КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

С.В. ЄФІМЕНКО
О.В. СУГАКОВА
О.С. УСОЛЬЦЕВА

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Єфименко С.В., Сугакова О.В., Усольцева О.С. Індивідуальні завдання з математичного аналізу для самостійної роботи: Методичний посібник для студентів кафедри «Радіотехніка» радіофізичного факультету.

Посібник можна використовувати як задачник при вивченні курсу „Вища математика” студентами II курсу кафедри «Радіотехніка» радіофізичного факультету. Він містить задачі з математичного аналізу для самостійного розв’язування. На початку розділів наведені теоретичні відомості, необхідні для виконання завдань. Останній розділ містить основні відомості з курсу елементарної математики.

УДК 517.2

1.Комплексні числа

Комплексне число – це впорядкована пара дійсних чисел $z=(x,y)$ або вираз вигляду $z=x+i\cdot y$, де $i=\sqrt{-1}$ - уявна одиниця. x називають дійсною частиною комплексного числа і позначають $x=\operatorname{Re} z$ (realis - дійсний), у називають уявною частиною: $y=\operatorname{Im} z$ (imaginarius - уявний).

Алгебраїчна форма комплексного числа: $z=x+i\cdot y$.

Тригонометрична форма комплексного числа: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, де $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ - модуль комплексного числа; $\varphi=Arg\,z$ - його аргумент – визначений з точністю до довільного доданку, кратного 2π. Значення φ, яке задовольняє умові $-\pi<\varphi\leq\pi$, називається головним значенням аргументу і позначається символом $\arg z$.

$$\arg z=\varphi=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & при \quad x>0; \\ arctg\dfrac{y}{x}+\pi\operatorname{sgn} y & при \quad x<0; \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y & при \quad x=0. \end{cases}$$

Показникова форма комплексного числа: $z=re^{i\varphi}$.

Операції над комплексними числами

Нехай

$$z_1=x_1+iy_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1);\quad z_2=x_2+iy_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Додавання.

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Різниця.

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Добуток.

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)=$$

$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))=r_1r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Частка.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Піднесення до степеню. Формула Муавра.

$$\left(r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) = r^n\, e^{in\varphi}.$$

Здобуття кореня.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}};$$

$$k = 0,1,\ldots,n-1; \quad n \in N.$$

Формула Ейлера. Показникова функція.

$$e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right).$$

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}; \quad \left(e^{z_1}\right)^{z_2} = e^{z_1\cdot z_2}; \quad e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

Завдання 1.

№ 1.1-1.7: виконати дії:

1. 1. $(2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7$. 1.2. $(1+i)^3$. 1.3. $\frac{1}{i}$.

1.4. $\frac{1-i}{1+i}$. 1.5. $\frac{2}{1-3i}$. 1.6. $\frac{2+4i}{-3+5i}$.

1.7. $\frac{1}{(3+2i)^2} + \frac{1}{(3-2i)^2}$.

№ 1.8-1.14: представити наступні комплексні числа у тригонометричній і показниковій формах.

1.8. -3. 1.9. $-i$. 1.10. $1+i$. 1.11. $-1+i\sqrt{3}$.

1.12. $2-5i$. 1.13. $-2+2\sqrt{3i}$.

1.14. $-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$.

1.15. Обчислити $z_1 z_2$ та $\frac{z_1}{z_2}$, якщо

$$z_1 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right); \quad z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

№ 1.16-1.1.18: обчислити, застосовуючи формулу Муавра.

1.16. $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{30}$. 1.17. $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^{20}$. 1.18. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}$.

№ 1.19-1.22: знайти всі значення коренів:

1.19. $\sqrt[3]{1}$. 1.20. $\sqrt[3]{i}$. 1.21. $\sqrt[4]{1}$. 1.22. $\sqrt[4]{-1}$.

№ 1.23-1.24: знайти корені рівнянь.

1.23. $z^2 + z + 6 = 0$. 1.24. $z^2 + 4z + 13 = 0$.

№ 1.25-1.29: зобразити на комплексній площині множину точок.

1.25. $|z-a|=R$; $a-$ фіксована точка комплексної площини; R - додатне дійсне число.

1.26. $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z<1$. 1.27. $1<|z+i|<2$.

1.28. $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}$. 1.29. $0<\operatorname{Re}(iz)<1$.

2.Границі

Властивості границь

Припускаємо, що усі розглядувані границі існують і скінченні.

