ЗАВДАННЯ

Індивідуальні завдання самостійної роботи № 1[1]

В а р і а н т 1

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{x+y+1}$,

K – контур трикутника ABC: $A(0;-1)$, $B(2;0)$, $C(0;1)$;

б) $I = \oint\limits_K (x^2+y^2+1)dl$, K: $x^2+y^2=-x$;

в) $I = \int\limits_K dl$, K: $y=(x-9)^{3/2}$ $(9 \le x \le 18)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (y^2+\sin x)dx + (2xy+\cos x)dy$

K – контур трикутника ABC: $A(0;-1)$, $B(2;0)$, $C(0;1)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} y^2dx + xdy$, K: $x^2+y^2=-x$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K_+} ydx + (y+z)dy + (3x+z)dz$

---

[1] В усіх варіантах $\vec{n}$ – орт орієнтації поверхні Σ, $\vec{r} = \{x; y; z\}$, K_+ – додатно орієнтований (відносно множини, яку він обмежує) контур.

K – контур трикутника ABC: $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (x+y)dx + 2ydy + (x+z)dz$, $K: \begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+z=4. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz + zdxdy$, Σ – частина площини $x+y+2z=2$,

розміщена в першому октанті, $(\vec{n}, Oz)$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, Σ – повна поверхня конуса $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$

(безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 2

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} \frac{dl}{y-x+2}$,

K – контур трикутника OAB: $O(0;0)$, $A(2;1)$, $B(2;4)$;

б) $I = \oint\limits_{K} \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, $K: x^2+y^2=2y$;

в) $I = \int\limits_{K} dl$, $K: x=3t, y=3t^2, z=2t^3$ $(0 \le t \le 1)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (y^3+x^2)dx + (3xy^2+y^3)dy$

K – контур трикутника OAB: $O(0;0)$, $A(2;1)$, $B(2;4)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (x^2+2y^2)dx + (2xy-y^3)dy$, $K: x^2+y^2=2y$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x^2+y)dx + ydy + (y+z)dz$

K – контур трикутника ABC: $A(4;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+} ydx+xdy+(z^2+x)dz$, $K:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+z=2.\end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+zdxdz$, Σ – частина площини $x+2y+2z=2$,

розміщена в першому октанті, $(\vec{n},Oz)$ – гострий кут;

б) $I=\iint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2z$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 3

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_{K} x^2ydl$, K – контур чотирикутника $OABC$:

$O(0;0)$, $A(3;1)$, $B(3;1)$, $C(0;2)$;

б) $I=\oint\limits_{K}(x+y^2)dl$, $K: x^2+y^2=-y$;

в) $I=\int\limits_{K} dl$, $K: x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ $(0\le t\le\pi)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(x+y)dx-x^2dy$, K – контур чотирикутника $OABC$:

$O(0;0)$, $A(3;1)$, $B(3;1)$, $C(0;2)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(2xy+3)dx+(x^2+3xy)dy$, $K: x^2+y^2=-y$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_{K} xydx-ydy+xzdz$

K – контур трикутника ABC: $A(0;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;1;1)$;

б) $I=\oint\limits_K (x+y)dx-(y+z)dy+(x+z)dz$, $K:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2x. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma xdydz+zdxdy$, Σ – частина поверхні $x^2+y^2+z^2=1$ $(z\ge 0)$, $(\vec{n},Oz)$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r},\vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=4-x^2-y^2$ і $z=0$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 4

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K (x+y+y^2)dl$, K – контур чотирикутника $OABC$: $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;2)$, $C(0;1)$;

б) $I=\oint\limits_K x^2ydl$, $K:\ x^2+y^2=-2x$;

в) $I=\int\limits_K dl$, $K:\ x^{2/3}+y^{2/3}=1$ $(0\le x\le 1)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+} (3y-2x)dx+(y^2+3x)dy$, K – контур чотирикутника $OABC$: $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;2)$, $C(0;1)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+} (y^3+\sqrt{x^2+1})dx-(x^3+3y)dy$, $K:\ x^2+y^2=-2x$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K 2xy^3zdx + 3x^2y^2zdy + x^2y^3dz$

K – контур трикутника ABC: $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $I = \oint\limits_K 3ydx + (x+y)dy + zdz$, $K: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = 3. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma zdydz - xdzdx$, $\Sigma: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(\vec{n}, Oz)$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = -2z$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 5

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{2y - 3x + 5}$,

K – контур трикутника OAB: $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(0;3)$;

б) $I = \oint\limits_K (x + \sqrt{x^2 + y^2})dl$, $K: x^2 + y^2 = -4x$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K: x = 5\cos t,\ y = 5\sin t,\ z = 5t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x + y)dx + x^2dy$,

K – контур трикутника OAB: $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(0;3)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (y^3 + 2y)dx - (x^3 - 3x)dy$, $K: x^2 + y^2 = -4x$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K (y+z)dx + (x+z)dy + zdz$

K – контур трикутника ABC: $A(0;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;1;1)$;

б) $I = \oint\limits_K (x+z)dx + zdy + ydz$, $K: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ z=1. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma xdydz - ydzdx + z^5dxdy$, Σ – площина трикутника ABC: $A(0;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(1;1;1)$, $(\vec{n}, Ox)$ – гострий кут;

б) $I = \iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, $\Sigma: x^2+y^2+\frac{z^2}{25}=1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 6

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \frac{dl}{x+y+3}$,

K – контур трикутника ABC: $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_K (\sqrt{x^2+y^2} - 2y)dl$, $K: x^2+y^2=-2x$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K: y=(3-x)^{3/2}$ $(-6 \le x \le 3)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x+y)dx + (2x-y^2)dy$,

K – контур трикутника ABC: $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (y^3-x)dx - (x^3+y)dy$, $K: x^2+y^2=-2x$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K y dx + 2x dy - z^2 dz$

K – контур трикутника ABC: $A(0;0;0)$, $B(1;2;0)$, $C(0;0;3)$;

б) $I = \oint\limits_K (x+z)dx + z dy + y dz$, $K: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x = 1/2. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma y dy dz + x dx dy$, Σ – площина трикутника ABC: $A(0;0;0)$, $B(1;2;0)$, $C(0;0;3)$, $(\vec{n}, Ox)$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma$, $\Sigma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 7

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \frac{dl}{2x - y + 7}$,

K – контур трикутника ABC: $A(0;3)$, $B(-2;0)$, $C(1;0)$;

б) $I = \oint\limits_K \frac{dl}{x^2 + y^2 + 1}$, $K: x^2 + y^2 = -2x$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K: y = (7-x)^{3/2}$ $(-2 \le x \le 7)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x + y^2)dx + (2xy - x)dy$,

