mathsf{A}^{-1}\| \leqslant 1/m$.*

◄ Необхідність. Якщо $\mathsf{A}^{-1}$ існує, то за лемою 3.2 він адитивний. Якщо до того ж $\mathsf{A}^{-1}$ обмежений, то для будь-якого $y \in Y$ $\|\mathsf{A}^{-1}y\| \leqslant \|\mathsf{A}^{-1}\|\,\|y\|$. Зважаючи на сюр'єктивність $\mathsf{A}$ це те саме, що для будь-якого $x \in X$ $\|x\| \leqslant \|\mathsf{A}^{-1}\|\,\|\mathsf{A}x\|$. А це нерівність (19) із $m = 1/\|\mathsf{A}^{-1}\|$.

Достатність і друге твердження. За умови (19), де $m > 0$, маємо імплікацію

$$\mathsf{A}x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0.$$

Оскільки в частині достатності простір $X$ нормований (а не просто напівнормований), то ця імплікація означає, що $\ker \mathsf{A} = \{0\}$. Тоді за лемою 3.11 $\mathsf{A}$ ін'єкція, відтак за лемою 3.2 обернений оператор також адитивний. При цьому за умовою $\operatorname{im}\mathsf{A} = Y$. Тоді з (19), позначивши $y = \mathsf{A}x$, одержуємо $\|\mathsf{A}^{-1}y\| \leqslant \|y\|/m$. ►

Очевидно, умова (19) рівносильна такій:

$$\inf_{\|x\|=1} \|\mathsf{A}x\| \geqslant m.$$

Це спільно з теоремою 13.4 приводить до такого висновку.

**Наслідок 13.9.** *Нехай $X$ і $Y$ – напівнормовані простори, а $\mathsf{A} : X \to Y$ – сюр'єктивний адитивний оператор. Тоді необхідною, а якщо простір $X$ нормований, то й достатньою умовою існування обмеженого оберненого оператора $\mathsf{A}^{-1} : Y \to X$ є нерівність $\inf\limits_{\|x\|=1} \|\mathsf{A}x\| > 0$.*

**Теорема 13.5** (Банах)**.** *Нехай $X$ і $Y$ – банахові простори, а $\mathsf{A} : X \to Y$ – бієктивний обмежений лінійний оператор. Тоді обернений оператор $\mathsf{A}^{-1}$ також обмежений.*

◀ За наслідком 13.1 $\mathsf{A}$ неперервний. Тоді теорема 13.3 стверджує відкритість $\mathsf{A}$, відтак за лемою 5.18 оператор $\mathsf{A}^{-1}$ неперервний. За лемою 3.2 він лінійний. Тоді наслідок 13.1 стверджує обмеженість $\mathsf{A}^{-1}$. ▶

Доведення фундаментальної теореми 13.5 (її ще називають **теоремою про обернений оператор**) виявилось таким коротким завдяки тому, що ми вивели її з теореми про відкрите відображення, нетривіальність доведення якої читач, без сумніву, оцінив. Можливий і інший шлях (див., наприклад, [КФ]): спочатку довести теорему про обернений оператор (безпосереднє доведення буде значно довшим), тоді вивести з неї один цікавий сам по собі проміжний результат ("лему про трійку"), а вже з нього вивести теорему про відкрите відображення.

Обмежений лінійний бієктивний оператор, відображаючий один нормований простір на інший, називається *оборотним*, якщо обернений до нього оператор також обмежений. Теорема 13.5 стверджує оборотність бієктивного оператора $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ за умови повноти обох нормованих просторів. Покажемо, що для неповних просторів висновок теореми неправильний.

**Приклад 13.3.** Нехай $Y = X$, де $X$ – простір фінітних послідовностей дійсних чисел, наділений нормою простору $\ell_1$ : $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x^k|$ (члени послідовності нумеруємо верхнім індексом, а самі послідовності – нижнім). Задамо оператор $\mathsf{A}$ в $X$ рівністю $\mathsf{A}x = (x^k/k, k \in \mathbb{N})$. Очевидно, $\mathsf{A}$ лінійний і бієктивний, а обернений оператор діє за правилом $\mathsf{A}^{-1}x = (kx^k, k \in \mathbb{N})$. Нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x^k|}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x^k|$$

показує, що $\|\mathsf{A}\| \leqslant 1$ (насправді навіть $=1$ – поясніть чому), так що $\mathsf{A}$ обмежений.

Покладемо $x_n = (1, 1/2^2, \ldots, 1/n^2, 0, 0, \ldots)$. Тоді

$$\|x_n\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6}, \quad \|\mathsf{A}^{-1}x_n\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

що доводить необмеженість $\mathsf{A}^{-1}$.

Теорема про обернений оператор приводить до ряду важливих висновків, серед яких дві наведені нижче теореми.

**Теорема 13.6** (Банах)**.** *Нехай $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ – норми на векторному просторі $X$ такі, що нормований простір $(X, \|\cdot\|_1)$ повний і*

$$\|\cdot\|_1 \leqslant c_1\|\cdot\|_2 \tag{20}$$

*для деякого $c_1 > 0$. Тоді: нормований простір $(X, \|\cdot\|_2)$ теж повний; існує $c_2 > 0$ таке, що $\|\cdot\|_2 \leqslant c_2\|\cdot\|_1$.*

◀ Замість $(X, \|\cdot\|_i)$ пишемо $X_i$. Зважаючи на (20) усяка фундаментальна послідовність в $X_2$ буде фундаментальною і в просторі $X_1$, який за умовою повний. Цим доведено перше твердження.

За умови (20) одиничний оператор $\mathbb{I} : X_1 \to X_2$ неперервний у нулі, відтак і на всьому $X_1$. Тоді з повноти $X_2$ випливає за теоремою 13.5 обмеженість оберненого оператора $\mathbb{I} : X_2 \to X_1$, рівносильна за теоремою 13.4 існуванню такого $m > 0$, що $\|\cdot\|_1 \geqslant m\|\cdot\|_2$. ▶

Ось одне із застосувань теореми 13.6.

Пригадаймо, що векторний простір називається *прямою сумою* своїх лінійних підмножин $X_1, \ldots, X_p$, якщо всякий вектор $x \in X$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$x = x^1 + \ldots + x^p, \quad \text{де} \quad x^1 \in X_1, \ldots, x^p \in X_p. \tag{21}$$

Якщо $X$ нормований простір, то для поданого у вигляді (21) вектора $x$ покладаємо

$$\mathfrak{m}_p(x) = \|x^1\| + \ldots + \|x^p\|. \tag{22}$$

Очевидно, $\mathfrak{m}_p$ теж норма і $\|x\| \leqslant \mathfrak{m}_p(x)$. Це спільно з теоремою 13.6 приводить до такого висновку.

**Наслідок 13.10.** *Нехай векторний простір $X$ є прямою сумою своїх підпросторів $X_1, \ldots, X_p$, а норма $\mathfrak{m}_p$ на $X$ задається рівністю* (22)*, в якій $x = x^1 + \ldots + x^p,\ x^1 \in X_1, \ldots, x^p \in X_p$. Тоді існує таке додатне число $c$, що $\mathfrak{m}_p \leqslant c\|\cdot\|$.*

Нехай $X$ і $Y$ – нормовані простори над полем $\mathbb{K}$. Для довільних $x, x_1 \in X,\ y, y_1 \in Y,\ \lambda \in \mathbb{K}$ покладаємо за означенням

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2),\ \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y),\ \|(x, y)\| = \|x\|+\|y\|,$$

наділивши цим декартів добуток $X \times Y$ структурою нормованого простору. Очевидно, він буде повним у точності тоді, коли такими є обидва співмножники.

Для довільного відображення $f : X \to Y$ позначимо $\Gamma_f = \{(x, f(x)),\ x \in X\}$. Це позначення має смисл для довільних множин $X$ і $Y$.

**Теорема 13.7** (Банах)**.** *Нехай $X$ і $Y$ – банахові простори, а $\mathsf{A} : X \to Y$ – лінійний оператор такий, що множина $\Gamma_{\mathsf{A}}$ замкнута в $X \times Y$. Тоді $\mathsf{A}$ обмежений.*

◀ Множина $\Gamma_{\mathsf{A}}$, очевидно, лінійна. Будучи до того ж замкнутою множиною в банаховому просторі, вона сама є банаховим простором. Задамо оператор $\Lambda : \Gamma_{\mathsf{A}} \to X$ рівністю $\Lambda(x, \mathsf{A}x) = x$. Очевидно, він лінійний і бієктивний, а обернений оператор діє за формулою $\Lambda^{-1}x = (x, \mathsf{A}x)$. Із цієї рівності, виразу норми в $X \times Y$ і нерівності (7) маємо

$$\|x\| + \|\mathsf{A}x\| \leqslant \|\Lambda^{-1}\|\,\|x\|. \tag{23}$$

При цьому $\|\Lambda(x, \mathsf{A}x)\| = \|x\| \leqslant \|x\|+\|\mathsf{A}x\|$. Отже оператор $\Lambda$ обмежений ($\|\Lambda\| \leqslant 1$), відтак теорема 13.5 стверджує, що $\|\Lambda^{-1}\| < \infty$. Це разом із (23) і очевидною нерівністю $\|\mathsf{A}x\| \leqslant \|x\| + \|\mathsf{A}x\|$ доводить обмеженість $\mathsf{A}$. ▶

Теорему 13.6 називають **теоремою про замкнутий графік**.

На завершення цього пункту відзначимо таке: 1) оборотний оператор, відображаючий деякий напівнормований простір у себе ж (а не в інший простір), це окремий випадок оборотного елемента мультиплікативного групоїда (див. п. 3.2); 2) $\mathcal{L}(X)$ не просто лінійний простір, а лінійне кільце. Завдяки цим двом фактам уведене в п. 3.7 поняття спектра стосується й обмежених лінійних операторів у напівнормованому просторі. А саме, згідно з даним там означенням, *спектр оператора* $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X)$,

де $X$ – комплексний напівнормований простір, це множина тих $\lambda \in \mathbb{C}$, для яких оператор $\mathsf{A} - \lambda\mathbf{1}$ необоротний.

13.5. Обмежені лінійні оператори в гільбертовому просторі. Скрізь у цьому пункті H – гільбертів простір.

**Лема 13.11.** *Нехай $T$ – банахів простір, $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}, T)$, а $(h_n)$ – ортобазис у $\ker \mathsf{A}^\perp$. Тоді для всякого $x \in \mathrm{H}$*

$$\mathsf{A}x = \sum_n \langle x \,|\, h_n\rangle \mathsf{A}h_n, \tag{24}$$

*де ряд збігається за нормою.*

◀ За умовою для будь-якого $y \in \ker \mathsf{A}^\perp \quad y = \sum \langle y \,|\, h_n\rangle h_n$, звідки за припущенням про $\mathsf{A} \quad \mathsf{A}y = \sum \langle y \,|\, h_n\rangle \mathsf{A}h_n$. Поклавши в цій рівності $y = \mathrm{Pr}_{\ker \mathsf{A}^\perp} x$, перетворимо її на (24).▶

**Теорема 13.8.** *Нехай $(h_n)$ – ортонормована послідовність у гільбертовому просторі* H, *а $(\gamma_n)$ – обмежена числова послідовність, усі члени якої відмінні від нуля. Тоді: (i) рівність*

$$\mathsf{A}x = \sum_n \gamma_n \langle x \,|\, h_n\rangle h_n \tag{25}$$

*задає лінійний оператор $\mathsf{A}$ в* H; *(ii) кожне $\gamma_n$ є власним числом оператора $\mathsf{A}$, якому (числу) відповідає власний вектор $h_n$; (iii) $(h_n)$ – ортонормований базис в $\overline{\mathrm{im}\,\mathsf{A}}$; (iv) $\|\mathsf{A}\| \leqslant \sigma \equiv \sup\limits_n |\gamma_n|$ (так що $\mathsf{A}$ обмежений).*

◀ Позначимо $c_n = \gamma_n \langle x \,|\, h_n\rangle$. Тоді $\sum |c_n|^2 \leqslant \sigma^2 \sum |\langle x \,|\, h_n\rangle|^2$, звідки за нерівністю Бесселя $\sum |c_n|^2 \leqslant \sigma^2 \|x\|^2$. Відтак лема **??** стверджує збіжність ряду в (25) і тим самим коректність задання $\mathsf{A}$ цією рівністю. Лінійність $\mathsf{A}$ очевидна, тож перше твердження доведено.

Оскільки за умовою $\langle h_n \,|\, h_k\rangle = \delta_{nk}$, то з (25) маємо $\mathsf{A}h_k = \gamma_k h_k$,

$$\langle \mathsf{A}x \,|\, h_k\rangle = \gamma_k \langle x \,|\, h_k\rangle. \tag{26}$$

Перша з цих рівностей доводить друге твердження; друга перетворює (25) до вигляду

$$\mathsf{A}x = \sum \langle \mathsf{A}x \,|\, h_n\rangle h_n$$

і тим самим доводить третє твердження. Із (iii) маємо за нерівністю Бесселя $\|\mathsf{A}x\|^2 \leqslant \sum |\langle \mathsf{A}x \,|\, h_n\rangle|^2$, що з огляду на (26) можна записати як $\|\mathsf{A}x\|^2 \leqslant \sum |\gamma_n|^2 |\langle x \,|\, h_n\rangle|^2$. Звідси $\|\mathsf{A}x\|^2 \leqslant \sigma^2 \sum |\langle x \,|\, h_n\rangle|^2 \leqslant \sigma^2 \|x\|^2$, що доводить (iv). ►

**Теорема 13.9** (Гільберт, Шмідт)**.** *Нехай* E *– евклідів простір над полем* $\mathbb{K}$*, елементами якого є* $\mathbb{K}$*-значні функції на* $[a,\, b]$*, в тому числі всі неперервні функції (тобто* $\mathrm{C}[a,b] \subset \mathrm{E} \subset \mathbb{K}^{[a,b]}$*). Припустимо також, що: (а) всяка послідовність в* E*, рівномірно збіжна до деякої функції* $g \in \mathrm{E}$*, збігається до неї ж (і всіх невідрізненних від* $g$ *функцій) і за евклідовою напівнормою простору* E*; (б) всякі дві нерозрізненні неперервні функції співпадають. Нехай далі* $\mathsf{A}$ *– обмежений лінійний оператор в* E *такий, що* $\operatorname{im}\mathsf{A} \subset \mathrm{C}[a,\, b]$*,* $f$ *– елемент* E*, а* $(h_n, n \in \mathbb{N})$ *– ортонормована послідовність в* E *така, що*

$$\sum_{k=1}^{n} \langle f \,|\, h_k\rangle h_k \to f \tag{27}$$

*і*

$$\varkappa \equiv \sup_{a\leqslant t\leqslant b} \sum_{n=1}^{\infty} |\mathsf{A}h_n(t)|^2 < \infty. \tag{28}$$

*Тоді:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{a\leqslant t\leqslant b} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f \,|\, h_k\rangle \mathsf{A}h_k(t)| = 0, \tag{29}$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left| \sum_{k=1}^{n} \langle f \,|\, h_k\rangle \mathsf{A}h_k(t) - \mathsf{A}f(t) \right| = 0. \tag{30}$$

Останні дві рівності означають, що функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \langle f \,|\, h_n\rangle \mathsf{A}h_n$ збігається до $\mathsf{A}f$ абсолютно і рівномірно на $[a,\, b]$ (і навіть у дещо сильнішому, завдяки наявності супремуму в (29), розумінні).

◄ Позначимо

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle f \,|\, h_k\rangle \mathsf{A}h_k|, \quad g_n = \sum_{k=1}^{n} \langle f \,|\, h_k\rangle \mathsf{A}h_k.$$

За нерівністю Коші – Буняковського для сум

$$R_n^2 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle f \,|\, h_k\rangle|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mathsf{A}h_k|^2,$$

звідки

$$\sup_{a\leqslant t\leqslant b} R_n(t)^2 \leqslant \varkappa \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle f \mid h_k\rangle|^2.$$

Перший множник у правій частині нерівності скінченний за умовою (28), а другий прямує до нуля, як залишок збіжного згідно з нерівністю Бесселя ряду. Рівність (29) доведено. Вона очевидним чином зумовлює фундаментальність послідовності $(g_n)$ за чебишовською нормою простору $\mathrm{C}[a,b]$, якому за припущенням про $\mathsf{A}$ належать усі $g_n$. У прикладі 8.3 ми встановили повноту цього простору. Отже існує неперервна функція $g$ така, що

$$\lim_{n\to\infty} \max_{a\leqslant t\leqslant b} |g_n(t) - g(t)| = 0. \tag{31}$$

Тоді за припущенням (а) $g_n \to g$. З іншого боку, із (27) і припущення $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$ маємо $g_n \to \mathsf{A}f$, що разом із попереднім співвідношенням зумовлює, згідно з наслідком 4.1 нерозрізненність $g$ і $\mathsf{A}f$. Алу за припущенням про $\mathsf{A}$ функція $\mathsf{A}f$ також неперервна, відтак за припущенням (б) $g = \mathsf{A}f$, що перетворює (31) на (30).▶

## § 14. Спряжені простори і оператори

**14.1. Означення спряженого простору і теорема про ‘‘самоспряженість’’ гільбертового простору.** Якщо $X$ – ТВП над полем $\mathbb{K}$, то простір лінійних над цим полем неперервних функціоналів на $X$ позначають $X^*$ або $X'$ і називають *спряженим* з $X$. Інакше кажучи, $X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ (у п. 3.6 було домовлено, що навіть лінійний над полем $\mathbb{R}$ функціонал може набувати комплексні значення). У зв'язку з цим на спряжені простори поширюється все сказане в § 13. Зокрема: $X^*$ – векторний простір; лінійний функціонал на напівнормованому просторі неперервний у точності тоді, коли він обмежений; для обмеженого лінійного функціонала $\mathsf{f}$ на напівнормованому просторі $X$

$$\sup_{x\in\overline{B}_X(0,1)} |\mathsf{f}x| = \sup_{x\in B_X(0,1)} |\mathsf{f}x| = \sup_{x\in S_X(0,1)} |\mathsf{f}x| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|\mathsf{f}x|}{\|x\|}.$$

Спільне значення цих чотирьох виразів називають нормою функціонала $\mathsf{f} \in X^*$ (це не нове поняття, а окремий випадок напівнорми обмеженого лінійного оператора) і позначають $\|\mathsf{f}\|$. Теорема 13.1 стверджує повноту

нормованого простору $X^*$, спряженого з напівнормованим простором $X$ (незалежно від того, чи повний $X$). Очевидним чином конкретизуються для випадку $Y = \mathbb{C}$ леми 13.7 і 13.8, теореми 13.2, 13.3 і 13.6, наслідки 13.1, 13.2, 13.3 і 13.7. Але є й специфічні для функціоналів факти. До них належать, зокрема, численні теореми про будову $X^*$ за тих чи інших припущень про $X$ (див., наприклад, [КФ, ЛС]). Найважливішою серед них є

**Теорема 14.1** (Ріс, Фреше)**.** *Нехай* $\mathsf{f}$ *– обмежений лінійний функціонал на гільбертовому просторі* H. *Тоді існує єдиний вектор* $u \in \mathrm{H}$ *такий, що для всіх* $x \in \mathrm{H}$

$$\mathsf{f}x = \langle x \,|\, u\rangle. \tag{1}$$

*При цьому* $\|\mathsf{f}\| = \|u\|$.

◀ Позначимо $L = \ker \mathsf{f}$. Очевидно, це лінійна множина. За наслідком 5.5 вона замкнута. Отже $L$ – підпростір H. Якщо $l = \mathrm{H}$, то $\mathsf{f}$ – тотожно нульовий функціонал і єдиним вектором $u$ таким, що рівність (1) справджується при всіх $x$, є нульовий вектор. Тому міркуємо для випадку $L \neq \mathrm{H}$. Тоді знайдеться вектор $x_0 \in \mathrm{H}$ такий, що $\mathsf{f}x_0 = a_0 \neq 0$. Візьмемо довільний вектор $x \in \mathrm{H}$ і позначимо $a = \mathsf{f}x$. За теоремою 9.3 існують $y_0, y \in L$ і $z_0, z \in L^\perp$ такі, що $x_0 = y_0 + z_0$, $x = y + z$. Тоді $ax_0 - a_0x = ay_0 - a_0y + az_0 - a_0z$. Рівність $\mathsf{f}(ax_0 - a_0x) = a\,\mathsf{f}x_0 - a_0\,\mathsf{f}x = 0$ показують, що $ax_0 - a_0x \in L$. Тому $az_0 - a_0z = 0$, звідки $a\|z_0\|^2 = a_0\langle z, z_0\rangle$. При цьому $\|z_0\| \neq 0$, бо інакше вектор $x_0$ належав би $L$. Крім того, $\langle z|z_0\rangle = \langle x - y|z_0\rangle = \langle x|z_0\rangle$, тому що $y \in L, z_0 \in L_0^\perp$. Отже $a = a_0\langle x|z_0\rangle/\|z_0\|^2$. А це і є рівність (1) з $u = \|z_0\|^{-2}(\mathsf{f}x_0)z_0, z_0 = \mathrm{Pr}_L\, x_0$.