1. $\ell im(u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x))=$
$=\ell imu_1(x)+\ell imu_2(x)+\cdots+\ell imu_n(x).$

2. $\ell im(u_1(x)\cdot u_2(x)\times\cdots\times u_n(x))=$
$=\ell imu_1(x)\cdot\ell imu_2(x)\times\cdots\times\ell imu_n(x).$

3. $\ell im\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\ell imu(x)}{\ell imv(x)}$, якщо $\ell imv(x)\neq 0$.

4. (Теорема про двох міліціонерів.) Якщо значення трьох функцій $u=u(x), z=z(x), v=v(x)$ пов'язані нерівностями $u\le z\le v$, при цьому $u(x)$ і $v(x)$ при $x\to a$ (або $x\to\infty$) прямують до однієї границі b, то і $z=z(x)$ при $x\to a$ ($x\to\infty$) також прямує до границі b.

5. Якщо для функцій $u=u(x), v=v(x)$ виконується нерівність $u\le v$, при цьому $u(x)$ і $v(x)$ при $x\to a$ (або $x\to\infty$) мають границю, то має місце $\ell imu(x)\le\ell imv(x).$

Символічне правило обчислення границь. У математичному аналізі означеними виразами вважаються такі вирази(тут k - деяка стала; n-натуральне число):

1) $\infty+\infty=\infty$; 2) $k\cdot\infty=\infty$;

3) $\frac{k}{\infty}=0$; 4) $\frac{\infty}{k}=\infty$;

5) $\frac{k}{0}=\begin{cases}+\infty, \textit{якщо } k>0;\\ -\infty, \textit{якщо } k<0.\end{cases}$ 6) $\infty^n=\infty$;

7) $(-\infty)^n=\begin{cases}+\infty, \textit{якщо } n-\textit{парне};\\ -\infty, \textit{якщо } n-\textit{непарне}.\end{cases}$ 8) $\sqrt[n]{\infty}=\infty$.

В цих рівностях вважається, що зліва стоїть деякий вираз під знаком границі. Наприклад, рівність (3) $\frac{k}{\infty}=0$ означає, що маємо границю вигляду

$\ell im\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)\to k$ при $x\to a$, а $g(x)\to\infty$ при $x\to a$ (a може дорівнювати $\pm\infty$). Правило твердить, що в цьому випадку $\ell im\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Визначні границі

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

О-символіка

Нехай $\varphi(x),\psi(x)$- деякі функції, задані в околі точки x_0. Нехай $\psi(x)\neq 0$ в деякому околі U_{x_0} точки $x_0\,(x\neq x_0)$.

Запис $\varphi(x)=O(\psi(x))$ при $x\to x_0$ означає, що існує константа $C>0$, така, що $|\varphi(x)|\le C|\psi(x)|$ при всіх значеннях x в певному околі точці x_0.

Запис $\varphi(x)=o(\psi(x))$ при $x\to x_0$ означає, що $\lim\limits_{x\to x_0}\ \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$.

Функції називаються еквівалентними ($\varphi(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\psi(x)$) при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\ \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$.

Можна навести такі приклади нескінченно малих еквівалентних функцій при $x\to 0$:

$$\sin x\sim x; \qquad 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}; \qquad tgx\sim x; \qquad \arcsin x\sim x;$$

$$arctgx\sim x; \qquad \ln(1+x)\sim x; \qquad \log_a(1+x)\sim x\log_a e;$$

$$e^x-1\sim x; \qquad a^x-1\sim x\ln a; \qquad (1+x)^a-1\sim ax.$$

Завдання 2. Обчислити границі числових послідовностей.

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{5n^3+7n^2-8}{4n^3+11n-10}$.

2.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\ \dfrac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$.

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-4}\right)\cdot n\sqrt{n}$.

2.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+6}-n\right)$.

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty}\ n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}\right)$.

2.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-6}\ \ -n\sqrt{n(n^2+4)}}{\sqrt{n}}$.

2.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{3-n^3}\right)$.

2.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)}-\sqrt{n^2-3n+2}\right)$.

2.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+4)(n-1)}-\sqrt{(n+7)(n-4)}\right)$.

2.10. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n^4-4)}-\sqrt{n^5+1}\right)$. 2.11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{2+27n^3}-3n\right)$.

2.12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt[3]{n^3-1}\right)$. 2.13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(1+2+3+\cdots+n\right)$.

2.14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$. 2.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$.

2.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$. 2.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-10n}{7-10n}\right)^{3n-2}$.

2.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-8}{n+3}\right)^{1-2n}$. 2.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-n+2}{n^2-n+1}\right)^{10n^2}$.

Завдання 3. Обчислити границі заданих функцій.