K – контур трикутника ABC: $A(0;3)$, $B(-2;0)$, $C(1;0)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (y^3 - x^2)dx - (x^3 + y^2)dy$, $K: x^2 + y^2 = -2x$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K (x+2y)dx + (y-2z)dy + (x+y)dz$

K – контур трикутника ABC: $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $I = \oint\limits_K (x+y)dx + xdy + z^2dz$, $K: \begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=4. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma xdydz + zdzdx + ydxdy$, Σ – площина трикутника ABC:

$A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$, $(\vec{n}, Oz)$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, Σ: $x^2+y^2+z^2=-z$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 8

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{3x+2y+8}$,

K – контур трикутника ABC: $A(0;0)$, $B(2;1)$, $C(2;3)$;

б) $I = \oint\limits_K (xy+x^2+y^2)dl$, K: $x^2+y^2=-2y$;

в) $I = \int\limits_K dl$, K: $y=(4-x)^{3/2}$ $(-5 \le x \le 4)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x+y^2)dx - (x+y^2)dy$,

K – контур трикутника ABC: $A(0;0)$, $B(2;1)$, $C(2;3)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} x^2ydx - y^2xdy$, K: $x^2+y^2=-2y$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K ydx - xdy + (x+y)dz$

K – контур трикутника ABC: $A(0;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(1;3;1)$;

б) $I = \oint\limits_K y^2dx + zdy + ydz$, K: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma xdydz + 2ydzdx + (x+z)dxdy$, Σ – площина трикутника

ABC: $A(0;0;0)$, $B(1;3;0)$, $C(1;3;1)$, $(\vec{n}, Ox)$ – гострий кут;

б) $I = \iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і $x^2+y^2+z^2=1$ $(z>0)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 9

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \frac{dl}{2x+y+9}$, K – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(3;1)$, $D(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_K (x^2+y^2)dl$, K: $r=\sqrt{\cos\varphi}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$;

в) $I = \int\limits_K dl$, K: $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $z=e^t$ $(-\infty < t \le 0)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (2x+y^2+y)dx + (2xy+4x)dy$, K – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(3;1)$, $D(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} xy^2dx + (x^2y + 2x)dy$, $K:\ r = \sqrt{\cos\varphi},\ -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2.$

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K xdx + y^2dy + xydz$, $K:\ \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2; \end{cases}$

б) $I = \oint\limits_K z^2dx + zdy + ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;5)$.

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma xdydz + zdzdx + ydxdy$, Σ – площина трикутника ABC: $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;5)$, $(\vec{n}, Oz)$ – гострий кут;

б) $I = \iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(z > 0)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 10

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \dfrac{dl}{x - y + 10}$, K – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;4)$, $D(0;4)$;

б) $I = \oint\limits_K (\sqrt{x^2 + y^2} + x)dl$, $K:\ (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2,\ x \ge 0$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K:\ r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (2x + 2xy)dx + (x^2 + 10x)dy$, K – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;4)$, $D(0;4)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (2x + 3y)dx + (13x + y)dy$,

K: $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, $x \geq 0$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K} (x + y^2)dx + (x + z)dy + (x + y)dz$, K – контур трикутника ABC: $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;10)$;

б) $I = \oint\limits_{K} ydx - xdy - xzdz$, K: $\begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} xdydz - zdxdy$, Σ – площина трикутника ABC: $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;10)$, $(\vec{n}, Oz)$ – гострий кут;

б) $I = I = \iint\limits_{\Sigma_+} x^3dydz + y^3dzdx + zdxdy$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $z = 2 - x^2 - y^2$ $(z > 0)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 11

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} \frac{dl}{x + y + 11}$, K – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;5)$, $D(0;1)$;

б) $I = \oint\limits_{K} xdl$, K: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

в) $I=\int\limits_K dl$, $K:\ y=(11-x)^{3/2}\ \ (-5\le x\le 11)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(3x^2+y)dx+y^2dy$, K – контур чотирикутника $ABCD$: $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(2;5)$, $D(0;1)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(x+y)dx-(x-y)dy$, $K:\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K ydx+(x-z)dy+ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$;

б) $I=\oint\limits_K ydx+xdy-(x+z)dz$, $K:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x+z=4.\end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma d\sigma$, Σ – частина півсфери $x^2+y^2+z^2=4\ \ (z\ge 0)$, вирізана циліндром $x^2+y^2=2x$;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec r,\vec n)d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2+y^2=4$, $z=0$ і $x+z=4$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 12

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \dfrac{dl}{2x+3y+12}$, K – контур трикутника ABC: $A(-2;0)$, $B(0;1)$, $C(0;-1)$;

б) $I=\oint\limits_K (x^2+y^2+2x)dl$, $K:\ x^2+y^2=-x$;

в) $I=\int\limits_K dl$, $K:\ r=\sqrt{\cos\varphi}\ \ (0\le\varphi\le\pi/4)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+} (y^2+x^2)dx+(3xy-y)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-2;0)$, $B(0;1)$, $C(0;-1)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+} (2y^3+3x^2)dx+(-2x^3+y^2)dy$, $K:\ x^2+y^2=-x$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K ydx+(z+y)dy+(x+z)dz$, K – контур трикутника ABC: $A(1;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$;

б) $I=\oint\limits_K (x-y)dx+2ydy-zdz$, $K:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y+z=2.\end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma xdydz+z^2dxdy$, Σ – площина трикутника ABC: $A(1;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$, $(\vec{n},Oz)$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r},\vec{n})d\sigma$, $\Sigma:\ x^2+y^2+z^2=-2z+3$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 13

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \dfrac{dl}{x+y+13}$, K – контур трикутника ABC: $A(-1;0)$, $B(2;0)$, $C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_K x dl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$;

в) $I = \int\limits_K dl$, $K: y = x\sqrt{x}$ $(1 \le x \le 9)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x - y)dx + (xy + 1)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-1;0), B(2;0), C(0;2)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (3y - x^2)dx + (13x - y^2)dy$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y = x^2$ і $y = 2 - x^2$;

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K x^2 y dx - (z + x)dy + z dz$, K – контур трикутника ABC: $A(0;0;0), B(2;3;0), C(0;3;4)$;

б) $I = \oint\limits_K z dx - y dy + x dz$, $K: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y = 1. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_\Sigma (x^2 + y^2 - z^2)d\sigma$, Σ – частина поверхні конуса $(2 - z)^2 - x^2 - y^2 = 0$ $(z \le 2)$, вирізана параболоїдом $z = x^2 + y^2$, $(\vec{n}, Oz)$ – гострий кут;