Якщо для всіх $x \in \mathrm{H}$ $\langle x|u_1\rangle = \langle x|u_2\rangle$, то $u_1 - u_2 \in \mathrm{H}^\perp = \{0\}$. Цим доведено єдиність вектора $u$ з властивістю (1).

Із (1) маємо за нерівністю Шварца (3.55) $|\mathsf{f}x| \leqslant \|x\|\,\|u\|$, звідки $\|\mathsf{f}\| \leqslant \|u\|$. З іншого боку, $\|u\|^2 = \mathsf{f}u \leqslant \|\mathsf{f}\|\,\|u\|$ (рівність спирається на (1), нерівність – на (5)), так що $\|u\| \leqslant \|\mathsf{f}\|$. ▶

`14.2. Теорема Гана - Банаха і супутні результати.` Ще одна відмітна риса просторів $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ в класі всіх $\mathcal{L}(X, Y)$ полягає в можливості істотно підсилити для них лему 13.8. Виявляється, заданий на лінійній підмножині напівнормованого простору обмежений лінійний функціонал продовжується зі збереженням норми не тільки на замикання

області визначення, але й на весь простір. Цей результат, окремо для дійсних і комплексних функціоналів, а також деякі наслідки з нього, і є предметом даного пункту.

Назвемо дійсний функціонал $p$ на дійсному векторному просторі $X$ *опукло-однорідним*, якщо для будь-яких $x, y \in X$ і $t \geqslant 0$

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \tag{2}$$

$$p(tx) = tp(x) \tag{3}$$

(виконання останньої рівності при $t < 0$ не вимагається). Очевидним прикладом такого функціонала є напівнорма. Говорять, що дійсна функція $q$ на довільній множині $X$ *підлягає* дійсній функції $p$ на $X$, якщо $q(x) \leqslant p(x)$ при всіх $x \in X$.

**Лема 14.1.** *Нехай $q$ – функціонал на адитивній групі, підлеглий функціоналові $p$ і такий, що при всіх $x$ $q(-x) = -q(x)$. Тоді при всіх $x$ $-p(-x) \leqslant q(x) \leqslant p(x)$.*

◀ Друга нерівність це просто умова підлеглості; перша – очевидний наслідок припущень леми. ▶

**Теорема 14.2 (**Ган, Банах**).** *Нехай $M_0$ – лінійна множина в дійсному векторному просторі $M$, $p$ – однорідно-опуклий функціонал на $M$, а $\mathsf{f}_0$ – лінійний функціонал на $M_0$ такий, що*

$$\mathsf{f}_0 x \leqslant p(x), \quad x \in M_0. \tag{4}$$

*Тоді існує підлеглий $p$ дійсний лінійний функціонал $\mathsf{f}$ на $M$ такий, що $\mathsf{f}x = \mathsf{f}_0 x$ при $x \in M$.*

◀ Якщо $m_0 = M$, то $\mathsf{f} = \mathsf{f}_0$, тому міркуємо для випадку $M_0 \neq M$. Беремо довільний вектор $x_1 \in M_1 \setminus M_0$ і покладаємо

$$M_1 = M_0 + \mathbb{R}x_1 \equiv \{x + tx_1, x \in M_0, t \in \mathbb{R}\}.$$

Зап побудовою множина $M_1$ лінійна і містить $M_0$, а також точку $x_1$ (так що $M_1 \neq M_0$). Із лінійності $\mathsf{f}_0$ на $M_0$, умови (4) і закладеної в припущення про $p$ нерівності (2) маємо для довільних $x, y \in M_0$

$$\mathsf{f}_0 x + \mathsf{f}_0 y = \mathsf{f}_0(x+y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

так що $\mathsf{f}_0 x - p(x - x_1) \leqslant p(y_1 + x) - \mathsf{f}_0 y$. Звідси, позначивши

$$a = \sup_{x \in M_0} (\mathsf{f}_0 x - p(x - x_1)), \tag{5}$$

одержуємо

$$\mathsf{f}_0 y + a \leqslant p(y + x_1), \quad y \in M_0. \tag{6}$$

Задамо функціонал $\mathsf{f}_1$ на $M_1$ рівністю

$$\mathsf{f}_1(x + tx_1) = \mathsf{f}_0 x + ta, \quad x \in M_0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

За побудовою він лінійний і $\mathsf{f}_1|_{X_0} = \mathsf{f}_0$. Зважаючи на (5) і (6) для будь-яких $x, y \in M_0$ і $s \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{f}_0(sx) - p(sx - x_1) \leqslant a \leqslant p(sy + x_1) - \mathsf{f}_0(sy).$$

Узявши $s > 0$, поділивши всі три члени нерівності на $s$ і позначивши $t = 1/s$, дістанемо з урахуванням закладеної в припущення про $p$ рівності (3) (переписаної у формі $tp(z/t) = p(z)$)

$$\mathsf{f}_0 y + ta \leqslant p(y + tx_1), \quad y \in M_0,\ t > 0, \tag{8}$$

$$-p(x - tx_1) \leqslant -\mathsf{f}_0 x + a, \quad x \in M_0,\ t > 0.$$

Останню нерівність разом із пробігом змінних у ній можна записати ще так:

$$-p(x + ux_1) \leqslant -(\mathsf{f}_0(x + ua)), \quad x \in M_0,\ u < 0.$$

Це разом із (8), (7) і (4) показує, що $\mathsf{f}_1 x \leqslant p(x), x \in M_1$.

Позначимо $\Phi$ сукупність усеможливих лінійних продовжень $\mathsf{f}$ функціонала $\mathsf{f}_0$, підлеглих на своїй області визначення функціоналові $p$.

Упорядкуємо $\Phi$, вважаючи за означенням, що $\mathsf{f} \sqsubset \mathsf{g}$, якщо $\mathsf{g}$ є продовженням $\mathsf{f}$, тобто $\operatorname{dom}\mathsf{f} \subset \operatorname{dom}\mathsf{g}$ і $\mathsf{g}|_{\operatorname{dom}\mathsf{f}} = \mathsf{f}$. Нехай $\{\mathsf{g}_\alpha, \alpha \in I\}$ – довільний зростаючий ланцюг (див. п. 2.1) у $\Phi$, тобто $I$ – лінійно впорядкована множина і $\mathsf{g}_\alpha \sqsubset \mathsf{g}_\beta$ при $\alpha \prec \beta$. Задамо функціонал $\mathsf{g}$ на $\bigcup\limits_{\alpha \in I} \mathsf{g}_\alpha$ як спільне продовження всіх $\mathsf{g}_\alpha$ на цю множину. Рівносильно: $\mathsf{g}x = \mathsf{g}_\alpha x$ при $x \in \operatorname{dom}\mathsf{g}_\alpha$. Очевидно, $\mathsf{g}$ успадковує від усіх $\mathsf{g}_\alpha$ лінійність і підлеглість $p$, а значить сам належить $\Phi$. Тоді за лемою Цорна у $\Phi$ існує максимальний елемент $\mathsf{f}$. Якби його область визначення була вужчою за $M$,

то ми могли би розширити її описаним вище способом, що суперечить максимальності $\mathsf{f}$. Отже $\operatorname{dom}\mathsf{f} = M$. ▶

Комплексний варіант теореми Гана – Банаха потребує дещо сильніших припущень і окремого доведення, яке спирається на дійсний варіант теореми і на становляче самостійний інтерес допоміжне твердження.

**Лема 14.2.** *Нехай функціонал* $\mathsf{f}$ *на комплексному векторному просторі* $X$ *задається рівністю*

$$\mathsf{f}x = \mathsf{g}x - i\mathsf{g}(ix), \tag{9}$$

*де* $\mathsf{g}$ *– лінійний над полем* $\mathbb{R}$ *функціонал на* $X$. *Тоді* $\mathsf{f}$ *лінійний над полем* $\mathbb{C}$.

◀ Із лінійності $\mathsf{g}$ над $\mathbb{R}$ маємо для довільних $x \in X$ і $\mu, \nu \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{g}((\mu+\nu i)x) = \mu\mathsf{g}x + \nu\mathsf{g}(ix),\ \mathsf{g}(i(\mu+\nu i)x) = -\nu\mathsf{g}x + \mu\mathsf{g}(ix),$$

звідки з огляду на (9) $\mathsf{f}((\mu+\nu i)x) = (\mu+\nu i)\mathsf{f}x$. ▶

**Теорема 14.3.** *Нехай* $X_0$ *лінійна множина в комплексному напівнормованому просторі* $X$, *а* $\mathsf{f}_0$ *– лінійний над полем* $\mathbb{C}$ *функціонал на* $X_0$ *такий, що*

$$|\mathsf{f}_0 x| \leqslant C\|x\|, \quad x \in X_0, \tag{10}$$

*де* $C$ *– деяке додатне число. Тоді існує лінійний над* $\mathbb{C}$ *функціонал* $\mathsf{f}$ *на* $X$ *такий, що*

$$\mathsf{f}x = \mathsf{f}_0 x, \quad x \in X, \tag{11}$$

$$|\mathsf{f}x| \leqslant C\|x\|, \quad x \in X. \tag{12}$$

Загальність теореми не зменшиться, якщо замінити в ній параметр $C$ конкретним додатним числом, наприклад одиницею. Однак наявність у формулюванні теореми параметра полегшить виведення з неї важливих наслідків.

◀ Позначимо $M$ і $M_0$ дійсні векторні простори, утворені з $X$ і $X_0$ відповідно вилученням із сигнатури (див. п. 3.1) операцій множення на числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Інакше кажучи, $X$ і $M$ (і так само $X_0$ і $M_0$) мають однакову множину точок (векторів) і однакову операцію додавання, але перший є простором над полем $\mathbb{C}$, а другий над полем $\mathbb{R}$. При цьому операції множення на числа $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ є і в $M$ (якщо $x \in M$, то $x \in X$, а

значить для будь-якого $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda x \in X = M$), просто вони не входять у сигнатуру і тим самим в означення лінійного функіонала на $M$ чи $M_0$.

Задамо функціонал $\mathsf{g}_0$ на $M_0$ рівністю $\mathsf{g}_0 x = \operatorname{Re}(\mathsf{f}_0 x)$. Це лінійний над полем $\mathbb{R}$ дійсний функціонал на $M_0$, тому за теоремою 14.1 (із $C\|\cdot\|$ у ролі $p$) він продовжується до деякого дійсного лінійного над $\mathbb{R}$ функціонала $\mathsf{g}$ на $M$ такого, що $\mathsf{g}(x) \leqslant C\|x\|$ при всіх $x \in M$. Остання властивість рівносильна, згідно з лемою 14.1, тому, що

$$|\mathsf{g}x| \leqslant C\|x\|, \quad x \in M. \tag{13}$$

Оскільки в цій формулі алгебрична структура множини $M$ не відіграє ролі, то замість $M$ можна написати й $X$.

Задамо функціонал $\mathsf{f}$ на $X$ рівністю (9). За лемою 14.2 він лінійний над полем $\mathbb{C}$. Оскільки значення функціонала $\mathsf{g}$ дійсні на всіх елементах множини $M$ (вона ж $X$), зокрема на $ix$, то

$$\mathsf{g}x = \operatorname{Re}(\mathsf{f}x). \tag{14}$$

Крім того, функціонал $\mathsf{g}$, будучи продовженням $\mathsf{g}_0$, має властивість

$$\mathsf{g}x = \operatorname{Re}(\mathsf{f}_0 x), \quad x \in X_0. \tag{15}$$

Оскільки за умовою $\mathsf{f}_0$ лінійний над $\mathbb{C}$, то $\mathsf{f}_0(ix) = ix$, що разом із (15) дає

$$\mathsf{g}(ix) = -\operatorname{Im}(\mathsf{f}_0 x), \quad x \in X_0,$$

звідки з урахуванням (9) і (14) маємо

$$\mathsf{f}x = \operatorname{Re}(\mathsf{f}_0 x) + i \operatorname{Im}(\mathsf{f}_0 x) \equiv \mathsf{f}_0 x, \quad x \in X_0.$$

Отже $\mathsf{f}$ – продовження $\mathsf{f}_0$. Залишається довести (12).

Зважаючи на лінійність $\mathsf{f}$ над $\mathbb{C}$ для будь-яких $x \in X$ і $\lambda \in \mathbb{C}$ $\mathsf{f}(\lambda x) = \lambda \mathsf{f}x$. Поклавши в цій рівності $\lambda = \lambda_x$, де

$$\lambda_x = \begin{cases} \overline{\mathsf{f}x}/|\mathsf{f}x|, & \text{якщо } \mathsf{f}x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } \mathsf{f}x = 0, \end{cases}$$

і риска символізує комплексне спряження, дістанемо з урахуванням (9)

$$\mathsf{g}(\lambda_x x) - i\mathsf{g}(i\lambda_x x) = |\mathsf{f}x|.$$

Пригадавши, що $\operatorname{im}\mathsf{g} \subset \mathbb{R}$, виводимо звідси, що $\mathsf{g}(i\lambda_x x) = 0$. Отже $|\mathsf{f}x| = \mathsf{g}(\lambda_x x)$, що разом із формулою (13) і поясненням до неї дає $|\mathsf{f}x| \leqslant C\|\lambda_x x\|$.

При цьому за побудовою $|\lambda_x| \leqslant 1$, звідки за властивістю (8.2) напівнорми $\|\lambda_x x\| \leqslant \|x\|$. ►

Теорему 14.3 також називають теоремою Гана – Банаха, хоча справжніми авторами її є Сухомлинов, Боненблюст і Собчик.

**Наслідок 14.1.** *Нехай $X_0$ – лінійна множина в напівнормованому просторі $X$ над полем $\mathbb{K}$, а $\mathsf{f}_0$ – обмежений лінійний над цим полем функціонал на $X_0$. Тоді існує лінійний над $\mathbb{K}$ функціонал $\mathsf{f}$ на $X$ із властивостями* (11) *і* $\|\mathsf{f}\|_X = \|\mathsf{f}_0\|_{X_0}$.

◄ Нерівність (6) із $\mathsf{f}_0$ у ролі $A$ стверджує, що $|\mathsf{f}_0 x| \leqslant \|\mathsf{f}_0\|_{X_0}\|x\|$ при всіх $x \in X_0$. Тоді за теоремою 14.1 і лемою 14.1 (якщо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) або теоремою 14.3 (якщо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) існує лінійний над $\mathbb{K}$ функціонал $\mathsf{f}$ на $X$ такий, що $\mathsf{f}|_{X_0} = \mathsf{f}_0$ і для всякого $x \in X \quad |\mathsf{f}x| \leqslant \|\mathsf{f}_0\|_{X_0}\|x\|$. Із другої властивості $\mathsf{f}$ і означення норми обмеженого лінійного функціонала маємо $\|\mathsf{f}\|_X \leqslant \|\mathsf{f}_0\|_{X_0}$. З іншого боку, очевидно, $\|\mathsf{f}_0\|_{X_0} \leqslant \|\mathsf{f}\|_X$. ►

Наслідок 14.1 також називають теоремою Гана – Банаха. Часто його формулюють так:

*Обмежений лінійний функціонал на лінійній підмножині напівнормованого простору продовжується зі збереженням норми до лінійного функціонала на всьому просторі.*

**Наслідок 14.2.** *Нехай $X$ – напівнормований простір, а $x_0$ – вектор у ньому такий, що $\|x_0\| \neq 0$. Тоді існує $\mathsf{f} \in X^*$ такий, що $\mathsf{f}x_0 = \|x_0\|$ і* $\|\mathsf{f}\| = 1$.

◄ Позначимо натягнуту на $x_0$ лінійну множину через $X_0$ і задамо лінійний функціонал $\mathsf{f}_0$ на $X_0$ рівністю $\mathsf{f}_0(tx_0) = t\|x_0\|, t \in \mathbb{R}$. Очевидно, $\|\mathsf{f}_0\|_{X_0} = 1$. Залишається скористатись наслідком 14.1. ►

**Наслідок 14.3.** *Для всякого вектора $x$ у напівнормованому просторі $X$*

$$\|x\| = \sup_{x \in S_{X^*}(0,1)} |\mathsf{f}x|.$$

◄ Позначимо праву частину рівності через $p(x)$. Якщо $\|x\| = 0$, то для всіх $\mathsf{f} \in X^* \quad \mathsf{f}x = 0$, тому міркуємо для випадку $\|x\| > 0$. Тоді за наслідком 14.2 існує $\mathsf{f}_x \in X^*$ такий, що $\mathsf{f}_x x = \|x\|$ і $\|\mathsf{f}_x\| = 1$. Разом ці дві рівності означають, що $\|x\| \leqslant p(x)$. З іншого боку, зважаючи на (6) $p(x) \leqslant \|x\|$. ►

За рамками даного курсу зостаються геометрична інтерпретація і пов'язані з нею численні застосування теореми Гана – Банаха. Про це можна прочитати в [БУШ, И, КА, КГ, КФ, ЛС].

`14.3. Спряжені оператори.` Нехай $\mathsf{f}$ – лінійний функціонал на векторному просторі $X$. Нехай $\mathsf{f}$ – лінійний функціонал на векторному просторі $X$. Тоді відображення $(\mathsf{f}, x) \mapsto \mathsf{f}x$ – білінійна форма, тож у позначеннях п. 3.6 $\mathsf{f}x$ записується як $\langle \mathsf{f}, x\rangle$. Такий запис зручний тоді, коли не тільки $x$, але й $\mathsf{f}$ розглядається як змінна.

Нехай $X$ і $Y$ – ТВП, $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тоді для будь-якого $\mathsf{g} \in Y^*$ відображення $x \mapsto \langle \mathsf{g}|\mathsf{A}x\rangle$ з $X$ в $Y$ лінійне і, за наслідком 5.6, неперервне, тобто є результатом дії на $x$ деякого неперервного лінійного функціонала $\mathsf{f}$. Очевидно, $\mathsf{f}$ залежить від $\mathsf{g}$ лінійно, тобто це результат дії деякого оператора, який позначають $\mathsf{A}^*$ і називають *спряженим* з $\mathsf{A}$. Інакше кажучи, спряжений з $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ оператор це лінійний оператор $\mathsf{A}^* : Y^* \to X^*$ такий, що для всіх $\mathsf{g} \in Y^*, x \in X$

$$\langle \mathsf{g}\mathsf{A}^*, x\rangle = \langle \mathsf{g}\mathsf{A}, x\rangle \tag{16}$$

(аргумент спряженого оператора пишемо зліва від нього). Лінійність $\mathsf{A}^*$ можна й не постулювати – вона очевидним чином випливає з (16).

Узявши в лемі 5.32 $Z = \mathbb{C}$, $\psi = \mathsf{A}$ (так що $q_\psi = \mathsf{A}^*$), доходимо такого висновку.

**Наслідок 14.4.** *Нехай $X$ і $Y$ – ТВП, $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тоді спряжений з $\mathsf{A}$ оператор неперервний відносно тихоновських топологій в $Y^*$ і $X^*$.*

**Теорема 14.4.** *Нехай $X$ і $Y$ – напівнормовані простори, $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тоді $\|\mathsf{A}^*\| = \|\mathsf{A}\|$, так що $\mathsf{A}^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

◀ Для будь-яких $\mathsf{g} \in Y^*$ і $x \in X$

$$|\langle \mathsf{g}, \mathsf{A}x\rangle| \leqslant \|\mathsf{g}\|\,\|\mathsf{A}x\| \leqslant \|\mathsf{g}\|\,\|\mathsf{A}\|\,\|x\|,$$

звідки з урахуванням (16) маємо

$$\|\mathsf{g}\mathsf{A}^*\| \equiv \sup_{\|x\|=1} |\langle \mathsf{g}\mathsf{A}^*, x\rangle| \leqslant \|\mathsf{A}\|\,\|\mathsf{g}\|.$$

Отже $\|\mathsf{A}^*\| \leqslant \|\mathsf{A}\|$, що доводить обмеженість $\mathsf{A}^*$, але ще не всю теорему.

Для кожного $x \notin \ker \mathsf{A}$ беремо існуючий за наслідком 14.2 функціонал $\mathsf{g}_x \in Y^*$ такий, що $\langle \mathsf{g}_x, \mathsf{A}x\rangle = \|\mathsf{A}x\|$ і $\|\mathsf{g}_x\| = 1$. Тоді

$$\|\mathsf{A}x\| = |\langle \mathsf{g}_x\mathsf{A}^*, x\rangle| \leqslant \|\mathsf{g}_x\mathsf{A}^*\|\,\|x\|,$$

звідки $\|\mathsf{A}\| \leqslant \sup\limits_{\|x\|=1} \|\mathsf{g}_x\mathsf{A}^*\|$. Але $\|\mathsf{g}_x\mathsf{A}^*\| \leqslant \|\mathsf{g}_x\|\,\|\mathsf{A}^*\| = \|\mathsf{A}^*\|$. ►

Безпосередньо з означення спряженого оператора випливає

**Лема 14.3.** *Нехай $X, Y, Z$ – ТВП над полем $\mathbb{K}$, $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\mathsf{B} \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Тоді:* $(\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2)^* = \mathsf{A}_1^* + \mathsf{A}_2^*$; *для будь-якого* $\alpha \in \mathbb{K}$ $(\alpha\mathsf{A})^* = \alpha\mathsf{A}^*$; $(\mathsf{BA})^* = \mathsf{A}^*\mathsf{B}^*$.