3.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+x}{x^4+2x^2+1}$. **3.2.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$. **3.4.** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^5+2}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[5]{x^4+2}-\sqrt{x^3+1}}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$. **3.6.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

3.7. $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$. **3.8.** $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$. **3.10.** $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$. **3.12.** $\lim\limits_{x\to5} \dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$. **3.14.** $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. **3.16.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos8x}{x\cdot tg5x}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{tg^2 9x}{1-\sqrt{\cos4x}}$. **3.18.** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos5x-\cos10x}{x\sin2x}$.

Завдання 4. Обчислити границі заданих функцій.

4.1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{e^{3x}-1}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2\sin x)}{\sin 3x}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{e^{x^2}-1}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{\ln(1+2x)}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1-\ln(e-x)}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\pi\left(1+x/3\right)\right)}{e^{6x}-1}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin 3x}}{\operatorname{tg} 2x}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x}}{x^3}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3x}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{x}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+2)\left(\ln(2x-3)-\ln(2x+1)\right)$.

4.14. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+8)\left(\ln(3-2x)-\ln(6-2x)\right)$.

4.15. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 4} (9-2x)^{\frac{1}{x-4}}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 0} (1+4x)^{\frac{7}{x}}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to 1} (5x-4)^{\frac{2}{x-1}}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 7} (8-x)^{\frac{x}{x-7}}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right)^{1/(\sqrt{x}-2)}$.

3.Похідні та їх застосування

Таблиця похідних основних елементарних функцій

(Вважаємо u, v деякими диференційовними функціями аргументу x.)

1.	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.
2.	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.
3.	$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a; \quad (a>0, a\neq 1)$.
4.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$.
5.	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{\ln a \cdot u} \cdot u'$.

6.	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$.
7.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
8.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
9.	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
10.	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.
11.	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
12.	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
13.	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
14.	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
15.	$\left(u^{v(x)}\right)' = u^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{u'v(x)}{u}\right)$; $u > 0$.

Завдання 5. Продиференціювати задані функції. У пунктах а), б), в), г), д) знайти похідні $y' = \frac{dy}{dx}$; у пунктах е), є) знайти $y' = \frac{dy}{dx}$ і $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

5.1.а) $y = \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$;

б) $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1 + 2\sin x}}$;

в) $y = \ln\left(e^{2x} + 1\right) - 2arctg\left(e^x\right)$;

г) $y = x^{\sin x}$;

д) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$;

е) $y = e^{x^2}$;

є) $\begin{cases} x = 2t^2; \\ y = 3t^3. \end{cases}$

5.2. а) $y = (2 + x)\sqrt{3 - x}$;

б) $y = \ln(\arcsin 5x)$;

д) $xy = arctg\frac{x}{y}$;

е) $y = (\arcsin x)^2$;

в) $y = \dfrac{x}{\sin\left(x^2+3\right)}$;

г) $y = \left(\cos x\right)^{\sqrt{x}}$;

5.3. а) $y = \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$;

б) $y = 3^{ctg\frac{1}{x}}$;

в) $y = \arcsin\left(\ln x\right)$;

г) $y = x^{x^2}$;

5.4. а) $y = \sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$;

б) $y = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;

в) $y = \sqrt{\ln x+1} + \ln\left(\sqrt{x}+1\right)$;

г) $y = \left(\arccos x\right)^{x^3}$;

5.5. а) $y = \dfrac{1}{8}\dfrac{x^8}{\left(1-x^2\right)^4}$;

б) $y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x}$;

в) $y = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$;

г) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

5.6. а) $y = x\sqrt{x^2-1}$;

б) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

в) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$;

г) $y = x^{\sqrt{x}}$;

д) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 5$;

е) $y = \left(1+x^2\right)arctgx$;

є) $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = t - \cos t. \end{cases}$

д) $3^x + 3^y = \sin y$;

е) $y = \sqrt{1+x^2}$;

є) $\begin{cases} x = t - \cos^2 t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

д) $x = y + arctgy$;

е) $y = tgx$;

є) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

д) $x^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$;

е) $y = x^3 e^x$;

є) $\begin{cases} x = t^3; \\ y = \ln t^2. \end{cases}$

5.7. а) $y = \left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$;

б) $y = \sin x \cdot \cos^3 x^2$;

в) $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$;

г) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$;

д) $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$;

е) $y = e^{-x^2}$;

є) $\begin{cases} x = t\cos t; \\ y = t\sin t. \end{cases}$

5.8. а) $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$;