б) $I = \iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2 + y^2 = 4$, $y + z = 1$ і $y + z = 4$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 14

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \dfrac{xdl}{x+y+14}$, K – контур трикутника ABC: $A(0;-2)$, $B(3;0)$, $C(0;1)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=x^2$ і $y=8-x^2$;

в) $I=\oint\limits_K dl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=(14-x)^{3/2}$, $x=5$ і $y=0$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+} (x+2y)dx-(xy-1)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(0;-2)$, $B(3;0)$, $C(0;1)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+} (x^2+2y)dx-(3x-y^2)dy$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=x^2$ і $y=8-x^2$;

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K (3x-2y)dx+zdy+ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(0;0;0)$, $B(2;1;0)$, $C(0;1;3)$;

б) $I=\oint\limits_K (x+y)dx-(y+z)dz$, $K:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=4,\\ y=1.\end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma y^2dydz-xdzdx$, K – площина трикутника ABC: $A(0;0;0)$, $B(2;1;0)$, $C(0;1;3)$, $(\vec{n},Oz)$ – гострий кут;

б) $I = \iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = x^2 + y^2$ і $4 - z = x^2 + y^2$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 15

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \frac{dl}{2x + y + 15}$, K – контур трикутника ABC: $A(-3;0)$, $B(0;0)$, $C(-1;1)$;

б) $I = \oint\limits_K x dl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y = -x^2$ і $y = x^2 - 2$;

в) $I = \oint\limits_K dl$, $K: r = \cos\varphi \quad (-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (2x^2 + 3y)dx + (3x + 2y)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-3;0)$, $B(0;0)$, $C(-1;1)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (x^2 + 2y)dx - (3x - y^2)dy$,

$K: r = \cos\varphi \quad (-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2)$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K z dx + (x + z)dy - z^2 dz$, K – контур трикутника ABC: $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;1;3)$;

б) $I = \oint\limits_K z dx - x dy + x dz$, $K: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + z = 2. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz - ydzdx + xdxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(1;0;0), B(0;2;0), C(1;1;3)$, $(\vec{n}, Oz)$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z = x^2 + y^2$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ $(z \geq 0)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 16

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} \frac{xdl}{x + y + 16}$, K – контур трикутника ABC: $A(-1;2)$, $B(0;4)$, $C(1;0)$;

б) $I = \oint\limits_{K} xydl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y = x^2 - 1$ і $y = -x^2 + 7$;

в) $I = \oint\limits_{K} dl$, $K: r = \sin\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x + y)dx + (3x - y^2)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-1;2)$, $B(0;4)$, $C(1;0)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (x^2 y + x)dx + (y - xy^2)dy$, $K: r = \sin\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K} xydx + zdy + ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(1;1;0), B(0;2;0), C(3;2;2)$;

б) $I=\oint\limits_K ydx+\sin ydy+dz$, K – контур, утворений перетином сфери $x^2+y^2+z^2=4$ з координатними площинами $x=0,\ y=0,\ z=0$ ($x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$).

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma y^2dzdx-xdxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(1;1;0),\ B(0;2;0),\ C(3;2;2)$, $(\vec{n},Oz)$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2+y^2+z^2=2z$ і $z=1/2$ $(0\le z\le 1/2)$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 17

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \frac{dl}{2x+y+9}$, K – контур чотирикутника $ABCD$: $A(-3;0),\ B(0;-2),\ C(3;0),\ D(0;2)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=x-1$;

в) $I=\oint\limits_K dl$, $K: r=-\sin\varphi$ $(\pi\le\varphi\le 2\pi)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(2x+3y^2)dx+(3x^2y-y)dy$, K – контур чотирикутника $ABCD$: $A(-3;0),\ B(0;-2),\ C(3;0),\ D(0;2)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(y^3-2x)dx-(x^3+3y)dy$, $K: r=-\sin\varphi$ $(\pi\le\varphi\le 2\pi)$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K (y-x)dx+x^2dy+zdz$, K – контур трикутника ABC: $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$;

б) $I=\oint\limits_K ydx-xdy+zdz$, $K:\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2(x+y). \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma (x+z)dydz-zdxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(6;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$, $(\vec{n},Oz)$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r},\vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=x^2+y^2$ і $z=2(x+y)-1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 18

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \frac{xdl}{x+2y+9}$, K – контур трикутника ABC: $A(-3;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=3x+3$;

в) $I=\oint\limits_K dl$, $K: r=-\cos\varphi$ $(\pi/2\le\varphi\le 3\pi/2)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+} (2x+5y)dx-(3x+x^2)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-3;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(x^2-5y)dx+(y^2-6x)dy$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=3x+3$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_{K}(2y+3x)dx+(z-2y)dy+ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(1;1;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;2)$;

б) $I=\oint\limits_{K}(z+y)dx-zdy-ydz$, $K:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=2x-2y.\end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+3z)dydz+xdzdx-ydxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(1;1;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;2)$, $(\vec{n},Oz)$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=x^2+y^2$ і $x+y+z=1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 19

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_{K}\frac{ydl}{x+y+10}$, K – контур трикутника ABC: $A(-3;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_{K}xydl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=4x+4$;

в) $I=\int\limits_{K}dl$, $K:\ y=(19-x)^{3/2}$ $(-6\le x\le 19)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (x^2 + y)dx - (x + y^2)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-3;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (2y + x)dx - (3x + 2y)dy$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = 4x + 4$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_{K} (3z - 2x)dx + ydy - xdz$, K – контур трикутника ABC: $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$;

б) $I = \oint\limits_{K} (z - x)dx + zdy + ydz$, $K: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z = 2y - 2x. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I = \iint\limits_{\Sigma} (x + y)dydz - (x + z)dzdx + xdxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;3)$, $(\vec{n}, Oz)$ – гострий кут;

б) $I = \oiint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $z = -1$ і $z = 1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 20

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_{K} \frac{xdl}{x + y + 10}$, K – контур трикутника ABC: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=5x+5$;

в) $I=\int\limits_K dl$, $K: y=(x-10)^{3/2}$ $(10\le x\le 14)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(\sin x+y^2)dx+(2xy-x)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(0;0)$, $B(3;0)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(2yx-y)dx+(x^2-5y)dy$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=5x+5$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K(-x+z)dx+zdy+ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(2;2;0)$, $B(2;2;2)$, $C(0;0;0)$;