Теорема Ріса – Фреше встановлює ізометрію між гільбертовим простором H і спряженим із ним простором $\mathrm{H}^*$ за допомогою рівності $\langle \mathsf{f}, x\rangle = \langle x \,|\, u\rangle$. Ця рівність показує, що, незважаючи на ізометричність просторів H і $\mathrm{H}^*$, повністю ототожнювати їх у випадку $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ не можна. Справді, $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ – білінійна форма, а $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ – півторалінійна (антилінійна по другому аргументові), так що й відповідність $\mathsf{f} \leftrightarrow u$ також антилінійна. Оскільки $\langle \cdot \,|\, \cdot\rangle$ (скалярне множення) фігурує в самому означенні гільбертового простору, то для обмеженого лінійного оператора в H природно й спряжений оператор означувати в термінах скалярного добутку. При такому підході дещо змінюється самé поняття спряженості. А са́ме, оператором, *ермітово-спряженим* з $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, називається оператор $\mathsf{A}^*$ (позначуваний так само як спряжений, але з аргументом, записуваним справа від нього) в H (а не в $\mathrm{H}^*$) такий, що для всіх $x, y \in \mathrm{H}$

$$\langle x \,|\, \mathsf{A}^* y\rangle = \langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle. \tag{17}$$

У гільбертових просторах інакшу спряженість операторів ніж ермітова не розглядають, тому ермітово-спряжений оператор називають просто спряженим, пам'ятаючи, однак, що $\mathsf{A}^*$ означується за допомогою рівності (17), а не (16). Тоді лема 14.3 видозмінюється так:

**Лема 14.4.** *Операція ермітового спряження в $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ має властивості:* $(\mathsf{A} + \mathsf{B})^* = \mathsf{A}^* + \mathsf{B}^*$; *для будь-якого* $\alpha \in \mathbb{K}$ $\quad(\alpha\mathsf{A})^* = \overline{\alpha}\mathsf{A}^*$; $(\mathsf{BA})^* = \mathsf{A}^*\mathsf{B}^*$.

Відмінність ермітового спряження від звичайного проявляється в другій властивості.

**Лема 14.5.** *Для всякого* $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ $\quad\mathsf{A}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$.

◀ Нерівність $\|\mathsf{A}^*\| \leqslant \|\mathsf{A}\|$ виводиться з (17) так само, з точністю до позначень, як із (16) у доведенні теореми 14.4. ▶

Ця лема дозволяє застосовувати операцію ермітового спряження до $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ скільки завгодно разів. Наступне твердження показує, що нічого крім $\mathsf{A}^*$ і $\mathsf{A}$ ми таким способом не одержимо.

**Лема 14.6.** *Для всякого* $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}) \quad \mathsf{A}^{**} = \mathsf{A}$.

◀ Із (17) і (3.54) маємо для довільних $x, y \in \mathrm{H}$

$$\langle x \,|\, \mathsf{A}^{**} y\rangle = \langle \mathsf{A}^* x \,|\, y\rangle = \overline{\langle y \,|\, \mathsf{A}^* x\rangle} = \overline{\langle \mathsf{A} y \,|\, x\rangle} = \langle x \,|\, \mathsf{A} y\rangle.$$

Отже для будь-якого $y \in \mathrm{H} \quad \mathsf{A}^{**} y - \mathsf{A} y \in \mathrm{H}^\perp = \{0\}$. ▶

**Наслідок 14.5.** *Для всякого* $A \in \mathcal{L}(H) \quad \|\mathsf{A}^*\| = \|\mathsf{A}\|$.

◀ Замінивши в нерівності $\|\mathsf{A}^*\| \leqslant \|\mathsf{A}\| \quad \mathsf{A}$ на $\mathsf{A}^*$ (лема 14.5 дозволяє це зробити), одержимо з урахуванням леми 14.6 $\|\mathsf{A}\| \leqslant \|\mathsf{A}^*\|$. ▶

**Лема 14.7.** *Нехай* $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$. *Тоді для будь-якого* $x \in \mathrm{H} \quad \|\mathsf{A}x\|^2 \leqslant \|\mathsf{A}^*\mathsf{A}x\|\,\|x\|$.

◀ Достатньо написати, спираючись на (17) і нерівність Шварца, $\langle \mathsf{A}x \,|\, \mathsf{A}x\rangle = \langle x \,|\, \mathsf{A}^*\mathsf{A}x\rangle \leqslant \sqrt{\langle x|x\rangle}\sqrt{\langle \mathsf{A}^*\mathsf{A}x \,|\, \mathsf{A}^*\mathsf{A}x\rangle}$. ▶

**Лема 14.8.** *Для всякого* $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$

$$\ker \mathsf{A}^* = \operatorname{im} \mathsf{A}^\perp, \tag{18}$$

$$\ker \mathsf{A}^\perp = \overline{\operatorname{im} \mathsf{A}^*}. \tag{19}$$

◀ Двосторонні імплікації $y \in \ker \mathsf{A}^* \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathrm{H} \quad \langle x \,|\, \mathsf{A}^* y\rangle = 0 \overset{(17)}{\Longleftrightarrow} \forall\, x \in \mathrm{H} \quad \langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle = 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{im} \mathsf{A}^\perp$ доводять (18). Замінивши в (19) $\mathsf{A}$ на $\mathsf{A}^*$, одержимо згідно з лемою 14.6 $\ker \mathsf{A} = (\operatorname{im} \mathsf{A}^*)^\perp$, звідки за наслідком 9.7 випливає (19). ▶

**Лема 14.9.** *Нехай оператор* $\mathsf{Q}$ *в* $\mathrm{H}$ *задається рівністю* $\mathsf{Q}x = c\langle x \,|\, h\rangle h$, *де* $c$ *– дійсне число,* $h$ *– вектор із* $\mathrm{H}$. *Тоді* $\mathsf{Q}^* = \mathsf{Q}$.

◀ Для довільних $x, y \in \mathrm{H}$

$$\langle \mathsf{Q}x \,|\, y\rangle = c\langle x \,|\, h\rangle\langle h \,|\, y\rangle = \overline{c\langle y \,|\, h\rangle}\langle x \,|\, h\rangle = \langle x \,|\, \mathsf{Q}y\rangle. \ \blacktriangleright$$

**Лема 14.10.** *Нехай* $(\mathsf{A}_n)$ *– поточково збіжна до деякого оператора* $\mathsf{A}$ *послідовність в* $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ *така, що послідовність* $(\mathsf{A}_n^*)$ *поточково збігається до деякого оператора* $\mathsf{B}$. *Тоді* $\mathsf{B} = \mathsf{A}^*$.

◀ Для довільних $x, y \in \mathrm{H}$

$$\langle x \,|\, \mathsf{B}y\rangle = \lim\langle x \,|\, \mathsf{A}_n^* y\rangle = \lim\langle \mathsf{A}_n x \,|\, y\rangle = \langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, \mathsf{A}^* y\rangle. \ \blacktriangleright$$

**Наслідок 14.6.** *Нехай оператор* $\mathsf{A}$ *в* H *задається рівністю* (25), *де* $(\gamma_n)$ *– обмежена послідовність відмінних від нуля дійсних чисел, а* $(h_n)$ *– ортонормована послідовність в* H. *Тоді:* $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$; $(h_n)$ *– ортобазис у* $\ker \mathsf{A}^{\perp}$.

## § 15. Компактні оператори

`15.1. Загальні поняття і факти.` Лінійний оператор, діючий з одного напівнормованого простору в інший, називається:

- *скінченновимірним*, якщо його область значень – скінченновимірний векторний простір;
- *компактним* або *цілком неперервним*, якщо він переводить усяку обмежену множину в цілком обмежену (для чого з огляду на лінійність достатньо, щоб образ кулі $B(0,1)$ був цілком обмеженим).

Лема 7.4 дозволяє рівносильно означити компактний оператор як діючий з одного напівнормованого простору в інший лінійний оператор $\mathsf{A}$ такий, що для всякої обмеженої послідовності $(x_n)$ в області визначення послідовність $(\mathsf{A}x_n)$ містить фундаментальну підпослідовність.

Множину компактних операторів, діючих з $X$ в $Y$, позначатимемо $\mathrm{Comp}(X, Y)$, а якщо $Y = X$, то $\mathrm{Comp}(X)$.

**Лема 15.1.** *Компактний оператор обмежений.*

◀ Нехай $X, Y$ – напівнормовані простори, $\mathsf{A} : X \to Y$ – необмежений лінійний оператор. Тоді в $X$ існує послідовність $(x_n)$ така, що $\|x_n\| \leqslant 1$, $\|\mathsf{A}x_n\| \to \infty$. Отже $\mathsf{A}$ не компактний. ▶

**Наслідок 15.1** (із леми 15.1 і наслідку 13.3)**.** *Компактний оператор рівномірно неперервний.*

**Лема 15.2.** *Обмежений скінченновимірний оператор компактний.*

◀ Нехай $\mathsf{A}$ – такий оператор. Тоді для будь-якої обмеженої послідовності $(x_n)$ в області визначення послідовність $(\mathsf{A}x_n)$ у скінченновимірному просторі $\operatorname{im}\mathsf{A}$ обмежена, відтак за теоремою Больцано – Ваєрштраса з неї можна виділити збіжну підпослідовність. ▶

Застереження: приклад 13.2 показує, що існують необмежені скінченновимірні оператори.

**Лема 15.3.** *Сума компактних операторів – компактний оператор.*

◀ Нехай $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2$, де $\mathsf{A}_1$ і $\mathsf{A}_2$ – компактні оператори з однаковими областями визначення і прибуття. Тоді для будь-якої обмеженої послідовності $(x_n)$ в області визначення існують нескінченні множини $J_1 \subset \mathbb{N}$ і $J_2 \subset J_1$ такі, що послідовності $(\mathsf{A}_i x_n, n \in J_i)$, $i = 1, 2$, фундаментальні, а значить і $(\mathsf{A}x_n, n \in J_2)$ фундаментальна. ▶

Ще простіше доводиться, що множення на число не виводить із класу компактних операторів. Це спільно з лемами 15.3 і 15.1 приводить до такого висновку.

**Наслідок 15.2.** $\mathrm{Comp}(X, Y)$ *– лінійна множина в* $\mathcal{L}(X, Y)$.

**Лема 15.4.** *Добуток компактного і обмеженого лінійного операторів – компактний оператор.*

◀ Достатньо зауважити, що обмежений лінійний оператор переводить не тільки обмежені послідовності в обмежені, але й фундаментальні у фундаментальні. ▶

Теорема 8.3 (Ріса) стверджує, що в нескінченновимірному напівнормованому просторі кулі додатного радіуса не є цілком обмеженими множинами. Лема 7.4 і означення компактного оператора дозволяють переформулювати цей результат так.

**Теорема 15.1.** *Одиничний оператор у нескінченновимірному напівнормованому просторі не компактний.*

**Наслідок 15.3** (з теореми 15.1 і леми 15.4)**.** *Компактний оператор із нескінченновимірною областю визначення необоротний.*

**Наслідок 15.4** (з наслідку 15.3, теореми 13.5 і леми 15.1)**.** *Компактний оператор, діючий з одного банахового простору в інший, не може бути бієктивним.*

**Теорема 15.2.** *Нехай* $\mathsf{A}$ *– компактний оператор, діючий з нормованого простору* $X$ *у напівнормований простір* $Y$*, а* $\Lambda : X \to Y$ *– бієктивний лінійний оператор такий, що*

$$\inf_{\|x\|=1} \|\Lambda x\| > 0. \tag{1}$$

*Тоді лінійна множина* $\ker(\Lambda - \mathsf{A})$ *скінченновимірна.*

◀ Нехай $(x_n)$ – обмежена послідовність в $X$ така, що $\Lambda x_n = \mathsf{A}x_n$. Обмеженість $(x_n)$ і компактність $\mathsf{A}$ зумовлюють існування такої нескінченної множини $J \subset \mathbb{N}$, що послідовність $(\mathsf{A}x_n, n \in J)$ фундаментальна. Тоді з останньої рівності випливає фундаментальність послідовності $(\Lambda x_n, n \in J)$. Умова (1) забезпечує, згідно з наслідком 13.9, існування обмеженого оберненого оператора $\Lambda^{-1} : Y \to X$. Тому $(x_n, n \in J)$ теж фундаментальна. Тепер лема 7.4 стверджує цілковиту обмеженість довільної обмеженої множини в $\ker(\Lambda - \mathsf{A})$. За теоремою 8.3 ця властивість нормованого простору рівносильна скінченновимірності. ▶

**Теорема 15.3.** $\mathrm{Comp}(X, Y)$ *– замкнута множина в напівнормованому просторі* $\mathcal{L}(X, Y)$.

◀ Згідно з наслідком 5.4 достатньо встановити послідовнісну замкнутість $\mathrm{Comp}(X, Y)$.

Нехай $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots \in \mathrm{Comp}(X, Y)$, $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\|\mathsf{A}_n - \mathsf{A}\| \to 0$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо таке $n$, що $\|\mathsf{A}_n - \mathsf{A}\| < \varepsilon/2$. Тоді всяка $(\varepsilon/2)$-сітка множини $\mathsf{A}_n B_X(0, 1)$ (серед них за вибором $\mathsf{A}_n$ існують скінченні) буде $\varepsilon$-сіткою множини $\mathsf{A}B_X(0, 1)$. ▶

**Наслідок 15.5** (із теорем 15.3 і 13.1)**.** *Нехай* $X$ *– напівнормований простір,* $Y$ *– банахів простір, а* $(\mathsf{A}_n)$ *– фундаментальна послідовність у* $\mathrm{Comp}(X, Y)$*, поточково збіжна до деякого оператора* $\mathsf{A}$*. Тоді* $\mathsf{A}$ *компактний і* $\|\mathsf{A}_n - \mathsf{A}\| \to 0$.

**Теорема 15.4.** *Оператор, спряжений з компактним, компактний.*

◀ Нехай $\mathsf{A} \in \mathrm{Comp}(X, Y)$, де $X$ і $Y$ – напівнормовані простори. Візьмемо в $Y^*$ довільну обмежену послідовність $(\mathsf{g}_n)$ і позначимо $\mathsf{f}_n = \mathsf{g}_n\mathsf{A}^*$ $(\in X^*)$, $C = \sup_n \|\mathsf{g}_n\|$ $(< \infty)$, так що згідно з (16)

$$\mathsf{f}_n x = \mathsf{g}_n \mathsf{A} x, \quad x \in X, \tag{2}$$

а значить

$$\sup_n \|\mathsf{f}_n\| \leqslant C\|\mathsf{A}\|. \tag{3}$$

При цьому за лемою 15.1 $\|\mathsf{A}\| < \infty$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і візьмемо в $\mathsf{A}B_X(0,1)$ існуючу за припущенням компактності $\mathsf{A}$ скінченну $\varepsilon$-сітку $y_1 = \mathsf{A}x_1, \ldots, y_k = \mathsf{A}x_k$. Тоді для всякого $x \in B_X(0,1)$ знайдеться (можливо не єдине) число $i(x) \in \{1, \ldots, k\}$ таке, що $\|\mathsf{A}x - \mathsf{A}x_{i(x)}\| < \varepsilon$. Звідси з урахуванням (2) маємо

$$|\mathsf{f}_n x - \mathsf{f}_n x_{i(x)}| < C\varepsilon,\ x \in B_X(0,1),\ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Очевидно, для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ і $x, x' \in X$

$$|\mathsf{f}_m x - \mathsf{f}_n x| \leqslant |\mathsf{f}_m x - \mathsf{f}_m x'| + |\mathsf{f}_m x' - \mathsf{f}_n x'| + |\mathsf{f}_n x' - \mathsf{f}_n x|,$$

звідки з огляду на (4) і означення норми обмеженого лінійного функціонала (п. 14.1)

$$\|\mathsf{f}_m - \mathsf{f}_n\| \leqslant 2C\varepsilon + \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |\mathsf{f}_m x_i - \mathsf{f}_n x_i|. \tag{5}$$

Унаслідок (3) кожна з числових послідовностей $(\mathsf{f}_n x_1), \ldots, (\mathsf{f}_n x_k)$ обмежена. Тому за теоремою Больцано – Ваєрштраса існує така нескінченна множина $J \subset \mathbb{N}$, що кожна з послідовностей $(\mathsf{f}_n x_i, n \in J),\ i = 1, \ldots, k$, збігається. Тоді з (5) і довільності $\varepsilon$ випливає фундаментальність послідовності $(\mathsf{f}_n, n \in J)$. ►

Ці ж міркування з очевидними змінами приводять до такого ж висновку для ермітово-спряженого оператора (якщо $\mathsf{A} \in \mathrm{Comp(H)}$), але в цьому випадку компактність $\mathsf{A}^*$ можна довести значно простіше, що буде продемонстровано в наступному пункті. На завершення ж цього пункту встановимо ще одну важливу властивість компактних операторів.

**Теорема 15.5.** *Нехай* $\mathsf{A}$ *– компактний оператор у комплексному банаховому просторі* $X$, *а* $\lambda$ *– відмінне від нуля комплексне число таке, що оператор* $\mathsf{A} - \lambda\mathbb{1}$ *необоротний. Тоді* $\ker(\mathsf{A} - \lambda\mathbb{1}) \neq \{0\}$, *тобто* $\lambda$ *– власне число оператора* $\mathsf{A}$.

◄ За наслідком 13.9 необоротність $\mathsf{A} - \lambda\mathbb{1}$ рівносильна існуванню такої послідовності $(x_n) \in (S_X(0,1))^{\mathbb{N}}$, що $\mathsf{A}x_n - \lambda x_n \to 0$. Зважаючи на компактність $\mathsf{A}$ і повноту $X$ існують строго зростаюча послідовність $(k_n)$ натуральних чисел і вектор $y \in X$ такі, що

$$\mathsf{A}x_{k_n} \to y, \tag{6}$$

а значить і $\lambda x_{k_n} \to y$. Оператор $\mathsf{A}$ лінійний і за наслідком 15.1 неперервний, тому з останнього співвідношення маємо $\lambda\mathsf{A}x_{k_n} \to \mathsf{A}y$. Порівнявши це з (6) і врахувавши, що в нормованому просторі границя збіжної послідовності єдина, одержимо $\mathsf{A}y = \lambda y$, тобто $y \in \ker(\mathsf{A} - \lambda\mathbb{1})$. При цьому $\|y\| = \lim \|\lambda x_{k_n}\| = |\lambda| \neq 0$, а значить $y \neq 0$. ►

Пригадавши означення спектра обмеженого лінійного оператора (п. 13.4) можемо переформулювати теорему 15.5 так:

*Кожна відмінна від нуля точка спектра компактного оператора в комплексному банаховому просторі – власне число цього оператора.*

### 15.2. Компактні оператори в евклідових просторах.

**Лема 15.5.** *Нехай $X$ – напівнормований простір,* E *– евклідів простір,* $\mathsf{A} \in \mathrm{Comp}(X, \mathrm{E})$, *а $(h_n)$ – обмежена послідовність в $X$ така, що*

$$\langle \mathsf{A}h_n \,|\, \mathsf{A}h_k \rangle = 0 \quad \textit{при } n \neq k. \tag{7}$$

*Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина $J_\varepsilon \equiv \{n : \|\mathsf{A}h_n\| > \varepsilon\}$ скінченна.*

◄ Із (7) і тотожності $\|x - y\|^2 = \langle x - y | x - y \rangle$ маємо

$$\|\mathsf{A}h_n - \mathsf{A}h_k\|^2 = \|\mathsf{A}h_n\|^2 + \|\mathsf{A}h_k\|^2 \quad \text{при } n \neq k.$$

Отже якби множина $J_\varepsilon$ була нескінченною, то послідовність $(\mathsf{A}h_n, n \in J_\varepsilon)$ не мала би фундаментальних підпослідовностей, що суперечить компактності $\mathsf{A}$ і обмеженості $(h_n)$. ►

**Теорема 15.6.** *Нехай оператор $\mathsf{A}$ в гільбертовому просторі* H *задається рівністю* (25), *де $(h_n, n \in \mathbb{N})$ – ортонормована послідовність в* H, *а $(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ – обмежена числова послідовність, усі члени якої відмінні від нуля. Тоді для компактності $\mathsf{A}$ необхідно і достатньо, щоб*

$$\gamma_n \to 0. \tag{8}$$

◄ Необхідність. За теоремою 13.8 $\mathsf{A}h_n = \gamma_n h_n$, що разом з ортонормованістю $(h_n)$ зумовлює (7). Тоді лема 15.5 стверджує з урахуванням останньої нерівності і припущення $\|h_n\| = 1$, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина $\{n : |\gamma_n| > \varepsilon\}$ скінченна, тобто справджується (8).