б) $y = arctg\dfrac{1+x}{1-x}$;

в) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

г) $y = x^{\ln x}$;

д) $x\sin y + y\sin x = 9$;

е) $y = ctgx$;

є) $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

5.9. а) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

б) $y = arctg\sqrt{4x^4 - 1}$;

в) $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)$;

г) $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

д) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$;

е) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$;

є) $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right); \\ y = t^2. \end{cases}$

5.10. а) $y = \left(1 - 2\sqrt{x}\right)^4$;

б) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;

в) $y = \ln^5(1+\cos x)$;

г) $y = \left(x^2+4\right)^x$;

д) $3^x + 3^y = \cos y$;

е) $y = \arccos 2x$;

є) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{1+t^4}; \\ y = \dfrac{1-t^3}{1+t^4}. \end{cases}$

5.11. а) $y = \sqrt[3]{7+5x^3}$;

д) $y = 5x + arctgy$;

б) $y = \arcsin\frac{2}{x}$;

в) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;

г) $y = (\sin 3x)^x$;

5.12. а) $y = \frac{x^3}{3\sqrt{1-x^4}}$;

б) $y = \arcsin\frac{x^2-1}{x^2}$;

в) $y = \ln\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x}$;

г) $y = x^{\sin^2 x}$;

5.13. а) $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$;

б) $y = \sqrt{arctgx} - \arcsin 2x$;

в) $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}$;

г) $y = (2x+1)^{\frac{3}{x}}$;

5.14. а) $y = \sqrt[5]{\frac{x+2}{x-2}}$;

б) $y = \sin^2(x^3)$;

в) $y = \sqrt[3]{\ln^2 x + 5}$;

г) $y = (x^2+4)^{\sin x}$;

5.15.а) $y = \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{4x^4}$;

б) $y = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

е) $y = -\frac{5}{x+3}$;

є) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \frac{1}{1-t}. \end{cases}$

д) $\sin(xy) + \cos y = 0$;

е) $y = \sqrt{4-x^2}$;

є) $\begin{cases} x = arctgt; \\ y = \frac{t^2}{2}. \end{cases}$

д) $y^2 = x\sin y$;

е) $y = \sqrt{tg3x}$;

є) $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

д) $x\ln y + \frac{y^2}{x} = 3$;

е) $y = e^{\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x = 5t^4 + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$

д) $y\sin y - \cos(x-y) = 0$;

е) $y = xe^{x^2}$;

в) $y=\frac{1}{2}\ln tgx+\ln\cos x$;

г) $y=\left(\frac{x}{x+5}\right)^{x}$;

є) $\begin{cases}x=\cos^3 t;\\ y=\sin^3 t.\end{cases}$

5.16. а) $y=\frac{1}{x-\sqrt{4+x^2}}$;

б) $y=arctg^2\frac{1}{x}$;

в) $y=\ln^7(\sin 2x)$;

г) $y=(\cos x)^{\sin x}$;

д) $x+\sqrt{xy}+y=5$;

е) $y=\frac{1}{1+x^3}$;

є) $\begin{cases}x=a(t-\sin t);\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$

5.17. а) $y=\frac{5}{(x^2-x+1)^4}$;

б) $y=\sin^3(\cos 4x)$;

в) $y=\frac{1}{\ln^5 x}$;

г) $y=x^{\sin(x+5)}$;

д) $x^2-2xy+y^3=1$;

е) $y=\frac{1}{7+\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases}x=arctgt;\\ y=\ln(1+t^2).\end{cases}$

5.18.а) $y=\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$;

б) $y=\frac{\arcsin x}{\arccos x}$;

в) $y=\frac{1}{3}\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$;

г) $y=(x^2+3)^{5x}$;

д) $x^2+3xy+y^3+1=0$;

е) $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

є) $\begin{cases}x=\ln t;\\ y=t^3.\end{cases}$

5.19. а) $y=\frac{3}{x^2(x-2)}$;

б) $y=x\ln\left(2x+\frac{1}{2}\right)$;

д) $y^3-3y+10x=0$;

е) $y=\log_7 x$;

в) $y = \left(\arcsin x + 2x^2\right)^7$;

є) $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$

г) $y = \left(x^2 + 7\right)^{\sin x}$;

5.20. а) $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}$;

д) $y = \cos(x + y)$;

б) $y = \dfrac{\cos x}{\ln \sin x}$;

е) $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;

в) $y = e^{-x^2} \cdot \ln x$;

є) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

г) $y = (\cos x)^{\ln x}$;

Завдання 6. Дослідити задані функції за допомогою похідних першого порядку і побудувати ескізи графіків.