б) $I=\oint\limits_K(x-y)dx+xdy+ydz$, $K:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ z=2x.\end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma(y-z)dydz+xdxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(2;2;0)$, $B(2;2;2)$, $C(0;0;0)$, $(\vec{n},Ox)$ – гострий кут;

б) $I=\iint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=x^2+y^2$ і $z=2x$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 21

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \dfrac{ydl}{x+y+10}$, K – контур трикутника ABC: $A(-3;0)$, $B(0;0)$, $C(0;4)$;

б) $I=\oint\limits_K xydl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-3x+3$;

в) $I=\int\limits_K dl$, K: $y=(2x-1)^{3/2}$ $(1/2\le x\le 5/2)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+} (x-y^2)dx+(2xy+y)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-3;0)$, $B(0;0)$, $C(0;4)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+} (y-x)dx-(y^2-3x)dy$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-3x+3$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K x^2dx-zdy-ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$;

б) $I=\oint\limits_K (y-z)dx+(x-z)dy+zdz$, K: $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ z=2y. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma (x-z)dydz+zdxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(4;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$, $(\vec{n},Oz)$ – гострий кут;

б) $I=\iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r},\vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $z=x^2+y^2$ і $z=2y$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 22

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_K \dfrac{x\,dl}{x+y+12}$, K – контур трикутника ABC: $A(-2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_K xy\,dl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-4x+4$;

в) $I=\int\limits_K dl$, K: $y=(2x+1)^{3/2}$ $(0\le x\le 4)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+} (xy-2x)dx+(x^2-2y)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;-3)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+} (x^2y-1)dx+(y-x^3)dy$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-4x+4$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_K z^2dx-xdy-ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(2;2;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;2;4)$;

б) $I=\oint\limits_K (2x-3z)dx+2xdy-zdz$, K: $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z=x. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma (x-2z)dydz+(y-2x)dxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(2;2;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;2;4)$, $(\vec{n},Ox)$ – гострий кут;

б) $I = \iint\limits_{\Sigma_+} (\vec{r}, \vec{n}) d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2 + y^2 = 4$, $x + y + z = 1$ і $x + y + z = 4$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 23

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I = \oint\limits_K \frac{x dl}{x + y + 12}$, K – контур трикутника ABC: $A(-2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;-3)$;

б) $I = \oint\limits_K xy dl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = -4x + 4$;

в) $I = \int\limits_K dl$, K: $y = (2x+1)^{3/2}$ $(0 \le x \le 4)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I = \oint\limits_{K_+} (xy - 2x)dx + (x^2 - 2y)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-2;0)$, $B(0;3)$, $C(0;-3)$;

б) $I = \oint\limits_{K_+} (x^2 y - 1)dx + (y - x^3)dy$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y = 1 - x^2$ і $y = -4x + 4$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I = \oint\limits_K z^2 dx - xdy - ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(2;2;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;2;4)$;

б) $I = \oint\limits_K (2x - 3z)dx + 2xdy - zdz$, K: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z = x. \end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_{\Sigma}(x-2z)dydz+(y-2x)dxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(2;2;0)$, $B(0;2;0)$, $C(2;2;4)$, $(\vec{n},Ox)$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2+y^2=9$, $x+y+z=2$ і $x+y+z=3$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Варіант 24

1. Обчислити криволінійні інтеграли:

а) $I=\oint\limits_{K}\frac{dl}{y+12}$, K – контур трикутника ABC: $A(-1;1)$, $B(0;0)$, $C(1;1)$;

б) $I=\oint\limits_{K}xydl$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-5x+5$;

в) $I=\int\limits_{K}dl$, K: $y=(1-2x)^{3/2}$ $(-3/2\le x\le 1/2)$.

2. Обчислити криволінійні інтеграли безпосередньо і за формулою Гріна:

а) $I=\oint\limits_{K_+}(5x-2y)dx+(6x-y)dy$, K – контур трикутника ABC: $A(-1;1)$, $B(0;0)$, $C(1;1)$;

б) $I=\oint\limits_{K_+}(5x-y^2)dx+(2xy-x)dy$, K – контур, утворений за допомогою кривих $y=1-x^2$ і $y=-5x+5$.

3. Обчислити криволінійні інтеграли по просторових кривих (орієнтації контурів вибрати самостійно):

а) $I=\oint\limits_{K}(2x+3y)dx-zdy-ydz$, K – контур трикутника ABC: $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$;

б) $I=\oint\limits_K y^2dx-xdy+zdz$, $K:\begin{cases}x^2+y^2=2,\\ z=2x.\end{cases}$

4. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $I=\iint\limits_\Sigma(-x+2z)dydz+(3z-x)dzdx+zdxdy$, K – площина трикутника ABC: $A(3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;1)$, $(\vec{n},Oz)$ – гострий кут;

б) $I=\oiint\limits_{\Sigma_+}(\vec{r},\vec{n})d\sigma$, Σ – замкнена поверхня, утворена за допомогою поверхонь $x^2+y^2=1$, $2x+y+z=4$ і $2x+y+z=-1$ (безпосередньо і за формулою Гаусса–Остроградського).

5. Інтеграли завдання 3 обчислити за формулою Стокса.

Індивідуальні завдання самостійної роботи № 2[1]

Варіант 1

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\frac{1}{r}$, $\vec{l}=\{-1;2;3\}$, $M_0(3;4;0)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}+\frac{\vec{r}}{r}+\operatorname{rot}\frac{\vec{r}}{x+y}\right)$;

б) $\operatorname{rot}(e^{-r}\vec{r}+x\operatorname{grad}r^3)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+z^2\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}+x\vec{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(x\vec{r}+y\operatorname{rot}(x\vec{r})\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

---

[1] В усіх варіантах $\vec{r}=\{x;y;z\}$, $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$$\vec{F}=\left\{\sqrt{y^2+z^2};\ \frac{xy}{\sqrt{y^2+z^2}}+2y;\ \frac{xz}{\sqrt{y^2+z^2}}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{2yz;\ 0;\ 2xy-x\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо

$$\vec{c}=\{-1;2;3\},\ \ \vec{a}=\frac{x+y}{r}\vec{r},\ \ \vec{b}=y\vec{r},\ \ u=\sqrt{x^2+y^2},\ \ \vec{F}=\frac{r^2}{x}\vec{r}.$$

Варіант 2

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\frac{1}{r^3}$, $\vec{l}=\{1;-2;3\}$, $M_0(-3;0;4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\frac{x^2}{r}\vec{r}+\operatorname{rot}(xy\vec{r})\right)$;

б) $\operatorname{rot}(e^{-r}y\vec{r}+x\operatorname{grad}e^r)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{1}{r^3}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}+y\vec{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(y\vec{r}+x\operatorname{rot}(y^2\vec{r})\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{y+2xe^{zx^2};\ x;\ e^{zx^2}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{3y^2z;\ 3z^2x;\ 3x^2y\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2 = 2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{1;-2;3\}$, $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{x}$, $\vec{b} = y^2\vec{r}$, $u = \dfrac{1}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{x}{y^2}\vec{r}$.