Достатність. Для кожного $n$ задамо оператор $\mathsf{A}_n$ рівністю

$$\mathsf{A}_n x = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \langle x \mid h_k \rangle.$$

Він лінійний, скінченновимірний і обмежений, а значить компактний. За умовою $\mathsf{A}$ є поточковою границею послідовності $(\mathsf{A}_n)$ (існування границі це перше твердження теореми 13.8). Застосувавши теорему 13.8 до $\mathsf{A}_{n+p} - \mathsf{A}_n$, запишемо четвертий висновок її так:

$$\|\mathsf{A}_{n+p} - \mathsf{A}_n\| \leqslant \max_{n<k\leqslant n+p} |\gamma_k|.$$

Отже

$$\sup_p \|\mathsf{A}_{n+p} - \mathsf{A}_n\| \leqslant \sup_{k>n} |\gamma_k|.$$

За умовою (8) права частина нерівності прямує до нуля, а значить послідовність $(\mathsf{A}_n)$ фундаментальна. Тепер компактність $\mathsf{A}$ випливає з наслідку 15.5. ►

**Теорема 15.7.** *Оператор, ермітово-спряжений з компактним оператором у гільбертовому просторі, компактний.*

◄ Нехай $\mathsf{A} \in \mathrm{Comp}(\mathrm{H})$. Тоді: $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ (лема 15.1), $\mathsf{A}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ (лема 14.4), $\mathsf{A}^*\mathsf{A} \in \mathrm{Comp}(\mathrm{H})$ (лема 15.4), а значить для довільної обмеженої послідовності $(x_n) \in \mathrm{H}^{\mathbb{N}}$ існує нескінченна множина $J \subset \mathbb{N}$ така, що послідовність $(\mathsf{A}^*\mathsf{A}x_n, n \in J)$ фундаментальна. Звідси, застосувавши лему 14.6 до $x = x_m - x_n$, виводимо фундаментальність $(\mathsf{A}x_n, n \in J)$. ►

**Теорема 15.8 (**Pic**).** *Для всякого компактного оператора* $\mathsf{A}$ *в гільбертовому просторі множина* $\mathrm{im}(\mathbb{1} - \mathsf{A})$ *замкнута.*

◄ Зважаючи на наслідок 5.4 достатньо довести послідовнісну замкнутість цієї множини. Інакше кажучи, треба показати, що співвідношення

$$f = \lim f_n, \tag{9}$$

$$f_n \in \mathrm{im}(\mathbb{1} - \mathsf{A}) \tag{10}$$

зумовлюють $f \in (\mathbb{1} - \mathsf{A})$.

Згідно з (10) існує $x_n \in \mathrm{H}$ такий, що

$$f_n = x_n - \mathsf{A}x_n. \tag{11}$$

Теорема 9.3 дозволяє вважати, не обмежуючи загальності, що $x_n \in \ker(\mathbb{1} - \mathsf{A})^\perp$ (інакше замінимо $x_n$ на $x_n - \Pr_{\ker(\mathbb{1}-\mathsf{A})} x_n$, від чого права частина (11) не зміниться). Покажемо, що в такому разі послідовність $(x_n)$ обмежена.

Міркуємо від супротивного. Якщо $\sup \|x_n\| = \infty$, то існує нескінченна множина $S \subset \mathbb{N}$ така, що $\|x_n\| \to \infty$ при $n \to \infty, n \in S$. Позначимо $u_n = x_n/\|x_n\|$. Оскільки послідовність $(f_n)$, будучи збіжною, обмежена, то $f_n/\|x_n\| \to 0$ при $n \to \infty, n \in S$, що спільно з (11) дає

$$u_n - \mathsf{A}u_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \quad n \in S. \tag{12}$$

За побудовою

$$\|u_n\| = 1, \tag{13}$$

що разом із компактністю $\mathsf{A}$ зумовлює існування нескінченної множини $T \subset S$ такої, що послідовність $(\mathsf{A}u_n, n \in T)$ збігається. Тоді внаслідок (12) існує вектор $u \in \mathrm{H}$ такий, що

$$u_n \to u \quad \text{при } n \to \infty, \quad n \in T, \tag{14}$$

звідки за умовою компактності $\mathsf{A}$ і наслідком 15.1

$$\mathsf{A}u_n \to \mathsf{A}u \quad \text{при } n \to \infty, \quad n \in T.$$

Порівнявши ці два співвідношення з (12), бачимо, що $u_n - \mathsf{A}u_n = 0$, тобто $u \in \ker(\mathbb{1} - \mathsf{A})$. З іншого боку, за побудовою $u_n \in \ker(\mathbb{1} - \mathsf{A})^\perp$, що разом із (14) дає $u \in \ker(\mathbb{1} - \mathsf{A})^\perp$. Отже $u \perp u$, звідки $u = 0$. Водночас із (13) і (14) маємо $\|u\| = 1$. Ця суперечність доводить обмеженість $(x_n)$, яка, у свою чергу, спільно з компактністю $\mathsf{A}$ зумовлює існування нескінченної множини $J \subset \mathbb{N}$ такої, що послідовність $(\mathsf{A}x_n, n \in J)$ збігається. А це спільно з (11) і (9) спричинює збіжність $(x_n, n \in J)$ до деякого $x \in \mathrm{H}$. Тоді з (9) і (11) маємо $f = x - \mathsf{A}x$. ▶

На завершення параграфа введемо один важливий клас компактних операторів. Обмежений лінійний оператор $\mathsf{A}$ в гільбеотовому просторі називається *оператором Гільберта – Шмідта*, якщо в $\ker \mathsf{A}^\perp$ існує ортобазис $(h_n)$ такий, що

$$\sum_n \|\mathsf{A}h_n\|^2 < \infty. \tag{15}$$

**Теорема 15.9.** *Оператор Гільберта – Шмідта компактний.*

◀ Якщо підпростір $\ker \mathsf{A}^\perp$ скінченновимірний, то й $\mathsf{A}$ такий, тому міркуємо для випадку, коли $n$ пробігає $\mathbb{N}$. Для кожного $n$ задамо оператор $\mathsf{A}_n$ рівністю

$$\mathsf{A}_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid h_k \rangle \mathsf{A} h_k.$$

Він лінійний, скінченновимірний і обмежений, а значить компактний. За лемою 13.11 $\mathsf{A}$ є поточковою границею послідовності $(\mathsf{A}_n)$. При цьому

$$\|(\mathsf{A}_{n+p} - \mathsf{A}_n)x\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |\langle x \mid h_k \rangle| \, \|\mathsf{A} h_k\|,$$

звідки за нерівністю Коші – Буняковського

$$\|(\mathsf{A}_{n+p} - \mathsf{A}_n)x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x \mid h_k \rangle|^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mathsf{A} h_k\|^2.$$

Згідно з нерівністю Бесселя перша сума в правій частині обмежена величиною $\|x\|^2$. Отже

$$\sup_p \|\mathsf{A}_{n+p} - \mathsf{A}_n\|^2 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mathsf{A} h_k\|^2.$$

Права частина останньої нерівності прямує до нуля, як залишок збіжного за умовою (15) ряду, тому послідовність $(\mathsf{A}_n)$ фундаментальна. Тепер компактність $\mathsf{A}$ випливає з наслідку 15.5. ▶

**Теорема 15.10.** *Нехай оператор* $\mathsf{A}$ *у гільбертовому просторі* $\mathrm{H}$ *задається рівністю* (25), *де* $(h_n)$ – *ортонормована послідовність в* $\mathrm{H}$, *а* $(\gamma_n)$ – *обмежена послідовність відмінних від нуля чисел. Тоді умова*

$$\sum_n |\gamma_n|^2 < \infty \tag{16}$$

*необхідна, а якщо всі* $\gamma_n$ *дійсні, то й достатня для того, щоб* $\mathsf{A}$ *був оператором Гільберта – Шмідта.*

◀ Необхідність. Нехай у $\ker \mathsf{A}^\perp$ існує ортобазис $(g_k)$ такий, що

$$\sum_k \|\mathsf{A} g_k\|^2 < \infty. \tag{17}$$

За умовою (25)

$$\mathsf{A}g_k = \sum_n \gamma_n \langle g_k \,|\, h_n\rangle h_n,$$

звідки за лемою 9.8

$$\|\mathsf{A}g_k\|^2 = \sum_n |\gamma_n|^2 |\langle g_k \,|\, h_n\rangle|^2,$$

що разом із (17) дає

$$\sum_n |\gamma_n|^2 | \sum_k |\langle g_k \,|\, h_n\rangle|^2 < \infty.$$

Але $h_n \in \ker \mathsf{A}^\perp$, тож за вибором $(g_k)$ і теоремою 9.4 $\sum\limits_k |\langle g_k \,|\, h_n\rangle|^2 = \|h_n\|^2$ (=1 за припущенням нормованості $(h_n)$).

Достатність. Згідно з другим твердженням теореми 13.8 умова (16) рівносильна (15). При цьому наслідок 14.6 стверджує, що $(h_n)$ – ортобазис у $\ker \mathsf{A}^\perp$. ▶

## § 16. Ермітові оператори

16.1. Загальні відомості. Скрізь у цьому параграфі H – гільбертів простір. Позначення $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ скорочуємо до $\mathcal{L}$; $\mathsf{A}^*$ означає оператор, ермітово-спряжений з $\mathsf{A}$.

Оператор $\mathsf{A}$ в H такий, що

$$\langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, \mathsf{A}y\rangle \tag{1}$$

для всіх $x, y \in \mathrm{H}$, називається *ермітовим*. Клас ермітових операторів позначатимемо $\mathrm{Herm}$.

**Лема 16.1.** *Ермітів оператор лінійний і обмежений.*

◀ Для будь-яких $x_1, x_2, y \in \mathrm{H}$

$$\langle \mathsf{A}(x_1 + x_2) \,|\, y\rangle = \langle x_1 + x_2 \,|\, \mathsf{A}y\rangle = \langle x_1 \,|\, \mathsf{A}y\rangle + \langle x_2 \,|\, \mathsf{A}y\rangle$$

$$= \langle \mathsf{A}x_1 \,|\, y\rangle + \langle \mathsf{A}x_2 \,|\, y\rangle = \langle \mathsf{A}x_1 + \mathsf{A}x_2 \,|\, y\rangle,$$

так що $\mathsf{A}(x_1 + x_2) - (\mathsf{A}x_1 + \mathsf{A}x_2) \in \mathrm{H}^\perp = \{0\}$. Аналогічно і простіше з (1) виводиться однорідність $\mathsf{A}$.

Щоб довести обмеженість $\mathsf{A}$, візьмемо в $\overline{B}(0,1)$ довільну послідовність $(x_n)$ і покажемо, що послідовність $(\mathsf{A}x_n)$ обмежена. Позначимо $\mathsf{f}_n y = \langle \mathsf{A}x_n \,|\, y\rangle$. Із (1) маємо за нерівністю Шварца $|\mathsf{f}_n y| \leqslant \|x_n\|\,\|\mathsf{A}y\|$, так що послідовність $(\mathsf{f}_n)$ поточково обмежена. Тоді за теоремою Банаха – Штейнгауза існує число $C$ таке, що $|\mathsf{f}_n y| \leqslant C\|y\|$ при всіх $n \in \mathbb{N}$ і $y \in \mathrm{H}$. Поклавши $y = \mathsf{A}x_n$, дістанемо $\|\mathsf{A}x_n\|^2 \leqslant C\|\mathsf{A}x_n\|$, тобто $\|\mathsf{A}x_n\| \leqslant C$. ►

**Наслідок 16.1.** *Оператор* $\mathsf{A}$ *в* H *ермітів у точності тоді, коли* $\mathsf{A} \in \mathcal{L}$ *і* $\mathsf{A}^* = \mathsf{A}$.

**Наслідок 16.2** (з наслідку 16.1 і леми 14.8)**.** *Нехай послідовність* $(\mathsf{A}_n)$ *ермітових операторів поточково збігається до оператора* $\mathsf{A}$. *Тоді* $\mathsf{A}$ *також ермітів.*

**Наслідок 16.3** (з леми 14.5 і наслідку 16.2)**.** Herm – *підпростір над полем* $\mathbb{R}$ *банахового простору* $\mathcal{L}$.

**Лема 16.2.** *Для того щоб добуток двох ермітових операторів сам був ермітовим оператором, необхідно і достатньо, щоб вони комутували.*

◄ За лемою 14.5 для довільних $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathcal{L}$ $(\mathsf{AB})^* = \mathsf{B}^*\mathsf{A}^*$. Отже для $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathrm{Herm}$ рівність $(\mathsf{AB})^* = \mathsf{AB}$ рівносильна такій: $\mathsf{BA} = \mathsf{AB}$. ►

**Лема 16.3.** *Для того щоб обмежений лінійний оператор* $\mathsf{A}$ *в комплексному гільбертовому просторі був ермітовим, необхідно і достатньо, щоб квадратична форма* $\langle \mathsf{A}x|x\rangle$ *набувала тільки дійсних значень.*

◄ Необхідність випливає з рівностей $\langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle = \langle x \,|\, \mathsf{A}x\rangle = \langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle$, перша з яких – окремий випадок (1), а друга – складова частина означення скалярного добутку.

Достатність. Зафіксуємо $x, y \in \mathrm{H}$ і позначимо $a = \langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle$, $b = \langle \mathsf{A}y \,|\, x\rangle$. Із тотожностей

$$\langle \mathsf{A}(x+y) \,|\, x+y\rangle = \langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle + b + a + \langle \mathsf{A}y \,|\, y\rangle, \tag{2}$$

$$\langle \mathsf{A}(x+iy) \,|\, x+iy\rangle = \langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle + i(b-a) + \langle \mathsf{A}y \,|\, y\rangle \tag{3}$$

і припущення про $\mathsf{A}$ маємо $b+a \in \mathbb{R}$, $i(b-a) \in \mathbb{R}$, а значить $a = \overline{b}$. А це не що інше, як рівність (1). ►

**Лема 16.4.** *Нехай* $\mathsf{A}$ *– ермітів оператор. Тоді для будь-яких* $x, y \in H$

$$4\,\mathrm{Re}\langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle = \langle \mathsf{A}(x+y) \,|\, x+y\rangle - \langle \mathsf{A}(x-y) \,|\, x-y\rangle,$$

$$4i\,\mathrm{Im}\langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle = \langle \mathsf{A}(x-iy) \,|\, x-iy\rangle - \langle \mathsf{A}(x+iy) \,|\, x+iy\rangle.$$

◀ Замінивши у (2) $y$ на $-y$ і віднявши одержану рівність від (2), дістанемо першу із стверджуваних рівностей. Друга в такий же спосіб виводиться з (3). ▶

**Теорема 16.1.** *Для довільного ермітового оператора* $\mathsf{A}$

$$\|\mathsf{A}\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle|.$$

◀ Позначимо праву частину рівності через $N$. Нерівність Шварца $|\langle \mathsf{A}x|x\rangle|$
$\leqslant \|\mathsf{A}x\|\,\|x\|$ і лема 13.6 показують разом, що $N \leqslant \|\mathsf{A}\|$ (цей висновок не спирається на ермітовість $\mathsf{A}$).

З означення величини $N$ очевидним чином виводимо нерівність $\langle \mathsf{A}z \,|\, z\rangle \leqslant N\|z\|^2$ (для всіх $z \in \mathrm{H}$), із якої з огляду на лему 16.4 маємо

$$|\,\mathrm{Re}\langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle| \leqslant N(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)/4.$$

Тотожність паралелограма (3) дозволяє переписати останню нерівність так:

$$|\,\mathrm{Re}\langle x|y\rangle| \leqslant N(\|x\| + \|y\|^2)/2.$$

Поклавши тут $y = \|x\|\,\|\mathsf{A}x\|^{-1}\mathsf{A}x$ (за умови $\mathsf{A}x \neq 0$), одержимо $\|\mathsf{A}x\|\,\|x\| \leqslant N\|x\|^2$ (це залишається в силі і при $\mathsf{A}x = 0$), що разом із лемою 13.6 доводить нерівність $\|\mathsf{A}\| \leqslant N$. ▶

**Наслідок 16.4.** *Для довільного* $\mathsf{A} \in \mathcal{L}$ $\quad \|\mathsf{A}^*\mathsf{A}\| = \|\mathsf{A}\|^2 = \|\mathsf{A}\mathsf{A}^*\|$, *зокрема для* $\mathsf{A} \in \mathrm{Herm}$ $\quad \|\mathsf{A}^2\| = \|\mathsf{A}\|^2$.

◀ Написавши на підставі (14.17)

$$\langle \mathsf{A}^*\mathsf{A}x \,|\, x\rangle = \langle \mathsf{A}x \,|\, \mathsf{A}x\rangle \equiv \|\mathsf{A}x\|^2,$$

виводимо рівність $\|\mathsf{A}^*\mathsf{A}\| = \|\mathsf{A}\|^2$ із теореми 16.1 і леми 13.6. Замінивши в цій рівності $\mathsf{A}$ на $\mathsf{A}^*$, дістанемо за лемою 14.6 і наслідком 14.5 $\|\mathsf{A}\mathsf{A}^*\| = \|\mathsf{A}\|^2$. ▶

**Наслідок 16.5.** *Нехай* $\mathsf{Q}_1$ *і* $\mathsf{Q}_2$ *– ермітові оператори такі, що* $\mathsf{Q}_1 + i\mathsf{Q}_2 = \mathbb{O}$. *Тоді* $\mathsf{Q}_1 = \mathbb{O} = \mathsf{Q}_2$.

◀ За умовою для будь-якого $x$ $\langle \mathsf{Q}_1 x \,|\, x\rangle + \langle \mathsf{Q}_2 x \,|\, x\rangle = 0$, звідки за лемою 16.3 в частині необхідності $\langle \mathsf{Q}_k x \,|\, x\rangle = 0,\ k = 1, 2$. Тепер потрібний висновок випливає з теореми 16.1. ▶

**Лема 16.5.** *Усякий оператор* $\mathsf{A} \in \mathcal{L}$ *єдиним чином зображується у вигляді* $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 + i\mathsf{A}_2$, *де* $\mathsf{A}_1$ *і* $\mathsf{A}_2$ *– ермітові оператори.*

◀ Наслідок 16.5 стверджує, що таких зображень знайдеться не більше одного, тому достатньо пред'явити одне. Для цього покладемо

$$\mathsf{A}_1 = \frac{\mathsf{A} + \mathsf{A}^*}{2},\ \mathsf{A}_2 = \frac{\mathsf{A} - \mathsf{A}^*}{2i}.$$

Ермітовість цих операторів випливає з лем 14.4 і 14.6. ▶

**Наслідок 16.6.** *Нехай* $\mathsf{Q}_1$ *і* $\mathsf{Q}_2$ *– обмежені лінійні оператори в гільбертовому просторі такі, що* $\langle \mathsf{Q}_1 x | x\rangle = \langle \mathsf{Q}_2 x | x\rangle$ *при всіх* $x$. *Тоді* $\mathsf{Q}_1 = \mathsf{Q}_2$. *Зокрема, якщо* $\mathsf{Q} \in \mathcal{L}$ *і* $\langle \mathsf{Q}x | x\rangle = 0$ *при всіх* $x$, *то* $\mathsf{Q} = \mathbb{O}$.

◀ Достатньо довести друге твердження, із якого перше виводиться очевидним чином. Для $\mathsf{Q} \in \mathrm{Herm}$ воно випливає безпосередньо з теореми 16.1. Загальний випадок зводиться до цього окремого за допомогою леми 16.5. ▶

**Лема 16.6.** *Нехай* $\mathsf{A}$ *– ермітів оператор в* H, *а* $L$ *– лінійна множина в* H *така, що* $\mathsf{A}L \subset L$. *Тоді* $\mathsf{A}L^\perp \subset L^\perp$.

◀ Нехай $u \in L^\perp$, тобто для будь-якого $x \in L$ $\langle x \,|\, u\rangle = 0$. Тоді для будь-якого $x \in L$ $\langle \mathsf{A}x \,|\, u\rangle = 0$, бо за умовою $\mathsf{A}x$ також належить $L$. З огляду на (1) остання рівність рівносильна такій: $\langle x \,|\, \mathsf{A}u\rangle = 0$. Отже $\mathsf{A}u \in L^\perp$. ▶

Крім цієї, відомої читачеві з курсу алгебри властивості ермітових операторів, будемо використовувати ще такі дві, відомі з того ж курсу:

*Власні числа ермітового оператора дійсні.*

*Відповідаючі різним власним числам власні вектори ермітового оператора ортогональні.*

Для довільного $\mathsf{A} \in \mathcal{L}$ позначимо

$$m_{\mathsf{A}} = \inf_{\|x\|=1} \langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle,\ M_{\mathsf{A}} = \sup_{\|x\|=1} \langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle \tag{4}$$

і назвемо ці числа відповідно *нижньою* і *верхньою гранями* $\mathsf{A}$. Рівності (4) очевидним чином тягнуть за собою нерівності

$$m_{\mathsf{A}}\|x\|^2 \leqslant \langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle \leqslant M_{\mathsf{A}}\|x\|^2, \tag{5}$$

у яких $x$ пробігає весь простір. Вони ж, спільно з теоремою 16.1, приводять до такого висновку.