6.1. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

6.2. $y = 2 - 3x^3 + x^4$.

6.3. $y = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 1$.

6.4. $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \dfrac{7}{4}$.

6.5. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$.

6.6. $y = -\dfrac{1}{16}(x-2)^2(x-6)^2$.

6.7. $y = \dfrac{27}{4}\left(x^3 + x^2\right) - 5$.

6.8. $y = x^3(x+2)^2 + 1$.

6.9. $y = \dfrac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x$.

6.10. $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

6.11. $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$.

6. 12. $y = 4x^3 + 15x^2 + 12x + 1$.

6.13. $y = 3 - 6x + 15x^2 - 8x^3$.

6.14. $y = 16x^3 - 12x^2 + 3$.

6.15. $y = -\dfrac{x^3}{5} + \dfrac{6}{5}x^2 + 3x - 12$.

6.16. $y = x(1-x)^3$.

6.17. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

6.18. $y = 4x^3 + 9x^2 - 12x - 5$.

6.19. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 10$.

6.20. $y = \left(x^2 - 1\right)^3$.

Завдання 7. Провести повне дослідження і побудувати графіки функцій.

7.1. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

7.2. $y = \dfrac{3}{x^2 + 3x}$.

7.3. $y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

7.4. $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}$.

7.5. $y=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$. 7.6. $y=\dfrac{1}{16x^4-1}$.

7.7. $y=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$. 7.8. $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$.

7.9. $y=\dfrac{2x^2+1}{x^3-x}$. 7.10. $y=\dfrac{x^3-1}{x^2}$.

7.11. $y=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2$. 7.12. $y=\dfrac{x}{4+3x-x^2}$.

7.13. $y=\dfrac{3x-4}{x^3}$. 7.14. $y=\dfrac{x^3-1}{x^2-4}$.

7.15. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-4x}$. 7.16. $y=-\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$.

7.17. $y=-\dfrac{3x}{x^2-1}$. 7.18. $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-1}$.

7.19. $y=-\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^2$. 7.20. $y=\dfrac{x^3-8}{x^2}$.

4. Невизначені інтеграли

Таблиця основних невизначених інтегралів

1.	$\int 0dx=C$.
2.	$\int dx=x+C$.
3.	$\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad(\alpha\neq-1)$.
4.	$\int\dfrac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert dx+C;\quad(x\neq0)$.
5.	$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C;\quad(0<a\neq1)$.
6.	$\int e^x dx=e^x+C$.
7.	$\int\sin x dx=-\cos x+C$.
8.	$\int\cos x dx=\sin x+C$.
9.	$\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$.

10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C.$
12.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C; \quad (a \neq 0).$
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\| + C; \quad (a > 0).$
14.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C; \quad (a \neq 0).$
15.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C.$
16.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C.$
17.	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C.$
18.	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C; \quad (a > 0).$

Формула інтегрування частинами.

Якщо $u(x)$, $v(x)$ - неперервно-диференційовні функції на (a,b), і на (a,b) існує первісна для $v(x)u'(x)$, то на (a,b) існує первісна для $u(x)v'(x)$, а також справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Формула заміни змінних.

Нехай змінну x можна представити у вигляді $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - неперервно-диференційовна функція, що має обернену. Тоді $\int \mathrm{f}(x)dx = \int \mathrm{f}(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Завдання 8. Взяти невизначені інтеграли.

8. 1. $\int (2x+5)e^{-3x}dx.$ 8.2. $\int (6-x)\cos 2x dx.$

8.3. $\int \ln(9x^2+16)dx.$ 8.4. $\int (3x+4)\sin\frac{x}{2}dx.$

8.5. $\int (x+1)^2 \ln(x+1)dx.$ 8.6. $\int x\cos^2 3x dx.$

8.7. $\int arctg\sqrt{3x+7}dx.$ 8.8. $\int \frac{x}{\cos^2 2x}dx.$

8.9. $\int \frac{x\sin 3x}{\cos^3 3x}dx$.

8.10. $\int x^3 \ln x dx$.

8.11. $\int 3^x x dx$.

8.12. $\int \left(x^2 - 5x + 1\right)e^{-x}dx$.

8.13. $\int (2x+7)^2 e^{4x}dx$.

8.14. $\int \left(4 + x^2\right)\cos 7x dx$.

8.15. $\int (x-2)\ln^2(x-2)dx$.

8.16. $\int \left(x^2 + 6x - 22\right)\sin 6x dx$.