Варіант 3

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u = \dfrac{x}{r}$, $\vec{l} = \{-1;2;-3\}$, $M_0(3;0;-4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{y^2}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}(xz\vec{r})\right)$;

б) $\operatorname{rot}(e^r z\vec{r} + y\operatorname{grad}r)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r^3} + e^x\sin y\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r} + z\vec{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left((x+y)\vec{r} + z\operatorname{rot}(y\vec{r})\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad}u$):

$$\vec{F} = \left\{-\frac{1}{2}x^{-3/2}e^{y/z};\ x^{-1/2}ze^{y/z};\ -x^{-1/2}z^{-2}e^{y/z}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \left\{ze^{yz};\ 0;\ -\frac{1}{2}x^{-3/2} - xe^{xy}\right\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-1;2;3\}$, $\vec{a}=\dfrac{\vec{r}}{y}$, $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}}{r}$, $u=\dfrac{1}{r^3}$, $\vec{F}=\dfrac{y}{z^2}\vec{r}$.

Варіант 4

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{y}{r}$, $\vec{l}=\{3;-1;2\}$, $M_0(-3;0;4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{z}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}(x^2\vec{r})\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{x}+z\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x}{r^2}+\dfrac{1}{r^3}+z\ln(x^2+y^2)\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^2}+z^2\vec{r}+\operatorname{grad}\dfrac{z}{xy}\right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{x+y}+y\operatorname{rot}(z\vec{r})\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{r^2-x^2}{r^3};\ -\frac{xy}{r^3};\ -\frac{xz}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{0;\ 0;\ -y\sin xy-x\cos xy\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} u \cdot \vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} u \times \vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F} - \Delta \vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{2; -1; 3\}$, $\vec{a} = \dfrac{\vec{r}}{x^2}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{y^2}$, $u = \dfrac{1}{r^2}$, $\vec{F} = \dfrac{x}{y^2 r}\vec{r}$.

Варіант 5

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u = \dfrac{z}{r}$, $\vec{l} = \{-3; 1; 2\}$, $M_0(3; 0; -4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{z^2}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}(y^2\vec{r})\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(z\vec{r} + xyz \operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div} \operatorname{grad}\left(\dfrac{y}{r^3} + \dfrac{1}{r} + ze^{-x}\sin y\right)$;

г) $\operatorname{grad} \operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3} + y^2\vec{r} + \operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$; д) $\operatorname{rot} \operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{xr} + z \operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{z}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{-\frac{xy}{r^3}; \frac{r^2 - y^2}{r^3}; -\frac{yz}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$):

$$\vec{F} = \{y;\ z^2;\ x^2 + y^2\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad} |\vec{c} \times \vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2 \vec{r} - (\vec{c}, \vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} u \cdot \vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{grad} u \times \vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо

$$\vec{c} = \{3;-1;2\},\ \ \vec{a} = \frac{y}{z}\vec{r},\ \ \vec{b} = \frac{x}{z}\vec{r},\ \ u = \frac{1}{r^4},\ \ \vec{F} = \frac{y^2}{x}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Варіант 6

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u = \dfrac{x^2}{r}$, $\vec{l} = \{3;1;-2\}$, $M_0(3;0;-4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x^2}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}(z^2\vec{r})\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{z} + x\operatorname{grad}\dfrac{1}{r^2}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{y^2}{r} + \dfrac{1}{r} + e^z\cos x\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{y^3} + \operatorname{grad}(xyz)\right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{yr} + z^2\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{z}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad}u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{2x}{z^3\sqrt{y}};\ \frac{-x^2}{2\sqrt{y^3z^3}};\ \frac{-3x^2}{z^4\sqrt{y}}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{xze^{xy} - y^2e^{zy};\ x^2e^{xz} - zye^{xy};\ 0\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{3;1;-2\}$, $\vec{a}=x\dfrac{\vec{r}}{r}$, $\vec{b}=y\dfrac{\vec{r}}{r}$, $u=\dfrac{x}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{x\vec{r}}{z}$.

Варіант 7

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{y^2}{r}$, $\vec{l}=\{1;3;-2\}$, $M_0(-3;0;4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{y^2}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{y}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{z^2}+y\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{z^2}{r}+\dfrac{1}{r}+\operatorname{arctg}\dfrac{z}{x}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^2}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{grad}\dfrac{z}{xy}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{zr}+x\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{y}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{x^3+2x(y^2+z^2)}{r^3};\ \frac{-x^2y}{r^3};\ \frac{-x^2z}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{z^2-r^2-xy}{r^3};\ \frac{x^2-r^2-yz}{r^3};\ \frac{y^2-r^2-xz}{r^3}\right\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{3;1;-2\}$, $\vec{a}=\frac{z}{y}\vec{r}$, $\vec{b}=\frac{y}{z}\vec{r}$, $u=\frac{y}{r}$, $\vec{F}=\frac{x^2\vec{r}}{zr}$.

Варіант 8

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\frac{y^2}{r}$, $\vec{l}=\{3;-1;2\}$, $M_0(3;-4;0)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\frac{z}{r}\vec{r}+\frac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\frac{\vec{r}}{z}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{z^3}+y\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{x}{r}+\frac{r}{x}+\frac{1}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{x}+\frac{\vec{r}}{r^3}+r\operatorname{grad}r\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\frac{\vec{r}}{x}+z\operatorname{rot}\frac{\vec{r}}{r}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{-xy}{r^3};\ \frac{x^2+z^2}{r^3};\ \frac{-yz}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{xz-zy}{r^3};\ \frac{xz-yz}{r^3};\ \frac{y^2-x^2}{r^3}\right\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2=2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{3;-1;2\}$, $\vec{a}=\frac{y}{z}\vec{r}$, $\vec{b}=\frac{x}{z}\vec{r}$, $u=\frac{z}{r}$, $\vec{F}=\frac{xy\vec{r}}{r}$.