**Наслідок 16.7.** *Для довільного ермітового оператора* $\mathsf{A}$

$$\|\mathsf{A}\| = |M_{\mathsf{A}}| \vee |m_{\mathsf{A}}|.$$

Далі в цьому пункті використовується введене в п. 3.7 поняття спектра. У ролі лінійного кільця з означення спектра виступає тепер $\mathcal{L}(\mathrm{H})$.

**Теорема 16.2.** *Спектр ермітового оператора* $\mathsf{A}$ *дійсний і міститься у відрізку* $[m_{\mathsf{A}},\, M_{\mathsf{A}}]$.

◀ Нехай $\lambda$ – таке число, що оператор $\mathsf{A} - \lambda\mathbf{I}$ необоротний. Тоді за наслідком 13.9 існує така послідовність $(x_n) \in \mathrm{H}^{\mathbb{N}}$, що $\|x_n\| = 1$ і $\mathsf{A}x_n - \lambda x_n \to 0$. Із цих двох співвідношень маємо $\langle \mathsf{A}x_n \,|\, x_n\rangle - \lambda \to 0$, відтак зважаючи на (5) $\lambda \in [m_{\mathsf{A}},\, M_{\mathsf{A}}]$. ▶

**Лема 16.7.** *Нехай* $\mathsf{A}$ *– ермітів оператор такий, що* $m_{\mathsf{A}} \geqslant 0$. *Тоді для будь-якого* $x$ $\quad \|\mathsf{A}x\|^2 \leqslant M_{\mathsf{A}}\langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle$.

◀ Зважаючи на невід'ємність $m_{\mathsf{A}}$ відображення $(x, y) \mapsto \langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle)$ є, як і $(x, y) \mapsto \langle x \,|\, y\rangle$, додатною півторалінійною формою. Нерівність Шварца (3.55) для неї записується так:

$$|\langle \mathsf{A}x \,|\, y\rangle|^2 \leqslant \langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle\langle \mathsf{A}y \,|\, y\rangle.$$

Поклавши тут $y = \mathsf{A}x$ і оцінивши другий співмножник зверху згідно з (5), дістанемо $\|\mathsf{A}x\|^4 \leqslant \langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle \cdot M_{\mathsf{A}}\|\mathsf{A}x\|^2$. ▶

**Наслідок 16.8.** *Нехай* $\mathsf{A}$ *– ермітів оператор такий, що* $m_{\mathsf{A}} = 0$. *Тоді* $\mathsf{A}$ *необоротний.*

◀ Візьмемо існуючу за означенням нижньої грані і припущенням $m_{\mathsf{A}} = 0$ послідовність $(x_n)$ таку, що $\|x_n\| = 1$ і $\langle \mathsf{A}x_n \,|\, x_n\rangle \to 0$. За лемою 16.7 $\|\mathsf{A}x_n\| \to 0$. Отже $\inf\limits_{\|x\|=1} \|\mathsf{A}x\| = 0$, що згідно з наслідком 13.9 означає необоротність $\mathsf{A}$. ▶

Цей результат допускає таке узагальнення.

**Теорема 16.3.** *Обидві грані компактного ермітового оператора належать його спектрові.*

◀ Нехай $\mathsf{A}$ ермітів оператор. Нижня грань оператора $\mathsf{A}-m_{\mathsf{A}}\mathbb{I}$ дорівнює нулю, тож за наслідком 16.8 він необоротний. Замінивши $\mathsf{A}$ на $-\mathsf{A}$ і написавши очевидну рівність $\mathsf{A}-M_{\mathsf{A}}\mathbb{I}=-(-\mathsf{A}-m_{-\mathsf{A}}\mathbb{I})$, доходимо цього ж висновку для $\mathsf{A}-M_{\mathsf{A}}\mathbb{I}$. ▶

**Наслідок 16.9.** *Норма компактного ермітового оператора дорівнює найбільшому з модулів його власних чисел.*

◀ Для нульового оператора твердження тривіальне. Якщо ж $\mathsf{A}$ – ненульовий ермітів оператор, то за наслідком 16.6 хоча б одна з його граней відмінна від нуля. Якщо до того ж $\mathsf{A}$ компактний, то за теоремами 16.3 і 15.5 ця грань буде його власним числом. Тепер потрібний висновок випливає з наслідку 16.7. ▶

**Наслідок 16.10.** *Нехай компактний ермітів оператор* $\mathsf{A}$ *не має відмінних від нуля власних чисел. Тоді* $\mathsf{A}=\mathbb{O}$.

Докладніше компактні ермітові оператори вивчатимуться в п. 16.3.

Обмежений лінійний оператор $\mathsf{A}$ в $\mathrm{H}$ називається: *додатним* або *невід'ємно визначеним*, якщо $\langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle \geqslant 0$ для всіх $x\in \mathrm{H}$; *додатно визначеним* або *строго додатним*, якщо він додатний і рівність $\langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle = 0$ досягається тільки при $x=0$. Клас додатних операторів позначають $\mathcal{L}_+$. Із леми 16.3 в частині достатності випливає, що всякий додатний оператор ермітів, тобто $\mathcal{L}_+ \subset \mathrm{Herm}$. Порівнявши означення додатного оператора з означенням нижньої грані оператора, можемо уточнити цей висновок так:

**Лема 16.8.** *Оператор у гільбертовому просторі додатний у точності тоді, коли він ермітів і його нижня грань невід'ємна.*

Зіставивши це твердження з теоремами 16.1 і 16.2, одержуємо

**Наслідок 16.11.** *Оператор у гільбертовому просторі додатний у точності тоді, коли він ермітів і його спектр міститься в* $\mathbb{R}_+$.

Запровадимо в $\mathcal{L}$ порядок, вважаючи за означенням, що $\mathsf{B}\leqslant\mathsf{A}$, або, що те саме, $\mathsf{A}\geqslant\mathsf{B}$, якщо $\mathsf{A}-\mathsf{B}\in\mathcal{L}_+$ (рівносильно: якщо $\langle \mathsf{A}x \,|\, x\rangle \geqslant \langle \mathsf{B}x \,|\, x\rangle$ для всіх $x$). Рефлексивність і транзитивність відношення $\leqslant$ на $\mathcal{L}$ очевидні, а антисиметричність випливає з наслідку 16.6. У термінах так означеного порядку нерівності (5) записуються так: $m_{\mathsf{A}}\mathbb{I}\leqslant\mathsf{A}\leqslant M_{\mathsf{A}}\mathbb{I}$.

**Теорема 16.4.** *Обмежена монотонна послідовність ермітових операторів поточково збігається до деякого ермітового оператора.*

◀ Нехай $(\mathsf{A}_n)$ така послідовність. Можемо вважати (поясніть чому), що вона зростає і $\mathsf{A}_n \leqslant \mathbb{1}$. Тоді для будь-яких натуральних $n$ і $p$ $\mathbb{O} \leqslant \mathsf{A}_{n+p} - \mathsf{A}_n \leqslant \mathbb{1}$, звідки за лемою 16.7 для будь-якого $x$

$$\|\mathsf{A}_{n+p}x - \mathsf{A}_n x\|^2 \leqslant \langle \mathsf{A}_{n+p}x \,|\, x\rangle - \langle \mathsf{A}_n x \,|\, x\rangle. \tag{6}$$

Числова послідовність $(\langle \mathsf{A}_n x \,|\, x\rangle)$, будучи за умовою зростаючою і обмеженою, збіжна, відтак і фундаментальна. Тоді зважаючи на (6) $(\mathsf{A}_n x)$ фундаментальна в H. З огляду на повноту H це означає, що $(\mathsf{A}_n)$ поточково збігається до деякого оператора. Наслідок 16.2 стверджує, що він ермітів. ▶

16.2. Проектори. Ермітів оператор $\mathsf{P}$ такий, що $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$, називається *проектором*. Клас усіх проекторів позначатимемо $\mathcal{P}$.

**Лема 16.9.** $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}_+$.

◀ Для будь-яких $\mathsf{P} \subset \mathcal{P}$ і $x \in \mathrm{H}$ $\langle \mathsf{P}x|x\rangle = \langle \mathsf{P}^2x|x\rangle = \langle \mathsf{P}^*\mathsf{P}x|x\rangle = \|\mathsf{P}x\|^2 \geqslant 0$. ▶

**Теорема 16.5.** *Для того щоб оператор* $\mathsf{P}$ *в* H *був проектором, необхідно і достатньо, щоб існував підпростір* $L \subset \mathrm{H}$ *такий, що для всіх* $x \in \mathrm{H}$

$$\mathsf{P}x = \mathrm{Pr}_L\, x. \tag{7}$$

◀ Необхідність. Нехай $\mathsf{P} \in \mathcal{P}$. Покладемо $L = \ker(\mathbb{1} - \mathsf{P})$. За побудовою це замкнута лінійна множина в H, тобто підпростір. Тепер, щоб вивести (7) із тотожності $x = \mathsf{P}x + x - \mathsf{P}x$ і означення проекції (п. 9.2), достатньо показати, що для всякого $x$ $\mathsf{P}x \in L,\ x - \mathsf{P}x \in L^\perp$.

Маємо $(\mathbb{1} - \mathsf{P})\mathsf{P}x = \mathsf{P}x - \mathsf{P}^2x = 0$; для будь-якого $u \in L$
$\langle (\mathbb{1} - \mathsf{P})x \,|\, u\rangle = \langle x \,|\, (\mathbb{1} - \mathsf{P})u\rangle = 0$.

Достатність. Візьмемо довільні $x_1, x_2 \in \mathrm{H}$ і запишемо існуючі за теоремою 9.3 розклади $x_i = y_i + z_i,\ y_i \in L,\ z_i \in L^\perp$. Тоді за умови (7)

$$\langle \mathsf{P}x_1 \,|\, x_2\rangle = \langle y_1 \,|\, y_2 + z_2\rangle = \langle y_1 \,|\, y_2\rangle = \langle y_1 + z_1 \,|\, y_2\rangle = \langle x_1 \,|\, \mathsf{P}x_2\rangle,$$

що доводить ермітовість $\mathsf{P}$. Крім того, для довільного $x$ $\mathsf{P}^2x = \mathsf{P}y = y = \mathsf{P}x$. ▶

Із теореми 16.5 і вказаного в її доведенні явного виразу підпростору $L$ випливає

**Наслідок 16.12.** *Для довільного проектора* $\mathsf{P}$ $\operatorname{im}\mathsf{P} = \ker(\mathbb{1} - \mathsf{P})$.

Заданий рівністю (7) оператор $\mathsf{P}$ називають *проектором на підпростір* $L$ і позначається, як видно із самої рівності, $\mathrm{Pr}_L$ . Читач легко доведе таке.

**Лема 16.10.** *Якщо* $\mathsf{P} = \mathrm{Pr}_L$, *то* $\mathbb{1} - \mathsf{P} = \mathrm{Pr}_{L^\perp}$ .

**Лема 16.11.** *Нехай* $\mathsf{P}$ *– проектор на підпростір* $L$. *Тоді для всіх* $x$ $\langle \mathsf{P}x \,|\, x\rangle \leqslant \|x\|^2$, *причому рівність досягається в точності тоді, коли* $x \in L$.

◀ Узявши існуючі за теоремою 9.3 $y \in L$ і $z \in L^\perp$ такі, що $x = y + z$, одержимо $\langle \mathsf{P}x \,|\, x\rangle = \langle y \,|\, y + z\rangle = \|x\|^2 - \|z\|^2$. ▶

Із леми 16.11, теореми 16.5 і теореми 16.1 маємо

**Наслідок 16.13.** *Норма відмінного від* $\mathbb{O}$ *проектора дорівнює одиниці.*

Цього ж висновку можна дійти, вивівши з означення проектора і теореми 16.1 рівність $\|\mathsf{P}\|^2 = \mathsf{P}$.

Скрізь нижче, говорячи про проектори $\mathsf{P}_1$ і $\mathsf{P}_2$, під $L_k$ розуміємо $\operatorname{im}\mathsf{P}_k$, так що $\mathsf{P}_k = \mathrm{Pr}_{L_k}$ .

**Лема 16.12.** *Для проекторів* $\mathsf{P}_1$ *і* $\mathsf{P}_2$ *нерівність* $\mathsf{P}_1 \leqslant \mathsf{P}_2$ *рівносильна включенню* $L_1 \subset L_2$.

◀ За лемою 16.11 для будь-якого $x \in L_1$

$$\|x\|^2 = \langle \mathsf{P}_1 x \,|\, x\rangle,\ \langle \mathsf{P}_2 x \,|\, x\rangle \leqslant \|x\|^2.$$

Отже якщо $\mathsf{P}_1 \leqslant \mathsf{P}_2$, то для будь-якого $x \in L_1$ $\langle \mathsf{P}_2 x \,|\, x\rangle = \|x\|^2$. Водночас за тією ж лемою $\{x \in \mathrm{H} : \langle \mathsf{P}_2 x \,|\, x\rangle = \|x\|^2\} = L_2$.

Нехай тепер $L_1 \subset L_2$. Візьмемо довільний вектор $x \in \mathrm{H}$ і позначимо $y_k = \mathsf{P}_k x$. Тоді $\langle \mathsf{P}_k x \,|\, x\rangle = \|y_k\|^2$.

Для довільного вектора $u \in L_1$ $\mathsf{P}_1 u = u$ і, оскільки $u$ належить також $L_2$, $\mathsf{P}_2 u = u$. Із цих рівностей і ермітовості обох $\mathsf{P}_k$ маємо $\langle y_1 \,|\, u\rangle = \langle x \,|\, u\rangle = \langle y_2 \,|\, u\rangle$. Отже $y_2 - y_1 \in L_1^\perp$, що разом із тотожністю $y_2 = y_1 + y_2 - y_1$ дає $\|y_2\|^2 = \|y_1\|^2 + \|y_2 - y_1\|^2 \geqslant \|y_1\|^2$. ▶

**Лема 16.13.** *Нехай* $\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2 \in \mathcal{P}$, $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 + \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = \mathbb{O}$. *Тоді* $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 = \mathbb{O} = \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1$.

◀ За першим припущенням і означенням проектора оператори $\mathsf{P}_1$ і $\mathsf{P}_2$ ермітові. Тому для довільного $x$ $\langle \mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 x \,|\, x\rangle + \langle \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 x \,|\, x\rangle = \langle \mathsf{P}_1 x \,|\, \mathsf{P}_2 x\rangle + \langle \mathsf{P}_2 x \,|\, \mathsf{P}_1 x\rangle \equiv 2\,\mathrm{Re}\langle \mathsf{P}_1 x \,|\, \mathsf{P}_2 x\rangle = 2\,\mathrm{Re}\langle \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 x \,|\, x\rangle$, звідки за другим припущенням $\mathrm{Re}\langle \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 x \,|\, x\rangle = 0$. Зокрема, для всякого $u \in L_1$ $0 = \mathrm{Re}\langle \mathsf{P}_2 u \,|\, u\rangle = \langle \mathsf{P}_2 u \,|\, u\rangle$ (друга рівність спирається на лему 16.2). Тоді за наслідком 16.6, застосованим до операторів у гільбертовому просторі $L_1$, $\mathsf{P}_2|_{L_1} = \mathbb{O}|_{L_1}$. А це й означає, раз $L_1 = \mathrm{im}\,\mathsf{P}_1$, що $\mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = \mathbb{O}$. Залишається зауважити, що у формулюванні $\mathsf{P}_1$ і $\mathsf{P}_2$ взаємозамінні. ▶

Проектори $\mathsf{P}_1$ і $\mathsf{P}_2$ такі, що $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 = \mathbb{O}$, називаються *ортогональними*. Відношення ортогональності проекторів позначається, як і для векторів, символом $\perp$ . Рівність $\mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = (\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2)^*$ показує, що воно симетричне.

**Теорема 16.6.** *Для того щоб сума проекторів $\mathsf{P}_1$ і $\mathsf{P}_2$ була проектором, необхідно і достатньо, щоб вони були ортогональними. Якщо це виконано, то $\mathsf{P} \equiv \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2$ – проектор на підпростір $L \equiv L_1 + L_2$.*

◀ Необхідність випливає з наслідку 16.3 і тотожності

$$(\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2)^2 = \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 + \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2. \tag{8}$$

Достатність. Якщо $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$, то зважаючи на (8) $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 + \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = \mathbb{O}$, звідки за лемою 16.13 $\mathsf{P}_1 \perp \mathsf{P}_2$.

Друге твердження. Для довільних $u_1 \in L_1$ і $u_2 \in L_2$ $\mathsf{P}_k u_k = u_k$, звідки за умовою ортогональності проекторів $\mathsf{P}_{3-k}\mathsf{P}_k u = 0$, відтак $\mathsf{P}(u_1 + u_2) = \mathsf{P}_1 u_1 + \mathsf{P}_2 u_2 = u_1 + u_2$. Тому для будь-яких $x \in \mathrm{H}$ і $u \in L_1 + L_2$ $\langle \mathsf{P}x \,|\, u\rangle = \langle x \,|\, u\rangle$, а значить для будь-якого $x \in \mathrm{H}$ $x - \mathsf{P}x \in (L_1 + L_2)^\perp$. При цьому $\mathsf{P}x \in L_1 + L_2$, бо $\mathsf{P}_k x \in L_k$. ▶

**Теорема 16.7.** *Для того щоб добуток проекторів $\mathsf{P}_1$ і $\mathsf{P}_2$ був проектором, необхідно і достатньо, щоб вони були комутували. Якщо це виконано, то $\mathsf{P} \equiv \mathsf{P}_1\mathsf{P}_2$ – проектор на підпростір $L_1 \cup L_2$.*

◀ Необхідність. Якщо $\mathsf{P}_1$ і $\mathsf{P}_2$ не комутують, то за лемою 16.2 $\mathsf{P}$ навіть не ермітів.

Достатність. Якщо $\mathsf{P}_1$ і $\mathsf{P}_2$ – переставні ермітові оператори, то за лемою 16.2 $\mathsf{P}$ теж ермітів. Якщо до того ж $\mathsf{P}_k^2 = \mathsf{P}_k$, $k = 1, 2$, то й $\mathsf{P}$, очевидно, має цю властивість.

Друге твердження. Оскільки $\mathrm{im}\,\mathsf{P}_k = L_k$, то $\mathrm{im}\,\mathsf{P}_k\mathsf{P}_{3-k} \subset L_k$, а значить $\mathrm{im}\,\mathsf{P} \subset L_1 \cup L_2$ і для всякого $u \in L_1 \cap L_2$ $\mathsf{P}u = u$. Тоді для

будь-яких $x \in \mathrm{H}, u \in L_1 \cap L_2$ $\mathsf{P}x \in L_1 \cap L_2$ і $\langle \mathsf{P}x \,|\, u\rangle = \langle x \,|\, \mathsf{P}u\rangle = \langle x|u\rangle$ (перша рівність виражає вже доведену ермітовість $\mathsf{P}$), так що $x - \mathsf{P}x \in (L_1 \cap L_2)^\perp$. ►

**Теорема 16.8.** *Нехай* $\mathsf{P}_1$ *і* $\mathsf{P}_2$ *– проектори. Тоді умова*

$$\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 = \mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 \tag{9}$$

*необхідна і достатня для того, щоб оператор* $\mathsf{P}_2 - \mathsf{P}_1$ *був проектором. Якщо її виконано, то* $\mathsf{P}_2 - \mathsf{P}_1$ *– проектор на підпростір* $L_2 \cap L_1^\perp$.

Кожна з двох рівностей в умові (9) тягне за собою іншу (якщо в обох частинах перейти до спряжених операторів), тож перевіряти можна тільки одну з них.

◄ І необхідність, і достатність випливають із двосторонніх імплікацій

$$\mathsf{P}_2 - \mathsf{P}_1 \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathbb{1} - \mathsf{P}_2 - \mathsf{P}_1 \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (\mathbb{1} - \mathsf{P}_2)\mathsf{P}_1 = \mathbb{O},$$

перша з яких спирається на лему 16.10, а друга на неї ж і теорему 16.6.

Переписавши (9) у вигляді

$$(\mathbb{1} - \mathsf{P}_1)\mathsf{P}_2 = \mathsf{P}_2 - \mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_2(\mathbb{1} - \mathsf{P}_1),$$

виводимо друге твердження з теореми 16.7 і леми 16.10. ►

**Теорема 16.9.** *Для проекторів нерівність* $\mathsf{P}_1 \leqslant \mathsf{P}_2$ *рівносильна рівності* $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 = \mathsf{P}_1$.

◄ Нехай $\mathsf{P}_1 \leqslant \mathsf{P}_2$. Візьмемо до ільний $x \in \mathrm{H}$ і позначимо $y_k = \mathsf{P}_k x$. За побудовою $y_k \in L_k$. У доведенні леми 16.12 показано, що $y_2 - y_1 \in L_1^\perp$. Тоді з тотожності $y_2 = y_1 + y_2 - y_1$ маємо $y_1 = \mathsf{P}_1 y_2$, тобто $\mathsf{P}_1 x = \mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 x$.