8.17. $\int \sqrt{x+3}\ln^2(x+3)dx$.

8.18. $\int (1-5x)^2 \sin\frac{x}{5}dx$.

8.19. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$.

8.20. $\int \frac{\ln^2(x+1)}{(x+1)^2}$.

Завдання 9. Знайти невизначені інтеграли від виразів, що містять квадратний тричлен.

9.1. а) $\int \frac{(3+4x)dx}{x^2+6x+10}$.

б) $\int \frac{(4x-3)dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx$.

9.2. а) $\int \frac{(2x+5)dx}{4x^2+4x+5}$.

б) $\int \frac{(5x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx$.

9.3. а) $\int \frac{(x+6)dx}{x^2+4x+5}$.

б) $\int \frac{(6-x)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}dx$.

9.4. а) $\int \frac{(2x+7)dx}{4x^2+8x+7}$.

б) $\int \frac{(7x-2)dx}{\sqrt{7-8x-4x^2}}dx$.

9.5. а) $\int \frac{(3x+7)dx}{4x^2+6x+1}$.

б) $\int \frac{(7x-3)dx}{\sqrt{4x^2-6x-1}}dx$.

9.6. а) $\int \frac{(3x+8)dx}{9x^2+6x+4}$.

б) $\int \frac{(8x-3)dx}{\sqrt{9x^2-6x-4}}dx$.

9.7. а) $\int \frac{(5x+3)dx}{16x^2+4x-3}$.

б) $\int \frac{(5-3x)dx}{\sqrt{16x^2-4x+3}}dx$.

9.8. а) $\int \frac{(2x+3)dx}{9x^2+3x+1}$.

б) $\int \frac{(3-2x)dx}{\sqrt{9x^2-3x-1}}dx$.

9.9. а) $\int \frac{(2x+9)dx}{x^2+8x+17}$.

б) $\int \frac{(9-2x)dx}{\sqrt{x^2-8x-1}}dx$.

9.10. а) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2+2x+3}$.

б) $\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}dx$.

9.11. а) $\int \frac{(4x+5)dx}{4x^2-4x+3}$.

б) $\int \frac{(5-4x)dx}{\sqrt{4x^2+4x-3}}dx$.

9.12. а) $\int \frac{(3x+4)dx}{9x^2+6x+5}$. б) $\int \frac{(3-4x)dx}{\sqrt{5-6x-9x^2}}dx$.

9.13. а) $\int \frac{(6x-1)dx}{x^2-5x}$. б) $\int \frac{(6+x)dx}{\sqrt{5x-x^2}}dx$.

9.14. а) $\int \frac{(5x+1)dx}{4x^2-4x+1}$. б) $\int \frac{(5-x)dx}{\sqrt{1-4x-4x^2}}dx$.

9.15. а) $\int \frac{(x+7)dx}{16x^2+4x+5}$. б) $\int \frac{(2x-7)dx}{\sqrt{16x^2-4x+5}}dx$.

9.16. а) $\int \frac{(7x-6)dx}{9x^2-6x+5}$. б) $\int \frac{(6x+7)dx}{\sqrt{9x^2+6x-5}}dx$.

Завдання 10. Знайти невизначені інтеграли від дробово-раціональних виразів.

10.1. $\int \frac{(2x^4-x+3)dx}{x(x+1)(x-2)}$. 10.2. $\int \frac{(x^4-5x^3+4x+1)dx}{x(x^2-1)}$.

10.3. $\int \frac{(4x^3-13x^2+16x+5)dx}{(x-1)^3 x}$. 10.4. $\int \frac{(x^3-8x^2+23x-16)dx}{x(x-2)^3}$.

10.5. $\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+x+2)(x^2+2)}$. 10.6. $\int \frac{(x^3+6x^2+9x+6)dx}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$.

10.7. $\int \frac{(-4x^2+2x-9)dx}{(x^2+x+1)(x^2+4)}$. 10.8. $\int \frac{(x^3+4x^2+4x+2)dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$.

10.9. $\int \frac{(3x^4-2x^3+5)dx}{(x-1)(x+1)(x-2)}$. 10.10. $\int \frac{(x^4-2x^2+5)dx}{x(x-2)(x-3)}$.

10.11. $\int \frac{(-3x^2+3x+18)dx}{x^2(x-3)^2}$. 10.12. $\int \frac{(-5x^2+15x+40)dx}{(x-2)^2(x+3)^2}$.

10.13. $\int \frac{(2x^3+4x^2+2x+2)dx}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}$. 10.14. $\int \frac{(4x^2+7x-2)dx}{(x^2-x+1)(x^2+4)}$.