Варіант 9

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{z^2}{r}$, $\vec{l}=\{-3;1;-2\}$, $M_0(0;-3;4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{xy}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{x+y}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{x^3}+z\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{y}{r}+\dfrac{r}{x}+\dfrac{1}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{y}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\dfrac{1}{r}\operatorname{grad}r\right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{y}+r\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{x}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{z(y^2+z^2)}{r^3};\ -\frac{xyz}{r^3};\ \frac{x(y^2+z^2)}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{z;\ x;\ y\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-3;1;-2\}$, $\vec{a}=\dfrac{x}{z}\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{y}{z}\vec{r}$, $u=\dfrac{z}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{xz}{yr}\vec{r}$.

Варіант 10

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{z^2}{r}$, $\vec{l}=\{-2;1;3\}$, $M_0(-3;0;4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{z^2}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{z^3}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{xy}+\dfrac{1}{x}\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{xy}{r}+\dfrac{1}{r}+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\dfrac{\vec{r}}{r}+\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$; д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{x^2}+\dfrac{\vec{r}}{r^5}+\operatorname{grad}\dfrac{xy}{z}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{-xyz}{r^3};\ \frac{z(x^2+z^2)}{r^3};\ \frac{y(x^2+y^2)}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{-2z;\ 3x;\ 4y\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-2;1;3\}$, $\vec{a}=\dfrac{x}{y}\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{z}{y}\vec{r}$, $u=\dfrac{xy}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{xy}{r}\vec{r}$.

Варіант 11

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u = \dfrac{yz}{r}$, $\vec{l} = \{-1; -2; 1\}$, $M_0(-4; 0; 3)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{yz}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot} xy\vec{r}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{yz} + yz \operatorname{grad}\dfrac{x}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x}{r} + \dfrac{r}{y^2} + \dfrac{1}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{xy\vec{r}}{z} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + r \operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r} + r \operatorname{rot}\dfrac{z\vec{r}}{x}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{r}{y} + \frac{x^2}{yr};\ \frac{x}{r} - \frac{xr}{y^2};\ \frac{xz}{yr}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{z^2 + x^2;\ xy;\ -3xz\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{0; 2; -3\}$, $\vec{a} = \dfrac{xz}{y}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{r}$, $u = \dfrac{z^2}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{x\vec{r}}{r}$.

Варіант 12

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{xyz}{r}$, $\vec{l}=\{4;-1;3\}$, $M_0(-3;0;-4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{xy}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{xz}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{\sin r}+\dfrac{1}{y}\operatorname{grad}\dfrac{y}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{xz}{r}+\dfrac{1}{r}+r^2\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\dfrac{\vec{r}}{r}+\dfrac{xy}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{x\vec{r}}{r^3}+\dfrac{\vec{r}}{\cos r}+\operatorname{grad}\dfrac{x+y}{r}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{z}{r}-\frac{zr}{x^2};\ \frac{zy}{xr};\ \frac{r}{x}+\frac{z^2}{xr}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{2yz+x^2;\ x^2y;\ -2xz-x^2z\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-3;4;1\}$, $\vec{a}=r\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}}{xr}$, $u=\dfrac{x^2}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{y\vec{r}}{r}$.

Варіант 13

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{r}{xy}$, $\vec{l}=\{-2;1;2\}$, $M_0(0;3;4)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{r}{x}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{r\vec{r}}{x}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{xy}+\dfrac{1}{r}\operatorname{grad} r\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{r}{x}+\dfrac{1}{r^3}+r^4\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{xy}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\dfrac{1}{r}\operatorname{grad} r\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^5}+\dfrac{1}{r}\operatorname{rot}\dfrac{y\vec{r}}{z}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{r}{z}+\frac{x^2}{zy};\ \frac{xy}{zr};\ \frac{x}{r}-\frac{xr}{z^2}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{2xyz+y^2;\ 2xyz-zy^2;\ -xz^2\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-1;1;4\}$, $\vec{a}=\dfrac{z}{r}\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}}{r^3}$, $u=\dfrac{z}{r^3}$, $\vec{F}=\dfrac{z\vec{r}}{r^3}$.

Варіант 14

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{x}{r^3}$, $\vec{l}=\{-4;2;3\}$, $M_0(1;4;8)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x\vec{r}}{r^3}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{x\vec{r}}{r^3}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{x\vec{r}}{r^3}+z\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x}{r^3}+\dfrac{1}{r}+r\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^5}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\dfrac{1}{r}\operatorname{grad}r\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{x\vec{r}}{r^3}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{grad}\dfrac{x}{r^3}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{y}{r}-\frac{x^2y}{r^3};\ \frac{x}{r}-\frac{y^2x}{r^3};\ -\frac{xyz}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{-zx^2-1;\ 2x^3yz+2xyz;\ 1-x^3z^2\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-5;3;1\}$, $\vec{a}=\dfrac{1}{xz}\vec{r}$, $\vec{b}=r\vec{r}$, $u=\dfrac{x}{r^3}$, $\vec{F}=\dfrac{xy\vec{r}}{r^3}$.

Варіант 15

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{y}{r^3}$, $\vec{l}=\{2;-4;3\}$, $M_0(-1;4;8)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{y\vec{r}}{r^3}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{y\vec{r}}{r^3}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{y\vec{r}}{r^3}+r\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{y}{r^3}+\ln r+r^2\right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\dfrac{y\vec{r}}{r^3}+\dfrac{1}{x}\operatorname{grad} r\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{y\vec{r}}{r^3}+e^{-r}\vec{r}+\operatorname{grad}\dfrac{xy}{z}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{z}{r}-\frac{x^2z}{r^3};\ -\frac{xyz}{r^3};\ \frac{x}{r}-\frac{xz^2}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{y-2z;\ x+z;\ x^2-2y\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-2;1;3\}$, $\vec{a}=\dfrac{x}{r^3}\vec{r}$, $\vec{b}=xr\vec{r}$, $u=\dfrac{x}{r^3}$, $\vec{F}=\dfrac{xy\vec{r}}{r^3}$.

Варіант 16

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u = \dfrac{xy}{r^3}$, $\vec{l} = \{2;-4;3\}$, $M_0(1;-4;8)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{xy\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{xy\vec{r}}{r}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{xy\vec{r}}{r} + e^{-r}\vec{r} + \operatorname{grad}\dfrac{xy}{r}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{xy}{r^3} + \dfrac{1}{r} + r^2\right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(r\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{1}{r}\operatorname{grad} r^2\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{xy\vec{r}}{r} + \vec{r}\sin r + \operatorname{grad}\dfrac{xyz}{r}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{1}{rz} - \frac{x^2}{zr^3};\ -\frac{xy}{zr^3};\ -\frac{x}{z^2 r} - \frac{x}{zr^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{y^2 z^3 + y;\ x^3 z^2 + x;\ x^2 y^3 + y\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2 = 2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad} u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-2;3;4\}$, $\vec{a} = \dfrac{xy}{r}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{y}{r}\vec{r}$, $u = \dfrac{xy}{r^3}$, $\vec{F} = \dfrac{xz}{r^3}\vec{r}$.