Нехай тепер $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 = \mathsf{P}_1$, а значить і $\mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_1$. Тоді за теоремою 16.7 $\mathsf{P}_1$ – проектор на підпростір $L_1 \cap L_2$. З іншого боку, це проектор на $L_1$. Отже $L_1 = L_1 \cap L_2$, тобто $L_1 \subset L_2$. Тоді за лемою 16.12 $\mathsf{P}_1 \leqslant \mathsf{P}_2$. ►

Механічно об'єднавши теорему 16.8 із теоремою 16.9 і лемою 16.12, доходимо такого висновку.

**Наслідок 16.14.** *Наступні властивості пари проекторів рівносильні:*
*1)* $\mathsf{P}_1\mathsf{P}_2 = \mathsf{P}_1$; 2) $\mathsf{P}_2\mathsf{P}_1 = \mathsf{P}_1$; 3) $\mathsf{P}_2 - \mathsf{P}_1 \in \mathcal{P}$; 4) $\mathsf{P}_1 \leqslant \mathsf{P}_2$; 5) $L_1 \subset L_2$.

**Лема 16.14.** *Нехай $h$ – вектор у гільбертовому просторі такий, що $\|h\| = 1$. Тоді заданий рівністю $\mathsf{P}x = \langle x \,|\, h\rangle h$ оператор $\mathsf{P}$ є проектором на породжений вектором $h$ одновимірний підпростір.*

◀ Лема 14.9 стверджує ермітовість $\mathsf{P}$. Написавши $\langle \mathsf{P}x|h\rangle = \langle x|h\rangle\langle h|h\rangle = \langle x|h\rangle$, переконуємося, що $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$. І нарешті, рівність $\langle x - \mathsf{P}x \,|\, h\rangle = \langle x|h\rangle - \langle x|h\rangle$ показує, що $x - \mathsf{P}x \perp h$. ▶

### 16.3. Компактні ермітові оператори.

**Лема 16.15.** *Нехай $\mathsf{A}$ – компактний ермітів оператор у гільбертовому просторі. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ множина таких $\lambda \in \mathbb{R}$, що $|\lambda| > \varepsilon$ і $\ker(\mathsf{A} - \lambda\mathbb{1}) \neq \{0\}$, скінченна.*

◀ Неправильність висновку леми означала би існування додатного числа $\varepsilon$ і послідовностей $(\lambda_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(h_n) \in \mathrm{H}^{\mathbb{N}}$ таких, що $|\lambda_n| > \varepsilon$, $\mathsf{A}h_n = \lambda_n h_n$, $\langle h_n \,|\, h_k\rangle = \delta_{nk}$. А це суперечить лемі 15.2. ▶

**Теорема 16.10 (Гільберт).** *Нехай $\mathsf{A}$ – компактний ермітів оператор у гільбертовому просторі. Тоді в $\ker \mathsf{A}^\perp$ існує ортонормований базис із його власних векторів.*

◀ За лемою 16.15 знайдеться скінченна або зліченна множина $\Lambda \subset \mathbb{R}$ така, що для всіх $\lambda \in \Lambda$ і тільки для них $\ker(\mathsf{A} - \lambda\mathbb{1}) \neq \{0\}$. Занумеруємо її ненульові елементи індексом $n$, пробігаючим деяку множину $S \subset \mathbb{N}$, і позначимо $L_n = \ker(\mathsf{A} - \lambda_n\mathbb{1})$. За відомою властивістю ермітових операторів (сформульованою після леми 16.6) $L_n \perp L_k$ при $n \neq k$. У кожному з підпросторів $L_n$ (за теоремою **??** всі вони скінченновимірні) беремо довільний ортобазис. За наслідком 9.9 об'єднання цих базисів буде ортобазисом у натягнутому на $\bigcup\limits_{n\in S} L_n$ підпросторі $L$. Залишається показати, що $L = \ker \mathsf{A}^\perp$.

Оскільки всякий вектор $x \in L$ є скінченною або зліченною лінійною комбінацією (у другому випадку це сума збіжного за нормою ряду) власних векторів оператора $\mathsf{A}$, то $\mathsf{A}L \subset L$. Тоді за лемою 16.6 $\mathsf{A}L^\perp \subset L^\perp$, що дозволяє розглядати $\mathsf{A}|_{L^\perp}$ як оператор у гільбертовому просторі $L^\perp$ (а не діючий з $L^\perp$ у ширший простір H). За побудовою простору $L$ цей оператор не має ненульових власних чисел, тож за наслідком 16.10 $\mathsf{A}|_{L^\perp} = \mathbb{O}|_{L^\perp}$, тобто $L^\perp \subset \ker \mathsf{A}$. Звідси за лемою 9.4 і наслідком 9.7 одержуємо $\ker \mathsf{A}^\perp \subset L$. З іншого боку, $\ker \mathsf{A}$ складається з власних векторів,

відповідаючих власному числу нуль, тож за згаданою вище властивістю ермітових операторів $L \subset \ker \mathsf{A}^{\perp}$. ►

**Теорема 16.11** (Гільберт, Шмідт)**.** *Для того щоб оператор* $\mathsf{A}$ *в гільбертовому просторі* $\mathrm{H}$ *був ермітовим і компактним, необхідно і достатньо, щоб він зображувався у вигляді*

$$\mathsf{A}x = \sum_{n\in J} \gamma_n \langle x \mid h_n\rangle h_n, \tag{10}$$

*де* $J \subset \mathbb{N}$, $(h_n)$ *– ортонормована послідовність в* $\mathrm{H}$, *а* $(\gamma_n)$ *– послідовність в* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *така, що в разі нескінченності множини* $J$

$$\gamma_n \to 0. \tag{11}$$

*Якщо це виконано, то*

$$\mathsf{A}h_n = \gamma_n h_n \tag{12}$$

*і* $(h_n)$ *– ортонормований базис у* $\ker \mathsf{A}^{\perp}$.

◄ Необхідність. За теоремою 16.10 у $\ker \mathsf{A}^{\perp}$ існує ортонормований базис $(h_n, n \in J)$ з властивістю (12). Усі $\gamma_n$ дійсні, як власні числа ермітового оператора, і відмінні від нуля, бо інакше б деякі $h_n$ приналежали $\ker \mathsf{A}$. Стверджувана лемою 13.11 рівність (24) перетворюється з урахуванням (12) на (10). Співвідношення (11), у разі якщо множина $J$ нескінченна, є твердження теореми 15.6.

Достатність. За лемою 14.9 і наслідком 16.3 заданий рівністю (10) із дійсними $\gamma_n$ оператор $\mathsf{A}$ ермітів. За теоремою 15.6 він компактний.

Друге твердження випливає з теореми 13.8 (пункт (ii)) і наслідку 14.6. ►

Іноді теорему Гільберта – Шмідта формулюють у такій, дещо сильнішій, формі.

**Теорема 16.12** (Гільберт, Шмідт)**.** *Для того щоб оператор* $\mathsf{A}$ *в гільбертовому просторі був ермітовим і компактним, необхідно і достатньо, щоб він зображувався у вигляді*

$$\mathsf{A} = \sum_{n\in J} \gamma_n \mathsf{P}_n, \tag{13}$$

*де* $J \subset \mathbb{N}$, $(\gamma_n)$ *– послідовність відмінних від нуля дійсних чисел, а* $(\mathsf{P}_n)$ *– послідовність проекторів на попарно ортогональні одновимірні підпростори, і ряд у* (13) *збігається за нормою. Якщо це виконано, то всі* $\gamma_n$ *– власні числа оператора* $\mathsf{A}$.

◀ Необхідність. Додатково до того, що стверджує теорема 16.11 у частині необхідності, потрібно тільки довести збіжність за нормою ряду в правій частині (13). Якщо множина $J$ скінченна, то доводити нічого, тому міркуємо для $J = \mathbb{N}$.

Позначимо $\mathsf{A}_n = \gamma_1\mathsf{P}_1 + \ldots + \gamma_n\mathsf{P}_n$ і покажемо, що

$$\|\mathsf{A}_n - \mathsf{A}\| \to 0. \tag{14}$$

За побудовою оператори $\mathsf{A}_n$ обмежені і скінченновимірні, відтак за лемою 15.2 компактні. Також за побудовою ненульовими власними числами оператора $\mathsf{A}_n$ є і тільки вони. Тоді за наслідком 16.9

$$\|\mathsf{A}_{n+p} - \mathsf{A}_n\| = \max_{n<k\leqslant n+p} |\gamma_k|.$$

Ця рівність разом із стверджуваним теоремою 15.6 співвідношенням (11) показує, що послідовність $(\mathsf{A}_n)$ фундаментальна, після чого (14) випливає з наслідку 15.5 і стверджуваної теоремою 16.11 поточкової збіжності $(\mathsf{A}_n)$ до $\mathsf{A}$.

Достатність і друге твердження. Очевидно, рівність (13) разом із поясненнями позначень зумовлює поточкову рівність (10) (поясніть, як пов'язані $\mathsf{P}_n$ і $h_n$) і, якщо множина $J$ нескінченна, співвідношення (11), відтак теорема 16.11 стверджує компактність і ермітовість $\mathsf{A}$, а також те, що всі $\gamma_n$ – власні числа оператора $\mathsf{A}$. ▶

# Глава 6. Топологічні лінійні кільця

## §7. Спектральна теорія

17.1. Властивості резольвенти. Оскільки лінійне кільце і $*$кільце, воно ж інволютивне кільце, (див. п. 3.7) – окремі випадки алгебри (п. 3.1), то топологічне лінійне (і так само топологічне інволютивне) кільце є окремим випадком топологічної алгебри, тобто алгебри, наділеної топологією, відносно якої всі операції неперервні.

Елементи топологічного лінійного кільця (скорочено ТЛК) позначатимемо $A, B, \ldots$, можливо з індексами. Одиничний і нульовий елементи позначатимемо $\mathbf{1}$ і $O$ відповідно. Пригадаймо, що елемент $A$ інволютивного кільця такий, що $A^* = A$, ми назвали в п. 3.7 ермітовим.

Лінійне кільце називають (*напів*)*нормованим*, якщо на ньому задано (напів)норму, задовольняючу крім обов'язкових для всіх (напів)норм умов (8.1) і (8.2) (і умови невиродженості, якщо це норма) ще й дві додаткові, пов'язані з наявністю в лінійному кільці операції множення і одиничного елемента: $\|\mathbf{1}\| = 1$,

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|. \tag{1}$$

**Лема 17.1.** *Усяке напівнормоване кільце є топологічним лінійним кільцем. Усяке напівнормоване $*$кільце, в якому напівнорма має властивість $\|A^*\| \leqslant \|A\|$, є топологічним $*$кільцем.*

◀ Властивості $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$,

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \tag{2}$$

напівнорми зумовлюють неперервність лінійних операцій. Тотожність

$$A_1B_1 - A_2B_2 = (A_1 - A_2)B_1 + A_2(B_1 - B_2)$$

показує, що властивості (1) і (2) зумовлюють неперервність множення. Цим доведено перше твердження. Друге у світлі першого очевидне. ▶

Повне (як метричний простір) нормоване кільце називається *банаховою алгеброю*. Інволютивна банахова алгебра, в якій кожний елемент має властивість

$$\|A^*A\| = \|A\|^2, \tag{3}$$

називається *$C^*$-алгеброю*.

**Лема 17.2.** *Для кожного елемента $A$ $C^*$-алгебри $\|A^*\| = \|A\|$.*

◀ Із (1) і (3) маємо $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Замінивши в цій нерівності $A$ на $A^*$, дістанемо за четвертою властивістю інволюції (п. 3.7) $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. ▶

**Наслідок 17.1** (із лем 17.1 і 17.2)**.** *$C^*$-алгебра є топологічним $*$кільцем.*

**Наслідок 17.2.** *Множина ермітових елементів $C^*$-алгебри замкнута.*

**Приклад 17.1.** Нехай $T$ – довільна непорожня множина. Тоді $\mathbb{C}^T$ з поточковими операціями (у тому числі комплексним спряженням у ролі інволюції) – комутативне топологічне $*$кільце.

**Приклад 17.2.** Нехай $T$ – зліченно компактний топологічний простір. Тоді простір $\mathrm{C}(T)$ всіх комплекснозначних неперервних функцій на $T$ з поточковими і чебишовською нормою – комутативна інволютивна банахова алгебра (повнота є твердженням наслідку 7.3).

**Приклад 17.3.** Нехай $X$ – (напів)нормований простір над полем $\mathbb{C}$. Тоді $\mathcal{L}(X)$ – напівнормоване кільце, а якщо $X$ гільбертів, то навіть $*$кільце з ермітовим спряженням у ролі інволюції (леми 14.4 і 14.6 стверджують, що воно підходить на цю роль). Якщо розмірність $X$ більша за одиницю, то це кільце не комутативне. Якщо простір $X$ банахів, то за теоремою 13.1 $\mathcal{L}(X)$ також банахів простір, а значить і банахова алгебра (а якщо $X$ гільбертів, то, за наслідком 16.4, навіть $C^*$-алгебра). Клас ермітових елементів $C^*$-алгебри $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ це в точності клас ермітових операторів.

Скрізь нижче $\mathfrak{A}$ – ТЛК. Множину оборотних елементів його позначаємо $G(\mathfrak{A})$, а множину неперервних лінійних функціоналів на ньому – $\mathfrak{A}'$. Залишаються в силі введені в п. 3.7 означення і позначення спектра, множини регулярних чисел і резольвенти елемента лінійного кільця. Зокрема, резольвента елемента $A$ задається рівністю

$$R_A(\lambda) = (A - \lambda\mathbf{1})^{-1}.$$

Очевидна рівність

$$(A - \lambda\mathbf{1})^{-1} = -\lambda^{-1}(\mathbf{1} - \lambda^{-1}A)^{-1} \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0 \tag{4}$$

дає ще один вираз резольвенти у відмінних від нуля точках:

$$R_\lambda(A) = -\lambda^{-1}(\mathbf{1} - \lambda^{-1}A)^{-1} \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0. \tag{5}$$

Тотожність Гільберта (**??**) записується в діючих позначеннях так:

$$R_A(\mu) - R_A(\lambda) = -(\mu - \lambda)R_A(\mu)R_A(\lambda) \tag{6}$$

(природно, $\lambda, \mu \in \operatorname{reg} A$).
Щоб просунутись далі, потрібно накладати на ТЛК $\mathfrak{A}$ ті чи інші додаткові умови. Повний перелік їх такий:
(i) Для всякого $A \in \mathfrak{A}$ множина $\{\alpha \in \mathbb{C} :\ \mathbf{1} - \alpha A \in G(\mathfrak{A})\}$ відкрита.
(ii) Для всякого $A \in G(\mathfrak{A})$ множина $\{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda\mathbf{1} \in G(\mathfrak{A})\}$ відкрита.
(iii) Для всякого $A \in \mathfrak{A}$ відображення $\lambda \mapsto \lambda A$ з $\mathbb{C}$ в $\mathfrak{A}$ неперервне.
(iv) Операція обернення $A \mapsto A^{-1}$ на $G(\mathfrak{A})$ неперервна.
(v) Множина $G(\mathfrak{A})$ відкрита.
(vi) Для кожного $B \in G(\mathfrak{A})$ існує функціонал $\mathsf{g} \in \mathfrak{A}'$ такий, що $\mathsf{g}B \neq 0$.
Остання умова використовується тільки в п. 17.3.

**Лема 17.3.** *За умови (i) множина регулярних чисел довільного елемента непорожня, а спектр довільного елемента обмежений.*

◀ За умови (i) для будь-якого $A \in \mathfrak{A}$ існує додатне число $\varepsilon$ таке, що $\mathbf{1} - \alpha A \in G(\mathfrak{A})$ при $|\alpha| < \varepsilon$. Тоді, як видно з (5), $\lambda \in \operatorname{reg} A$ при $|\lambda| > \varepsilon^{-1}$. ▶

**Лема 17.4.** *За умов (i) і (ii) множина регулярних чисел довільного елемента відкрита.*

◀ Написавши для $A \in G(\mathfrak{A})$ тривіальне включення $0 \in \{\lambda \in \mathbb{C} :\ A - \lambda\mathbf{1} \in G(\mathfrak{A})\}$, виводимо з (ii), що нуль входить у множину регулярних чисел довільного оборотного елемента разом із деяким своїм околом.
Якщо ж $\mu \in \operatorname{reg} A \setminus \{0\}$, то, як видно з (5), $\mathbf{1} - \mu^{-1}A \in G(\mathfrak{A})$. Тоді за умовою (i) існує таке $r > 0$, що $\mathbf{1} - \lambda^{-1}A \in G(\mathfrak{A})$ при $|\lambda^{-1} - \mu^{-1}| < r$, то разом із (5) дає $A - \lambda\mathbf{1} \in G(\mathfrak{A})$ при $|\lambda^{-1} - \mu^{-1}| < r \wedge |\mu|^{-1}$. ▶

**Лема 17.5.** *Пара умов (iii) & (v) тягне за собою (i) і (ii).*

◀ За умовою (iii) відображення $\alpha \mapsto -\alpha A$ і $\lambda \mapsto -\lambda\mathbf{1}$ неперервні, відтак за наслідком 5.6 відображення $\alpha \mapsto \mathbf{1} - \alpha A$ і $\lambda \mapsto A - \lambda\mathbf{1}$ теж неперервні. Тоді за теоремою 5.3 множини $\{\alpha \in \mathbb{C} : \mathbf{1} - \alpha A \in G(\mathfrak{A})\}$ і $\{\alpha \in \mathbb{C} : A - \lambda\mathbf{1} \in G(\mathfrak{A})\}$ відкриті, як прообрази відкритої за умовою (v) множини $G(\mathfrak{A})$ (так що умову (ii) навіть перевиконано). ▶

**Лема 17.6.** *За умов (iii) і (iv) резольвента довільного елемента $A$ неперервна на* $\operatorname{reg} A$.

◀ Відображення $\lambda \mapsto R_A(\lambda)$ неперервне, як композиція неперервних відображень $\lambda \mapsto \lambda A - \mathbf{1}$ з $\operatorname{reg} A$ в $G(\mathfrak{A})$ і $B \mapsto B^{-1}$ з $G(\mathfrak{A})$ в $G(\mathfrak{A})$. ▶

**Лема 17.7.** *За умов (i), (ii) і (iv) для всякого* $A \in \mathfrak{A}$ $(\mathbf{1} - \alpha A)^{-1} \to \mathbf{1}$ *при* $\alpha \to 0$.

◀ Нехай $\mathfrak{U}$ – окіл одиниці в $\mathfrak{A}$. За умовою (iv) існує окіл одиниці $\mathfrak{V}$

$$\mathfrak{V}^{-1} \cap G(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{U} \cap G(\mathfrak{A}). \tag{7}$$

Зважаючи на неперервність (унаслідок (iii)) відображення $\alpha \mapsto \mathbf{1} - \alpha A$ існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що

$$\mathbf{1} - \alpha A \in \mathfrak{U} \quad \text{при} \quad |\alpha| < \varepsilon_1. \tag{8}$$

За умовою (i) існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що $1 - \alpha A \in G(\mathfrak{A})$ при $|\alpha| < \varepsilon_2$, що разом із (7) і (8) дає $(\mathbf{1} - \alpha A)^{-1} - \mathbf{1} \in \mathfrak{U}$ при $|\alpha| < \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$. ▶

**Лема 17.8.** *За умов (i), (iii) і (iv) для будь-якого* $A \in \mathfrak{A}$ $R_A(\lambda) \to O$ *при* $\lambda \to \infty$.