10.15. $\int \frac{(x^4-5x+4)dx}{x^3-9x}$. 10.16. $\int \frac{(2x^4-3x+3)dx}{x(x+1)(x-4)}$.

Завдання 11. Знайти невизначені інтеграли.

11.1. $\int \cos 3x \cdot \sin 2x dx$. 11.2. $\int \frac{10+tgx}{5\sin^2 x-9\cos^2 x+3}dx$.

11. 3. $\int \sin^2 x \cdot \cos 4x dx$. 11.4. $\int \sin^6 \frac{x}{2}dx$.

11.5. $\int \frac{dx}{3+4tgx}$.

11.6. $\int \frac{dx}{\cos x - 6\sin x}$.

11.7. $\int \sin^4 4x \cdot \cos^2 4x dx$.

11.8. $\int \frac{4+tgx}{2\cos^2 x - 5} dx$.

11.9. $\int tg^4 x dx$.

11.10. $\int \cos 3x \cdot \cos 5x dx$.

11.11. $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$.

11.12. $\int \cos^4 x dx$.

11.13. $\int \frac{4-3tgx}{7\cos^2 x + 3\sin^2 x} dx$.

11.14. $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$.

11.15. $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x dx$.

11.16. $\int \frac{7-2tgx}{(5\sin x + 2\cos x)^2} dx$.

Завдання 12. Знайти невизначені інтеграли.

12.1. $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

12.2. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}}$.

12.3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$.

12.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$.

12.5. $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-2}}$.

12.6. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+4} - 3\sqrt[3]{x+4}}$.

12.7. $\int \sqrt{\frac{x-4}{x-11}} dx$.

12.8. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{1-5x}}$.

12.9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{100-x^2}}$.

12.10. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4} dx$.

12.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1} + 2\sqrt[3]{3x+1}}$.

12.12. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \frac{1}{1-x} dx$.

12.13. $\int \frac{x^2 dx}{(81-x^2)^{3/2}}$.

12.14. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+8} + \sqrt[3]{x+8}}$.

12.15. $\int \frac{dx}{(64+x^2)^{3/2}}$.

12.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}}$.

12.17. $\int \sqrt{9-x^2} dx$.

12.18. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}}$.

5.Визначений інтеграл

Формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$, а $F(x)$- її первісна, то

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b$$

Формула інтегрування частинами.

Якщо існують $u(x)$, $v(x)$ - неперервно-диференційовні функції на $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

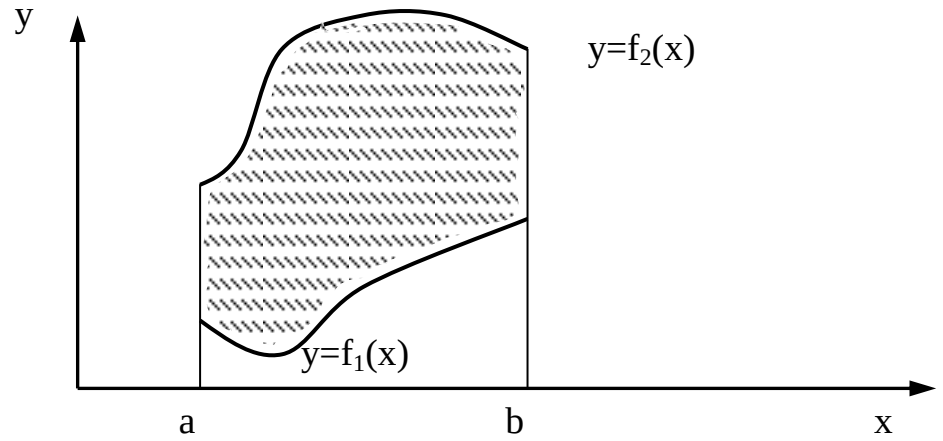
Формула заміни змінних.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, а $\varphi(t)$ - неперервно-диференційовна функція на (α,β), де $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, то