Варіант 17

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{z}{r^3}$, $\vec{l}=\{-3;2;4\}$, $M_0(1;4;-8)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{z\vec{r}}{r^3}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{xz\vec{r}}{r^3}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\vec{r}\ln r+\operatorname{grad}\dfrac{xz}{r^3}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{z}{r^3}+\dfrac{1}{r}+r^4\right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(r^3\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\dfrac{1}{x}\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{z\vec{r}}{r^3}+\vec{r}e^{2r}+\operatorname{grad}\dfrac{\sin r}{r}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{yz}{r}-\frac{x^2yz}{r^3};\ \frac{xz}{r}-\frac{xy^2z}{r^3};\ \frac{xy}{r}-\frac{xyz^2}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{3x^2y^2z-2x^3yz;\ 3xy^2z^2-2xy^3z;\ 3x^2yz^2-2xyz^3\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{4;-3;5\}$, $\vec{a}=\dfrac{z}{r^3}\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}}{r}$, $u=\dfrac{z}{r^3}$, $\vec{F}=\dfrac{z}{r^3}\vec{r}$.

Варіант 18

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{xz}{r^3}$, $\vec{l}=\{2;0;-3\}$, $M_0(-1;4;-8)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{xz\vec{r}}{r^3}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{xz\vec{r}}{r^3}\right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^5}+\vec{r}xr+\operatorname{grad}\dfrac{xz}{r^3}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{xz}{r^3}+\dfrac{1}{r}+\ln r\right)$; г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(r\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\dfrac{1}{y}\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{xz\vec{r}}{r}+r^3\vec{r}+\operatorname{grad}(x^2yz^3)\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{2xyr+\frac{x^3y}{r};\ x^2r+\frac{x^2y^2}{r};\ \frac{x^2yz}{r}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{xz^3-x^3y^2;\ x^2y^3-yz^3;\ x^2+y^2\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-2;4;1\}$, $\vec{a}=\dfrac{xz}{r}\vec{r}$, $\vec{b}=xr\vec{r}$, $u=\dfrac{xz}{r^3}$, $\vec{F}=\dfrac{xz}{r^3}\vec{r}$.

Варіант 19

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u = \dfrac{x^2}{r}$, $\vec{l} = \{-3; 1; 2\}$, $M_0(-1; 4; -8)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x^2\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{x^2\vec{r}}{r^3} \right)$; б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{\sin r} + yr\vec{r} + \operatorname{grad}\dfrac{x^2}{r} \right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x^2}{r} + \dfrac{1}{r} + \operatorname{div}(r^2\vec{r}) \right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(r^2\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{1}{z}\operatorname{grad} r \right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{x^2\vec{r}}{r} + \vec{r}\ln r + \operatorname{grad}(xy^2z^3) \right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{ \frac{yz}{r^2} - \frac{2x^2yz}{r^4};\ \frac{xz}{r^2} - \frac{2xy^2z}{r^4};\ \frac{xy}{r^2} - \frac{2xyz^2}{r^4} \right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{xz^2 - yx^2;\ xy^2 - yz^2;\ y^3\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-4; -2; 1\}$, $\vec{a} = \dfrac{x^2}{r}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{y}{r}\vec{r}$, $u = \dfrac{x^2}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{x^2}{r}\vec{r}$.

Варіант 20

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{x^3}{r}$, $\vec{l}=\{-1;4;-3\}$, $M_0(8;4;1)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x^3\vec{r}}{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{x^2y\vec{r}}{r}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r^7}+\dfrac{x^3}{r}\vec{r}+\operatorname{grad}(xye^z)\right)$; в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x^3}{r}+\dfrac{1}{r}+\ln r\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{x^3}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{x^3\vec{r}}{r}+r\vec{r}+\operatorname{grad}(xy^2z^3)\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{yz}{r}-\frac{x^2yz}{r^3};\ \frac{xz}{r}-\frac{xy^2z}{r^3};\ \frac{xy}{r}-\frac{xyz^2}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\{x^3z-3xyz^2;\ xy^3-3x^2yz;\ yz^3-3xy^2z\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-2;3;5\}$, $\vec{a}=\dfrac{x^3}{r}\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{y}{r}\vec{r}$, $u=\dfrac{x^3}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{x^3}{r}\vec{r}$.

Варіант 21

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u = \dfrac{y^3}{r}$, $\vec{l} = \{-4; 2; 3\}$, $M_0(-8; 4; -1)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{y^3\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{y^3\vec{r}}{r} \right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(e^{-2r}\vec{r} + \vec{r}\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r} + \operatorname{grad}(x^5yz) \right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{y^3}{r} + \dfrac{1}{r} + \ln(x^2 + y^2) \right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{y^3}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{grad}\dfrac{1}{r} \right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{y^3\vec{r}}{r} + \dfrac{1}{r^2}\vec{r} + \operatorname{grad}\dfrac{xyz}{r^2} \right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{ \frac{2xyz}{r} - \frac{x^3yz}{r^3};\ \frac{x^2z}{r} - \frac{x^2y^2z}{r^3};\ \frac{x^2y}{r} - \frac{x^2yz^2}{r^3} \right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \left\{ \frac{z}{x} - \frac{x}{y};\ \frac{yz}{x^2} - \frac{xy}{z^2};\ \frac{z}{y} - \frac{x}{z} \right\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c} = \{-3;4;5\}$, $\vec{a} = \dfrac{y^3}{r}\vec{r}$, $\vec{b} = \dfrac{\vec{r}}{y}$, $u = \dfrac{y^3}{r}$, $\vec{F} = \dfrac{z^3}{r}\vec{r}$.

Варіант 22

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u = \dfrac{z^3}{r}$, $\vec{l} = \{2;-1;4\}$, $M_0(8;-4;1)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{z^3\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \operatorname{rot}\dfrac{z^3\vec{r}}{r}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{\sqrt{r}} + z^3\vec{r} + \operatorname{grad}\dfrac{x^3y}{z}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{z^3}{r} + \dfrac{1}{r} + \operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{y^3}{r}\vec{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^5} + \operatorname{grad} r\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{z^3\vec{r}}{r} + \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{x}{r}\vec{r}\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{grad} u$):

$$\vec{F} = \left\{\frac{2xy^2}{r} - \frac{x^3y^2}{r^3};\ \frac{2x^2y}{r} - \frac{x^2y^3}{r^3};\ -\frac{x^2y^2z}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F} = \operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F} = \{3xy^2z^2 - x^3y^2;\ 3x^2yz^2 - y^3z^2;\ 3x^2y^2z - x^2z^3\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}|^2 = 2\left(|\vec{c}|^2\,\vec{r} - (\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F}) = u\operatorname{rot}\vec{F} + \operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F} - \Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-5;\,3;\,1\}$, $\vec{a}=\dfrac{z^3}{r}\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}}{x}$, $u=\dfrac{z^3}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{z^3}{r}\vec{r}$.