◀ Візьмемо в $\mathfrak{A}$ довільний окіл нуля $\mathfrak{U}$, а для нього – існуючий унаслідок неперервності додавання окіл нуля $\mathfrak{V}$ такий, що

$$\mathfrak{V} + \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}. \tag{9}$$

За умовою (iii) існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що

$$\alpha\mathfrak{V} \subset \mathfrak{V} \quad \text{при} \quad |\alpha| < \varepsilon_1, \tag{10}$$

$$\alpha\mathbf{1} \in \mathfrak{V} \quad \text{при} \quad |\alpha| < \varepsilon_1. \tag{11}$$

За лемою 17.7 існує таке $\varepsilon_2 > 0$, що $(\mathbf{1} - \alpha A)^{-1} - \mathbf{1} \in \mathfrak{V}$ при $|\alpha| < \varepsilon_2$, відтак унаслідок (10)

$$\alpha((\mathbf{1} - \alpha A)^{-1} - \mathbf{1}) \subset \mathfrak{V} \quad \text{при} \quad |\alpha| < \varepsilon \equiv \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2,$$

що разом із (11) і (9) дає

$$\alpha((\mathbf{1} - \alpha A)^{-1} - \mathbf{1}) + \alpha\mathbf{1} \subset \mathfrak{V} \quad \text{при} \quad |\alpha| < \varepsilon,$$

або, рівносильно,

$$\lambda^{-1}(\mathbf{1} - \lambda^{-1}A)^{-1} \subset \mathfrak{V} \quad \text{при} \quad |\alpha| > \varepsilon^{-1}.$$

Тепер стверджуване співвідношення випливає з (4) і (5). ▶

**Теорема 17.1.** *Нехай $\mathfrak{A}$ – ТЛК з властивостями (i) – (iv). Тоді для будь-яких $A \in \mathfrak{A}$ і $\mathsf{f} \in \mathfrak{A}'$ функція $\mathsf{f}R_A : \operatorname{reg} A \to \mathbb{C}$ аналітична і*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathsf{f}R_A(\lambda) = 0. \tag{12}$$

◀ Зафіксуємо існуючі за лемами 17.3 і 17.5 числа $\lambda \in \operatorname{reg} A$ і $r > 0$ такі, що $B_{\mathbb{C}}(\lambda, r) \subset \operatorname{reg} A$. Тоді при $|\mu - \lambda| < r$ маємо із (6) і лінійності $\mathsf{f}$

$$\mathsf{f}R_A(\mu) - \mathsf{f}R_A(\lambda) = (\mu - \lambda)\mathsf{f}(R_A(\mu)R_A(\lambda)).$$

За лемою 17.6 $R_A(\mu) \to R_A(\lambda)$ при $\mu \to \lambda$, що разом з останнім співвідношенням і неперервністю $\mathsf{f}$ зумовлює існування границі

$$\lim_{\mu\to\lambda} \frac{\mathsf{f}R_A(\mu) - \mathsf{f}R_A(\lambda)}{\mu - \lambda}$$

(рівної, очевидно, $\mathsf{f}(R_A(\lambda)^2)$). Цим доведено аналітичність $\mathsf{f}R_A$.
Рівність (12) випливає з неперервності й лінійності $\mathsf{f}$ за лемою 17.8. ▶

### 17.2. Напівнормовані кільця.

**Лема 17.9.** *Нехай $(a_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ – послідовність комплексних чисел така, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ збігається при $|t| < L$, а $A$ – елемент напівнормованого кільця такий, що*

$$\|A^m\| < L^m \quad \text{для деякого } m \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

*Тоді $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_r| \, \|A^n\| < \infty$.*

◀ Зафіксуємо існуюче за умовою (13) натуральне число $m$ таке, що $\|A^m\| < L^m$, і позначимо $r = \|A^m\|^{1/m}$. Оскільки збіжність степеневого ряду у внутрішніх точках круга збіжності абсолютна, то за припущенням про $(a_n)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty. \tag{14}$$

Очевидно, для будь-якої послідовності $(b_n)$ невід'ємних чисел

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_{km+j} \tag{15}$$

(не виключається значення $\infty$ обох частин рівності). Поклавши $b_n = |a_n|\,\|A^n\|$ і написавши на підставі (1)

$$\|A^{km+j}\| \leqslant \|A^j\|\,\|A^m\|^k \equiv \|A^j\| r^{mk},$$

одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,\|A^n\| \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \|A^j\| \sum_{k=0}^{\infty} |a_{km+j}| r^{km} \leqslant \max_{0\leqslant j<m} \frac{\|A^j\|}{r^j} \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{\infty} |a_{km+j}| r^{km+j},$$

що разом із (15) і (14) приводить до потрібного висновку. ►

**Наслідок 17.3.** *За умов леми 17.9 послідовність* $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k A^k, n \in \mathbb{N}\right)$ *фундаментальна.*

**Лема 17.10.** *Властивість* (13) *елемента* $A$ *напівнормованого кільця рівносильна такій:*

$$\underline{\lim}\,\|A^n\|^{1/n} < L. \tag{16}$$

◄ Оскільки, очевидно, для будь-якого натурального $m$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\|A^n\|^{1/n} \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}}\,\|A^{mk}\|^{1/mk},$$

і, зважаючи на (1), $\|A^{mk}\|^{1/mk} \leqslant \|A^m\|^{1/m}$, то властивість (13) зумовлює (16). З іншого боку, якщо (13) не має місця, то для будь-якого $n$ $\|A^n\| \geqslant L^n$, а значить $\underline{\lim}\,\|A^n\|^{1/n} \geqslant L$. ►

**Лема 17.11.** *Нехай* $A$ *– елемент банахової алгебри такий, що*

$$\underline{\lim}\,\|A^n\|^{1/n} < 1. \tag{17}$$

*Тоді елемент* $1 - A$ *оборотний і* $(1-1)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.

◄ Позначимо $S_n = 1 + A + \ldots + A^n$. За наслідком 17.3 і лемою 17.10 послідовність $(S_n)$ фундаментальна, відтак і збігається, внаслідок повноти банахової алгебри, до деякого елемента $S$. Лема 5.46 стверджує, що $S = (1-A)^{-1}$. ►

**Наслідок 17.4** (із леми 17.11 і формули (5)). *Нехай $A$ – елемент банахової алгебри, а $\lambda$ – комплексне число таке, що $|\lambda| > \underline{\lim}\, \|A^n\|^{1/n}$. Тоді $\lambda \in \operatorname{reg} A$ і*

$$R_A(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$

**Лема 17.12.** *Нехай $B_0$ і $B$ – елементи банахової алгебри, $B_0$ оборотний,*

$$\|B - B_0\| < \left\|B_0^{-1}\right\|^{-1}. \tag{18}$$

*Тоді $B$ також оборотний і*

$$\left\|B^{-1} - B_0^{-1}\right\| \leqslant \frac{\left\|B_0^{-1}\right\|}{1 - \left\|B_0^{-1}\right\| \, \|B - B_0\|}.$$

◀ Позначимо $\Delta B = B - B_0,\ A = -B_0^{-1}\Delta B$. Тоді

$$B = B_0(1 - A), \tag{19}$$

$$\|A\| \leqslant \left\|B_0^{-1}\right\| \, \|\Delta B\|. \tag{20}$$

Із (18) і (20) маємо сильнішу ніж (17) нерівність $\|A\| < 1$, тож за лемою 17.11 елемент $1 - A$ оборотний. Тепер із (19) і оборотності $B_0$ випливають за лемою 3.6 оборотність $B$ і рівність

$$B^{-1} = (1 - A)^{-1} B_0^{-1}. \tag{21}$$

За другим твердженням леми 17.12

$$(1 - A)^{-1} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

звідки

$$\left\|(1 - A)^{-1} - 1\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} A^k\right\|.$$

З останньої рівності і нерівності

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} A^k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|^k$$

маємо

$$\left\|(1 - A)^{-1} - 1\right\| \leqslant \frac{\|A\|}{1 - \|A\|},$$

що разом із (21) дає

$$\left\|B^{-1} - B_0^{-1}\right\| \leqslant \frac{\|A\| \left\|B_0^{-1}\right\|}{1 - \|A\|}.$$

При цьому, як показано вище, $\|A\| < 1$. Залишається зауважити, що $(1 - \|A\|^{-1}) \leqslant \left(1 - \left\|B_0^{-1}\right\| \|\Delta B\|\right)^{-1}$ внаслідок (20). ►

Рівність $\|\lambda A - \mu A\| = |\lambda - \mu| \, \|A\|$ показує, що всяке напівнормоване кільце задовольняє умову (iii). Таким чином, із леми 17.11 випливає

**Наслідок 17.5.** *Банахова алгебра задовольняє умови (i) – (v).*

**Наслідок 17.6** (з лем 17.3, 17.4 і наслідку 17.5)**.** *Спектр довільного елемента банахової алгебри – обмежена замкнута множина.*

**Наслідок 17.7** (з наслідку 17.5, леми 17.5 і теореми 17.1)**.** *Нехай $\mathfrak{A}$ – банахова алгебра. Тоді для будь-яких $A \in \mathfrak{A}$ і $\mathsf{f} \in \mathfrak{A}'$ функція $\mathsf{f}R_A : \operatorname{reg} A \to \mathbb{C}$ аналітична і справджується рівність* (12).

### 17.3. Теореми про спектр і супутні результати.

**Теорема 17.2.** *Нехай ТЛК $\mathfrak{A}$ задовольняє умови (i) – (iv) і (vi). Тоді спектр кожного елемента $A \in \mathfrak{A}$ непорожній.*

◄ Якщо $\sigma(A) = \varnothing$, то $\operatorname{reg} A = \mathbb{C}$. Тоді за теоремою 17.1 для будь-якого $\mathsf{f} \in \mathfrak{A}'$ функція $\mathsf{f}R_A$ ціла (а значить неперервна) і задовольняє умову (12), яка спільно з неперервністю спричинює обмеженість. Будучи обмеженою цілою функцією, $\mathsf{f}R_A$ за теоремою Ліувіля стала. Звідси, ще раз узявши до уваги (12), одержуємо $\mathsf{f}R_A(\lambda) = 0$ для всіх $\lambda \in \mathbb{C}$ і $\mathsf{f} \in \mathfrak{A}'$. А це суперечить умові (vi), згідно з якою для кожного $\lambda$ існує функціонал $\mathsf{f}_\lambda \in \mathfrak{A}'$ такий, що $\mathsf{f}_\lambda R_A(\lambda) \neq 0$. ►

**Наслідок 17.8** (із теореми 17.2 і леми 17.5)**.** *Нехай ТЛК задовольняє умови (iii) – (vi). Тоді спектр кожного елемента $A \in \mathfrak{A}$ непорожній.*

За наслідком 14.1 усякий напівнормований простір, у тому числі всяка банахова алгебра, задовольняє умову (vi) (навіть у сильнішій формі – без вимоги оборотності $A$). Тому, замінивши в доведенні теореми 17.2 посилання на теорему 17.1 посиланням на наслідок 17.7, доходимо такого висновку.

**Теорема 17.3.** *Спектр довільного елемента банахової алгебри непорожній.*

**Теорема 17.4.** *Якщо всі ненульові елементи задовольняючого умови (i) – (iv) і (vi) ТЛК оборотні, то воно ізоморфне лінійному кільцю* $\mathbb{C}$.

◀ Якщо ТЛК $\mathfrak{A}$ задовольняє умови (i) – (iv) і (vi), то за теоремою 17.2 для кожного $A \in \mathfrak{A}$ існує число $\varkappa(A)$ таке, що елемент $A - \varkappa(A)\mathbf{1}$ необоротний. Останнє означає, за припущенням оборотності ненульових елементів, що $A = \varkappa(A)\mathbf{1}$. Звідси відразу випливають єдиність $\varkappa(A)$ для даного $A$ і лінійність функціонала $\varkappa$. Поклавши в тотожності

$$AB - \alpha\beta\mathbf{1} = (A - \alpha\mathbf{1})B + \alpha(B - \beta\mathbf{1})$$

$\alpha = \varkappa(A), \beta = \varkappa(B)$, бачимо, що $\varkappa(A)\varkappa(B) = \varkappa(AB)$. Отже $\varkappa$ – гомоморфізм $\mathfrak{A}$ в $\mathbb{C}$.
Якщо $\varkappa(A) = \lambda = \varkappa(B)$, то $A = \lambda\mathbf{1} = B$. Отже $\varkappa$ ін'єкція. Це до того ж сюр'єкція, бо кожному $\lambda \in \mathbb{C}$ відповідає елемент $A \in \mathfrak{A}$ такий, що $\lambda = \varkappa(A)$ (а саме $A = \lambda\mathbf{1}$). ▶

**Теорема 17.5** (Гельфанд, Мазур)**.** *Банахова алгебра, всі ненульові елементи якої оборотні, ізометрично ізоморфна банаховій алгебрі* $\mathbb{C}$.

◀ За теоремою 17.3 і припущенням оборотності ненульових елементів для кожного елемент $A$ банахової алгебри $\mathfrak{A}$ існує число $\varkappa(A)$ таке, що $A = \varkappa(A)\mathbf{1}$. У доведенні попередньої теореми показано, що відображення $A \mapsto \varkappa(A)$ – ізоморфізм $\mathfrak{A}$ на $\mathbb{C}$. Крім того, з останньої рівності маємо $\|A\| = |\varkappa(A)|$. ▶

Для довільного елемента $A$ задовольняючого умови (i) – (iv) і (vi) ТЛК позначимо

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \quad (< \infty \text{ за лемою } 17.3).$$

Число $r(A)$ називається *спектральним радіусом* елемента $A$. Зважаючи на наслідок 17.6, в означенні спектрального радіуса елемента банахової алгебри можна замінити sup на max.

**Наслідок 17.9** (із наслідку 17.4)**.** *У банаховій алгебрі* $r(A) \leqslant \varliminf \|A^n\|^{1/n}$.

**Теорема 17.6** (Гельфанд)**.** *Для довільного елемента* $A$ *банахової алгебри*

$$r(A) = \lim \|A^n\|^{1/n}. \tag{22}$$

Складовою частиною теореми є твердження про існування границі в правій частині (22).

◀ Позначимо $q(A) = \underline{\lim}\,\|A^n\|^{1/n}$, $E_A = \{\lambda : \lambda > r(A)\}$. За наслідком 17.9 $r(A) \leqslant q(A)$. Для довільного функціонала $\mathsf{f} \in \mathfrak{A}'$ позначимо $\varphi_{\mathsf{f}}(\lambda) = \mathsf{f}R_A(\lambda)$. Із лінійності і неперервності $\mathsf{f}$ маємо за наслідком 17.4

$$\varphi_{\mathsf{f}}(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathsf{f}(A^n)}{\lambda^{n+1}} \quad \text{при} \quad |\lambda| > q(A).$$

Оскільки за наслідком 17.7 $\varphi_{\mathsf{f}}$ аналітична і в ширшій області $E_A$, то цей розклад має місце і в ній. Тому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathsf{f}(A^n)|}{|\lambda|^{n+1}} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \in E_A. \tag{23}$$

Позначимо

$$\mathsf{a}_{n,\lambda}\mathsf{f} = \lambda^{-(n+1)}\mathsf{f}(A^n). \tag{24}$$

Очевидно, функціонал $\mathsf{a}_{n,\lambda}$ на $\mathfrak{A}'$ лінійний. Формула (23) показує, що для кожного $\mathsf{f} \in \mathfrak{A}'$ $\sup\limits_n |\mathsf{a}_{a,\lambda}\mathsf{f}| < \infty$, а теорема 13.1 стверджує повноту нормованого простору $\mathfrak{A}'$. Тоді за теоремою Банаха – Штейнгауза $\sup\limits_n \|\mathsf{a}_{n,\lambda}\| < \infty$. Отже, $\sup\limits_n |\mathsf{a}_{n,\lambda}\mathsf{f}_n| < \infty$ для всякої послідовності $(\mathsf{f}_n) \in \mathfrak{A}'^{\mathbb{N}}$ такої, що $\|\mathsf{f}_n\| = 1$. Узявши для кожного $n$ існуючий за наслідком 14.2 з теореми Гана – Банаха функціонал $\mathsf{f}_n \in \mathfrak{A}'$ такий, що $\mathsf{f}_n(A^n) = \|A^n\|$ і $\|\mathsf{f}_n\| = 1$ (для нього згідно з (24) $\mathsf{a}_{n,\lambda}\mathsf{f}_n = \lambda^{-(n+1)}\|A^n\|$), одержимо $\sup\limits_n |\lambda|^{-(n+1)}\|A^n\| < \infty$. Інакше кажучи, для кожного $\lambda \in E_A$ існує додатне число $c_\lambda$ таке, що

$$\|A^n\| \leqslant c_\lambda |\lambda|^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже $\overline{\lim}\,\|A^n\|^{1/n} \leqslant r(A)$, що разом із нерівністю $r(A) \leqslant q(A)$ доводить теорему. ▶

**Наслідок 17.10** (із теореми 17.6 і леми 17.10)**.** *Властивість* (13) *елемента $A$ банахової алгебри рівносильна такій: $r(A) < L$.*

**Наслідок 17.11** (із наслідків 17.3 і 17.10)**.** *Нехай $A$ – елемент банахової алгебри, а $(a_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ – послідовність комплексних чисел така, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ збігається при $|t| < r$, де $r$ – деяка більше за $r(A)$ число. Тоді ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n A^n$ також збігається.*

**Наслідок 17.12.** *Для довільних елементів $A$ і $B$ банахової алгебри* $r(BA) = r(AB)$.

◀ Унаслідок асоціативності множення $(BA)^n = B(AB)^{n-1}A$. Звідси за властивістю (1) напівнорми на лінійному кільці маємо

$$\|(BA)^n\| \leqslant \|B\| \, \|(AB)^{n-1}\| \, \|A\|,$$

після чого нерівність $r(BA) \leqslant r(AB)$ випливає з теореми 17.6. Поміняв-ши ролями $A$ і $B$, одержимо $r(AB) \leqslant r(BA)$. ▶

**Наслідок 17.13.** *Нехай $A$ і $T$ – елементи банахової алгебри, $T$ оборотний. Тоді* $r(T^{-1}AT) = r(A)$.

**Наслідок 17.14.** *Спектральний радіус ермітового елемента $A$ $C^*$-алгебри дорівнює його нормі:* $r(A) = \|A\|$.

◀ Очевидно, для будь-якого натурального $n$ елемент $A^n$ теж ермітів, так що $A^n(A^n)^* = A^{2n}$. Тоді за означенням $C^*$-алгебри $\|A^{2n}\| = \|A^n\|^2$, зокрема, $\left\|A^{2^k}\right\| = \left\|A^{2^{k-1}}\right\|^2$. Звідси за індукцією виводимо, що $\left\|A^{2^k}\right\| = \|A\|^{2^k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, після чого стверджувана рівність випливає з теоре-ми 17.6. ▶

Цей результат допускає глибоке узагальнення:

**Теорема 17.7.** *Нехай $A$ – ермітів елемент $C^*$-алгебри. Тоді для будь-якого многочлена $\varphi$ з дійсним коефіцієнтами* $\|\varphi(A)\| = \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\varphi(\lambda)|$.

◀ Очевидно, елемент $\varphi(A)$ теж ермітів (цього могло б не бути, якби деякі з коефіцієнтів многочлена мали ненульові уявні частини). Тому за наслідком 17.14

$$\|\varphi(A)\| = \max_{\lambda\in\sigma(\varphi(A))} |\lambda|.$$

При цьому за теоремою 3.8 $\sigma(\varphi(A)) = \varphi(\sigma(A))$, так що

$$\max_{\lambda\in\sigma(\varphi(A)} |\lambda| = \max_{\mu\in\sigma(A)} |\varphi(\mu)|. \quad ▶$$

**Лема 17.13.** *Нехай $A_1, \ldots, A_p$ – елементи банахової алгебри такі, що $A_iA_j = O$ при $i \neq j$. Тоді* $r(A_1 + \ldots + A_p) \leqslant r(A_1) \vee \ldots \vee r(A_p)$.

◄ Нехай $A$ і $B$ – елементи банахової алгебри такі, що $AB = O = BA$. Тоді $(A+B)^n = A^n + B^n$, звідки $\|(A+B)^n\| \leqslant 2(\|A^n\| \vee \|B^n\|)$, а значить

$$\overline{\lim}\, \|(A+B)^n\|^{1/n} \leqslant \overline{\lim}\, \|A^n\|^{1/n} \vee \overline{\lim}\, \|B^n\|^{1/n}.$$

Тепер нерівність $r(A+B) \leqslant r(A) \vee r(B)$ випливає з теореми 17.6. Щоб вивести звідси твердження леми в повній загальності за індукцією, достатньо покласти $A = A_1 + \ldots + A_{p-1}, B = A_p$. ►

**Лема 17.14.** *Нехай $A$ і $B$ – переставні елементи банахової алгебри, $r(B) = 0$. Тоді $r(A+B) = r(A)$.*

◄ За теоремою 17.6 для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $l(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\left\|A^k\right\| \leqslant (r(A)+\varepsilon)^k \quad \text{при} \quad k > l(\varepsilon). \tag{25}$$

З умови $r(B) = 0$ випливає за тією ж теоремою існування для кожного $\theta > 0$ такого $c(\theta) > 0$, що

$$\|B^k\| \leqslant c(\theta)\theta^n, \ n \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

З умови $AB = BA$ маємо

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

так що

$$\|(A+B)^n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\|A^k\right\| \left\|B^{n-k}\right\|. \tag{27}$$

Зважаючи на (26) і очевидну нерівність $\binom{n}{k} \leqslant n^k$ для всіх $m \in \mathbb{N}$ і $\theta > 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\|A^k\right\| \left\|B^{n-k}\right\| \leqslant c(\theta) b_m n^m \theta^{n-m}, \tag{28}$$

де $b_m = m(1 + \|A\| + \ldots + \|A^m\|)$.
Із (25) і (26) маємо для всіх $\varepsilon > 0, \theta > 0$ і $n > l(\varepsilon)$

$$\sum_{k=l(\varepsilon)+1}^{n} \binom{n}{k} \left\|A^k\right\| \left\|B^{n-k}\right\| \leqslant$$

$$c(\theta)\sum_{k=l(\varepsilon)+1}^{n}\binom{n}{k}(r(A)+\varepsilon)^k\theta^{n-k}.$$

Замінивши в правій частині останньої нерівності суму від $l(\varepsilon)+1$ до $n$ сумою від 0 до $n$, одержимо з урахуванням (28)

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\|A^k\right\|\,\left\|B^{n-k}\right\|\leqslant c(\theta)(b_m n^m\theta^{n-m}+(r(A)+\varepsilon+\theta)^n).$$

Це спільно з (27) і теоремою 17.6 показує, що за умов леми і додаткового припущення $r(A)=0$ буде $r(A+B)=0$. Якщо ж $r(A)>0$, то взявши в останній нерівності $\theta\in]0,r(A)[$, одержимо з (27) за теоремою 17.6 $r(A+B)\leqslant r(A)+\varepsilon+\theta$. А це з огляду на довільну близькість $\varepsilon$ і $\theta$ до нуля означає, що $r(A+B)\leqslant r(A)$. З іншого боку, $A=A+B+(-B)$, так що $r(A)\leqslant r(A+B)$. ▶

## 18. Функційне числення в банахових алгебрах

18.1. Голоморфні функції на абстрактній банаховій алгебрі. Позначимо $D(r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| < r\}$.