Варіант 23

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{x^2y}{r}$, $\vec{l}=\{-3;\,2;\,-1\}$, $M_0(4;-8;1)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{x^2y\vec{r}}{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}(z\vec{r})\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(z\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{grad}\dfrac{xz^3}{y}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{x^2y}{r}+\dfrac{1}{r}+\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{xy}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^2}+\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{x\vec{r}}{r}+\dfrac{\vec{r}}{r^5}+\operatorname{grad}r\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{2xz^2}{r}-\frac{x^3z^2}{r^3};\ \frac{-x^2yz^2}{r^3};\ \frac{2x^2z}{r}-\frac{x^2z^3}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{x}{z}-\frac{y}{x};\ \frac{x}{y}-\frac{y}{z};\ \frac{xz}{y^2}-\frac{yz}{x^2}\right\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{-5;\,6;\,3\}$, $\vec{a}=\dfrac{x^2y}{r}\vec{r}$, $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}}{y}$, $u=\dfrac{x^2y}{r}$, $\vec{F}=\dfrac{\vec{r}}{xy}$.

Варіант 24

1. Знайти похідну за напрямом $\vec{l}$ і градієнт скалярного поля u в точці M_0, якщо $u=\dfrac{1}{xr}$, $\vec{l}=\{-3;-1;2\}$, $M_0(8;4;-1)$.

2. Знайти:

а) $\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{xr}+\dfrac{\vec{r}}{r^3}+\operatorname{rot}\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$;

б) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{\cos r}+y^3\vec{r}+\operatorname{grad}\dfrac{1}{xr}\right)$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\dfrac{1}{xr}+\dfrac{1}{r}+\operatorname{div}\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$;

г) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\left(\dfrac{z^3}{r}\vec{r}+\dfrac{\vec{r}}{r}+\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}\right)$;

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left(\dfrac{y\vec{r}}{xr}+\vec{r}e^{-2r}+\operatorname{grad}r\right)$.

3. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ потенціальним. У випадку ствердної відповіді знайти скалярний потенціал u поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{grad}u$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{2}{r}-\frac{x^2}{r^3}-\frac{r}{x^2};\ \frac{y}{xr}-\frac{xy}{r^3};\ \frac{z}{xr}-\frac{xz}{r^3}\right\}.$$

4. Перевірити, чи є поле $\vec{F}$ соленоїдним. У випадку ствердної відповіді знайти векторний потенціал $\vec{A}$ поля $\vec{F}$ ($\vec{F}=\operatorname{rot}\vec{A}$):

$$\vec{F}=\left\{\frac{x}{z}-\frac{x}{y};\ \frac{y}{x}-\frac{y}{z};\ \frac{z}{y}-\frac{z}{x}\right\}.$$

5. Перевірити виконання рівностей:

а) $\operatorname{grad}|\vec{c}\times\vec{r}\,|^2=2\left(|\vec{c}\,|^2\,\vec{r}-(\vec{c},\vec{r})\vec{c}\right)$;

б) $\operatorname{div}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$;

в) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\cdot\vec{F}$;

г) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\operatorname{grad}u\times\vec{F}$;

д) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{F}-\Delta\vec{F}$,

якщо $\vec{c}=\{2;-3;6\}$, $\vec{a}=\dfrac{\vec{r}}{xr}$, $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}}{r}$, $u=\dfrac{1}{xr}$, $\vec{F}=\dfrac{\vec{r}}{xr}$.

Додаткові завдання

Знайти гармонічну функцію u ($\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = 0$) для випадків:

а) $u = u(x)$ в ПДСК,

б) $u = u(r)$ в ССК ($r = |\vec{r}\,|$),

в) $u = u(r)$ в ЦСК або ПСК ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$),

г) $u = u(\varphi)$ в ССК,

ґ) $u = u(\theta)$ в ССК,

якщо:

1) $a = 1,\ b = 2,\ \alpha = 3,\ \beta = 4$;
2) $a = 2,\ b = 3,\ \alpha = 4,\ \beta = 5$;
3) $a = 3,\ b = 4,\ \alpha = 5,\ \beta = 6$;
4) $a = 2,\ b = 1,\ \alpha = 4,\ \beta = 3$;
5) $a = 3,\ b = 2,\ \alpha = 5,\ \beta = 4$;
6) $a = 4,\ b = 3,\ \alpha = 6,\ \beta = 5$;
7) $a = 4,\ b = 5,\ \alpha = 5,\ \beta = 6$;
8) $a = 4,\ b = 5,\ \alpha = 5,\ \beta = 6$;
9) $a = 6,\ b = 7,\ \alpha = 6,\ \beta = 7$;
10) $a = 6,\ b = 5,\ \alpha = 5,\ \beta = 4$;
11) $a = 7,\ b = 6,\ \alpha = 8,\ \beta = 9$;
12) $a = 7,\ b = 8,\ \alpha = 6,\ \beta = 5$;
13) $a = 8,\ b = 7,\ \alpha = 5,\ \beta = 6$;
14) $a = 9,\ b = 10,\ \alpha = 5,\ \beta = 6$;
15) $a = 9,\ b = 10,\ \alpha = 6,\ \beta = 5$;
16) $a = 9,\ b = 10,\ \alpha = 7,\ \beta = 6$;
17) $a = 10,\ b = 9,\ \alpha = 8,\ \beta = 7$;
18) $a = 10,\ b = 9,\ \alpha = 1,\ \beta = 2$;
19) $a = 11,\ b = 12,\ \alpha = 2,\ \beta = 6$;
20) $a = 12,\ b = 11,\ \alpha = 4,\ \beta = 7$;
21) $a = 12,\ b = 10,\ \alpha = 5,\ \beta = 6$;
22) $a = 8,\ b = 4,\ \alpha = 3,\ \beta = 6$;
23) $a = 10,\ b = 4,\ \alpha = 8,\ \beta = 6$;
24) $a = 4,\ b = 6,\ \alpha = 3,\ \beta = 5$.