Нехай $\mathfrak{A}$ – елемент банахової алгебри, а $f$ – функція комплексної змінної, розкладна в деякому крузі $D(r)$ радіуса $r > r(A)$ у степеневий ряд:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \tag{1}$$

Покладаємо за означенням

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n \tag{2}$$

(збіжність ряду в правій частині є твердженням наслідку 17.11). У цьому означенні можна й обійтися без рівності (2), написавши для голоморфної в крузі $D(r)$ $(r > r(A))$ функції рівність (2) у вигляді

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{3}$$

Згідно з цим означенням для будь-яких $\lambda \in \mathbb{C},\ r > \lambda$ і голоморфної в крузі $D(r)$ функції $f$

$$f(\lambda \mathsf{1}) = f(\lambda)\mathsf{1}. \tag{4}$$

Із (3), неперервності (за лемою 17.1) множення в напівнормованій алгебрі і з наслідку 17.13 випливає

**Наслідок 18.1.** Нехай $A$ і $T$ – елементи банахової алгебри, $T$ оборотний. Тоді для будь-яких $r > r(A)$ і голоморфної в крузі $D(r)$ функції $f$ $f(T^{-1}AT) = T^{-1}f(A)T$.

**Лема 18.1.** *Нехай $A$ і $B$ – елементи банахової алгебри такі, що $AB = O = BA$. Тоді для будь-яких $r > r(A) \vee r(B)$ і голоморфної в крузі $D(r)$ функції $f$*

$$f(A + B) = f(A) + f(B) - f(0)\mathsf{1}.$$

◀ За припущенням про $A$ і $B$ і лемою 17.4 $r(A + B) \leqslant r(A) \vee r(B)$, а значить $r(A + B) < r$. За цим же припущенням $(A + B)^n = A^n + B^n$,

тож

$$f(A+B) = f(0)\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} B^n$$
$$= f(0)\mathbf{1} + f(A) - f(0)\mathbf{1} + f(B) - f(0)\mathbf{1}. \qquad \blacktriangleright$$

Цей результат узагальнюється за індукцією так:

**Наслідок 18.2.** Нехай $A_1, \ldots, A_p$ – елементи банахової алгебри такі, що $A_i A_j = O$ при $i \neq j$. Тоді для будь-яких $r > r(A_1) \vee \ldots \vee r(A_p)$ і голоморфної в крузі $D(r)$ функції $f$

$$f(A_1 + \ldots + A_p) = f(A_1) + \ldots + f(A_p) - (p-1) f(0)\mathbf{1}.$$

**Теорема 18.1.** *Нехай $A$ і $B$ – переставні елементи банахової алгебри такі, що $r(A) > 0$ і $B^m = O$ для деякого натурального $m$. Тоді для будь-яких $r > r(A)$ і голоморфної в крузі $D(r)$ функції $f$*

$$f(A+B) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(A) B^k}{k!}.$$

◀ За умовою при $|t| < r(A)$ має місце розклад (1), а значить і розклад

$$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-k)!} t^{n-k}$$

похідної довільного порядку $k$. Отже

$$f^{(k)}(A) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-k)!} A^{n-k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{5}$$

За умовою

$$B^n = O \quad \text{при} \quad n \geqslant m. \tag{6}$$

Звідси за теоремою 17.6 $r(B) = 0$, відтак за лемою 17.14 $r(A+B) = r(A)$, що разом із (2) дає

$$f(A+B) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (A+B)^n. \tag{7}$$

З умов $AB = BA$ і (6) маємо

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n\wedge(m-1)} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k.$$

Підставивши цей вираз $(A+B)^n$ у (7), дістанемо

$$f(A+B) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k +$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k \equiv \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-k)!} A^{n-k},$$

що разом із (5) доводить теорему. ►

**18.2. Голоморфні функції на банаховій алгебрі обмежених лінійних операторів.** У цьому пункті $X$ банахів простір. Усе, що говорилось вище про банахові алгебри, стосується й $\mathcal{L}(X)$. Але є й специфічні для операторних алгебр результати. Один із них і є предметом цього пункту.

Нехай $X$ – пряма сума своїх підпросторів $X_1, \ldots, X_p$ (див. п. 13.4) і для кожного $i \in \{1, \ldots, p\}$ $\mathsf{A}_i \in \mathcal{L}(X_i)$. Заданий рівністю

$$\mathsf{A}(x^1 + \cdots + x^p) = \mathsf{A}_1 x^1 + \ldots + \mathsf{A}_p x^p \quad (x^i \in X_i) \tag{8}$$

оператор $\mathsf{A} : X \to X$ називається *прямою сумою операторів* $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_p$ і позначається $\mathsf{A}_1\oplus, \ldots, \oplus\mathsf{A}_p$. Очевидно, він теж лінійний і

$$\|\mathsf{A}_1\oplus, \ldots, \oplus\mathsf{A}_p\| = \|\mathsf{A}_1\| + \ldots + \|\mathsf{A}_p\|,$$

так що $\mathsf{A}_1\oplus, \ldots, \oplus\mathsf{A}_p \in \mathcal{L}(X)$.

**Лема 18.2.** *Нехай банахів простір $X$ є прямою сумою своїх підпросторів $X_1, \ldots, X_p$, а оператор $\mathsf{A} \in \mathcal{L}(X)$ – прямою сумою операторів $\mathsf{A}_1 \in \mathcal{L}(X_1), \ldots, \mathsf{A}_p \in \mathcal{L}(X_p)$. Тоді*

$$\sigma(\mathsf{A}) = \sigma(\mathsf{A}_1) \bigcup \ldots \bigcup \sigma(\mathsf{A}_p).$$

◄ Нехай $\lambda \in \sigma(\mathsf{A}_i)$ для деякого $i \in \{1, \ldots, p\}$. Тоді за означенням спектра і наслідком 13.9 існує послідовність $(x_n^i, n \in \mathbb{N})$ така, що $\|x_n^i\| = 1$

і $\mathsf{A}_i x_n^i - \lambda x_n^i \to 0$ при $n \to \infty$. Але $\mathsf{A}_i x_n^i = \mathsf{A} x_n^i$. Отже оператор $\mathsf{A} - \lambda \mathbf{I}$ необоротний. Цим доведено включення $\sigma(\mathsf{A}_1) \bigcup \ldots \bigcup \sigma(\mathsf{A}_p) \subset \sigma(\mathsf{A})$.

Нехай тепер $\lambda \notin \sigma(\mathsf{A}_1) \bigcup \ldots \bigcup \sigma(\mathsf{A}_p)$. Тоді за наслідком 13.9

$$\inf_{x^i \in X_i, \|x^i\|=1} \|\mathsf{A}_i x^i - \lambda x^i\| > 0, \quad i = 1, \ldots, p,$$

і тим більше

$$\inf_{\substack{x^1 \in X_1, \ldots, x^p \in X_p \\ \|x^1\| = \ldots = \|x^p\| = 1}} \sum_{i=1}^{p} \|\mathsf{A}_i x^i - \lambda x^i\| > 0.$$

У термінах заданої рівністю (13.22) норми $\mathfrak{m}_p$ (яку далі записуємо без індекса) цю нерівність можна, з огляду на (8), переписати так:

$$\inf_{\mathfrak{m}(x)=p} \mathfrak{m}(\mathsf{A}x - \lambda x) > 0. \tag{9}$$

Виведемо звідси, що $\lambda \notin \sigma(\mathsf{A})$.

Приналежність $\lambda$ спектрові оператора $\mathsf{A}$ означала б існування такої послідовності $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, що $\|x_n\| = 1$ і $\|\mathsf{A}x_n - \lambda x_n\| \to 0$. Тоді за наслідком 13.10

$$\mathfrak{m}(\mathsf{A}x_n - \lambda x_n) \to 0. \tag{10}$$

Позначимо $x_n' = p x_n / \mathfrak{m}(x_n)$. За вибором $x_n$ і з огляду на (**??**) $\mathfrak{m}(x_n') \geqslant 1$, тож із (10) маємо $\mathfrak{m}(\mathsf{A}x_n' - \lambda x_n') \to 0$. При цьому за побудовою $\mathfrak{m}(x_n') = p$. Таким чином, припущення $\lambda \in \sigma(\mathsf{A})$ суперечить (9). Цим доведено включення $\sigma(\mathsf{A}) \subset \sigma(\mathsf{A}_1) \bigcup \ldots \bigcup \sigma(\mathsf{A}_p)$. ►

**Наслідок 18.3.** За умов леми 18.2 $r(\mathsf{A}) = r(\mathsf{A}_1) \vee \ldots \vee r(\mathsf{A}_p)$.

**Теорема 18.2.** *Нехай банахів простір $X$ є прямою сумою своїх підпросторів $X_1, \ldots, X_p$. Тоді для будь-яких $\mathsf{A}_1 \in \mathcal{L}(X_1), \ldots, \mathsf{A}_p \in \mathcal{L}(X_p)$, $r > r(\mathsf{A}_1) \vee \ldots \vee r(\mathsf{A}_p)$ і голоморфної в крузі $D(r)$ функції $f$*

$$f(\mathsf{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{A}_p) = f(\mathsf{A}_1) \oplus \ldots \oplus f(\mathsf{A}_p).$$

◄ Позначимо $g(t) = f(t) - f(0)$ (так що $g(0) = 0$). Для довільних $x^1 \in X_1, \ldots, x^p \in X_p$ покладемо $x = x^1 + \ldots + x^p$,

$$\widetilde{\mathsf{A}}_k x = \mathsf{A}_k x^k, \quad k = 1, \ldots, p. \tag{11}$$

За побудовою $\mathsf{A}_k^n x = \mathsf{A}_k^n x^k$, $n \in \mathbb{N}$, що з урахуванням рівності $g(0) = 0$ дає

$$g\left(\widetilde{\mathsf{A}}_k\right) x = g(\mathsf{A}_k) x^k \equiv f(\mathsf{A}_k) x - f(0) x^k.$$

Додавши до обох частин цієї рівності $f(0)x$, дістанемо

$$f\left(\widetilde{\mathsf{A}}_k\right)x = f(\mathsf{A}_k)x^k + f(0)(x - x^k).$$

Інакше кажучи,

$$f\left(\widetilde{\mathsf{A}}_k\right) = f\left(\delta_k^1\mathsf{A}_1\right) \oplus \ldots \oplus f\left(\delta_k^p\mathsf{A}_p\right), \tag{12}$$

де $\delta_k^i$ – символ Кронекера.

Позначимо $y_k^i = \delta_k^i\mathsf{A}_kx^k$. Тоді $\mathsf{A}_kx^k = y_k^1 + \ldots + y_k^p$, звідки за формулою (11)

$$\widetilde{\mathsf{A}}_j\widetilde{\mathsf{A}}_kx = \widetilde{\mathsf{A}}_j(y_k^1 + \ldots + y_k^p) = \mathsf{A}_jy_k^j,$$

так що $\widetilde{\mathsf{A}}_j\widetilde{\mathsf{A}}_k = \mathbb{O}$ при $j \neq k$. Крім того, очевидно,

$$\widetilde{\mathsf{A}}_1 + \ldots + \widetilde{\mathsf{A}}_p = \mathsf{A}_1 \oplus + \oplus \mathsf{A}_p.$$

Тепер наслідок 18.2 стверджує, що

$$f(\mathsf{A}_1 \oplus \ldots \oplus \mathsf{A}_p) = f\left(\widetilde{\mathsf{A}}_1\right) + \ldots + f\left(\widetilde{\mathsf{A}}_p\right) - (p-1)f(0)\mathbb{1}_X.$$

Залишається написати

$$f\left(\widetilde{\mathsf{A}}_1\right) + \ldots + f\left(\widetilde{\mathsf{A}}_p\right) = f(\mathsf{A}_1) \oplus f(0)\mathbb{1}_{X_2} \oplus \ldots \oplus f(0)\mathbb{1}_{X_p} + \ldots$$

$$+f(0)\mathbb{1}_{X_1} \oplus \ldots \oplus f(0)\mathbb{1}_{X_{p-1}} \oplus f(\mathsf{A}_p) + (p-1)f(0)\mathbb{1}_X,$$

де перша рівність спирається на (12), а друга очевидна. ▶

**18.3. Голоморфні функції на банаховій алгебрі квадратних матриць.** Зафіксувавши в просторі $\mathbb{C}^d$ базис, можемо ототожнити елементи банахової алгебри $\mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ з $d \times d$-матрицями. У матричних позначеннях альтернативним записом рівності $Q = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_p$ є

$$Q = \begin{pmatrix} \boxed{Q_1} & & \mathrm{O} \\ & \ddots & \\ \mathrm{O} & & \boxed{Q_p} \end{pmatrix} \tag{13}$$

а теорема 18.2 конкретизується так:

**Наслідок 18.4.** Нехай матриця $Q$ має будову (13). Тоді для будь-яких $r > r(Q_1) \vee \ldots \vee r(Q_p)$ і голоморфної в крузі $D^{(r)}$ функції $f$

$$f(Q) = \begin{pmatrix} \boxed{f(Q_1)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{f(Q_p)} \end{pmatrix}$$

Пригадаймо один з основних результатів лінійної алгебри.

**Теорема 18.3 (**Жордан**).** *Для всякої $d\times d$-матриці $A$ існують натуральні числа $p, m_1, \ldots, m_p$, комплексні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ і невироджена $d \times d$-матриця $T$ такі, що $m_1 + \ldots + m_p = d$ і $A = TJT^{-1}$, де*

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{K_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{K_p} \end{pmatrix}, \quad K_j = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}}_{m_j}.$$

Матриця $J$ називається *жордановою нормальною формою* матриці $A$, а $K_1, \ldots, K_p$ – *жордановими клітинами.* Усі вони верхньотрикутні, тому

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = \prod_{j=1}^{p} (\lambda_j - \lambda)^{m_j}.$$

Оскільки спектр лінійного оператора в скінченновимірному просторі вичерпується його власними числами (що в загальному випадку, звичайно ж, неправильно), то остання рівність означає, що $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$, відтак $r(A) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} |\lambda_j|$ (зауважимо, що не обов'язково всі $\lambda_j$ різні – одному власному числу може відповідати кілька жорданових клітин).

**Наслідок 18.5** (із теореми 18.3, наслідку 18.4 і наслідку 18.1)**.** *У позначеннях теореми Жордана для будь-яких $r > |\lambda_1| \vee \ldots \vee |\lambda_p|$ і голоморфної в крузі $D(r)$ функції $f$*

$$f(A) = T \begin{pmatrix} \boxed{f(K_1)} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \boxed{f(K_p)} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Цей наслідок зводить обчислення голоморфної функції від довільної матриці до такої ж задачі для жорданової клітини.

Розглянемо, записуючи $\lambda$ і $K$ без індекса, окрему клітину

$$K(m,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0\\ & & \ddots & & & \\ \dots\dots\dots & & & \ddots & \dots\dots & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda\end{pmatrix}$$

розміру $m\times m$. Очевидно,

$$K(m,\lambda)=\lambda\mathbb{I}+K(m,0), \tag{14}$$

де $\mathbb{I}$ – одинична $m\times m$-матриця.

Із виразу $K(m,\lambda)$ виводимо за індукцією таке:

**Лема 18.3.** *У матриці $K(m,0)^l$ $(0\leqslant l<m)$ одиниці стоять на перетині $i$-го рядка з $(i+l)$-м стовпчиком, $i=1,\dots,l-m$, а решта елементів нулі; $K(m,0)^m=\mathbb{O}$.*

**Наслідок 18.6.** Для будь-яких $m\in\mathbb{N},\lambda\in\mathbb{C},r>|\lambda|$ і голоморфної в крузі $D(r)$ функції $f$

$$f(K(m,\lambda))=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(\lambda)}{j!}K(m,0)^j. \tag{15}$$

◀ Із (14) маємо за теоремою 18.1, застосованою до $A=\lambda\mathbb{I}$, $B=K(m,0)$ (рівність $B^m=\mathbb{O}$ є твердженням леми 18.3) маємо

$$f(K(m,\lambda))=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{f^{(j)}(\lambda\mathbb{I})}{j!}K(m,0)^j.$$

А це з огляду на (4) і є рівність (15). ▶

Розгорнутий запис рівності (15) такий:

$$f(K) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{f^{(m-2)}(\lambda)}{(m-2)!} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

**18.4. Неперервні функції ермітового елемента $C^*$-алгебри.** Для довільної множини $T \subset \mathbb{R}$ через $\mathrm{P}(T)$ позначимо множину всіх многочленів із дійсними коефіцієнтами, розгляданих як функції на $T$. Під $\mathrm{C}(T)$ розуміємо простір дійсних неперервних функцій на $T$. У разі коли $T$ обмежена і замкнута, наділяємо його нормою

$$\|f\|_T = \max_{t \in T} |f(t)|,$$

яку ми назвали в прикладі 8.3 чебишовською.

У цьому пункті міркування ведуться для довільної $C^*$-алгебри $\mathfrak{A}$, клас ермітових елементів якої позначаємо, як і у випадку $\mathfrak{A} = \mathcal{L}(\mathrm{H})$, через Herm.

**Теорема 18.4.** *Для всякого ермітового елемента $A$ $C^*$-алгебри існує єдине адитивне над полем $\mathbb{R}$ лінійне мультиплікативне ізометричне відображення $Q_A : \mathrm{C}(T) \to \mathrm{Herm}$ таке, що для будь-якого $\varphi \in \mathrm{P}(T)$*

$$Q_A \varphi = \varphi(A). \tag{16}$$

◀ За наслідком 17.6 множина $\sigma(A)$ обмежена і замкнута, тому на $\mathrm{C}(\sigma(A))$ можна задати чебишовську норму $\|\cdot\|_{\sigma(A)}$.

Очевидно, задане рівністю (16) відображення $Q_A : \mathrm{P}(T) \to \mathrm{Herm}$ лінійне і мультиплікативне. Теорема 17.7 стверджує, що для будь-якого $\varphi \in \mathrm{P}(T)$ $\|Q_A\varphi\| = \|\varphi\|_{\sigma(A)}$, тобто $Q_A$ ізометрія, а значить і рівномірно неперервне відображення.

Множина Herm лежить у повному (за означенням $C^*$-алгебри) метричному просторі $\mathfrak{A}$ і за наслідком 17.2 замкнута, відтак за лемою 6.6 і сама є повним метричним простором. Простір $\mathrm{C}(\sigma(A))$ з чебишовською

нормою теж, як показано в прикладі 8.3, повний. За теоремою Ваєрштраса про апроксимацію множина $\mathrm{P}(\sigma(A))$ щільна в ньому. Тоді, з огляду на встановлену вище рівномірну неперервність $Q_A$ на $\mathrm{P}(\sigma(A))$, теорема 6.3 стверджує, що $Q_A$ однозначно продовжується до рівномірно неперервного відображення з $\mathrm{C}(\sigma(A))$. Очевидно, це продовження успадковує від свого звуження на $\mathrm{P}(\sigma(A))$ лінійність, мультиплікативність і ізометричність. ▶

Для довільних $A \in \mathrm{Herm}$ і $f \in \mathrm{C}(\sigma(A))$ покладаємо за означенням $f(A) = Q_A f$. Неважко показати (зробіть це), що для голоморфної в крузі $D(r)$ радіуса $r > \|A\|$ функції $f$ це означення узгоджується з даним у п. 18.1.

# Література


[БУШ] Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К.: Вища школа, 1990.

[И] ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М.: Наука, 1979.

[И] Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.

[КА] Канторович Л.В., Акимов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977.

[КГ] Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1988.

[КФ] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы функционального анализа и теории функций. – М.: Наука, 1989.

[Кур] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973.

[Кут] Кутателадзе С.С. Основы функционального анализа. – Новосибирск: Наука, 1983.

[ЛС] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965.

[М] Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.

[РСН] Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979.

[Р] Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975.

Навчальне видання

**Юрачківський Андрій Павлович**

# Начала функціонального аналізу і теорії інтеграла

Навчальний посібник для студентів природничих факультетів

*Оригінал-макет Н.Ф. Рябової*