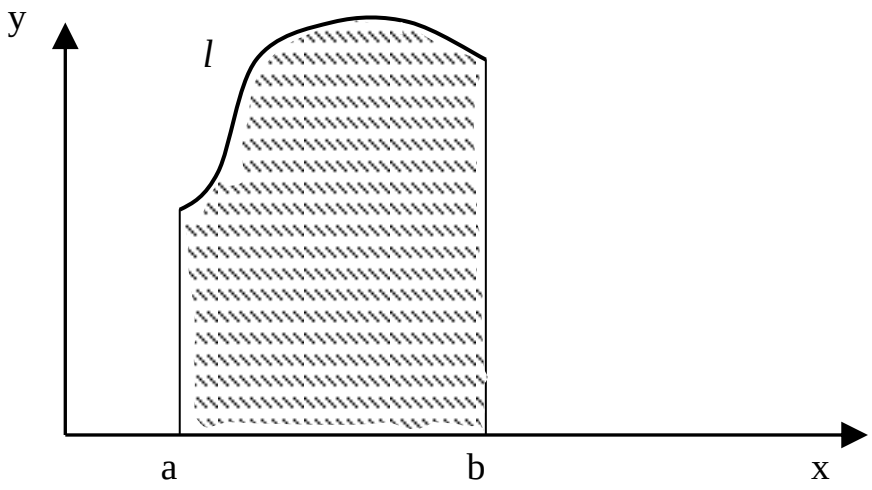
$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Застосування визначеного інтегралу

1.Обчислення площ в прямокутних координатах. $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$

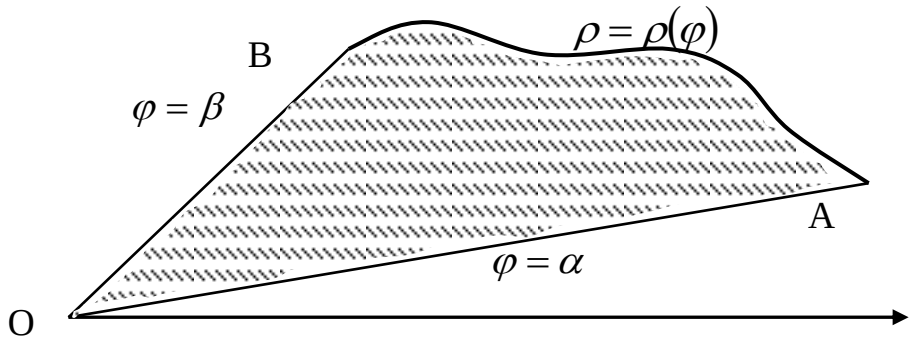


2. Обчислення площ при параметричному заданні кривої.

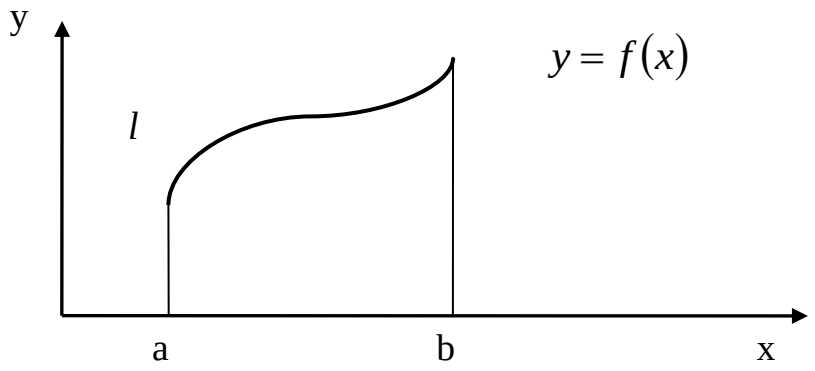


$$l:\begin{cases} x=\varphi(t); \\ y=\psi(t); \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta; \quad \begin{vmatrix} \varphi(\alpha)=a; \\ \varphi(\beta)=b. \end{vmatrix} \quad S=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

3.Площа криволінійного сектора в полярних координатах. $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi.$



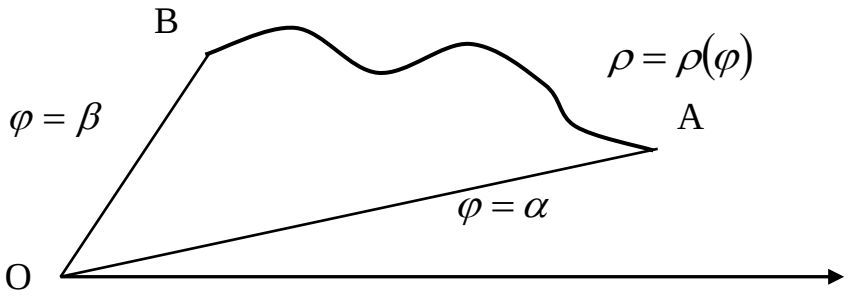
4.Довжина дуги кривої, заданої в Декартовій системі координат. $L=\int_{a}^{b}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$



5.Довжина дуги кривої у випадку параметричного задання.

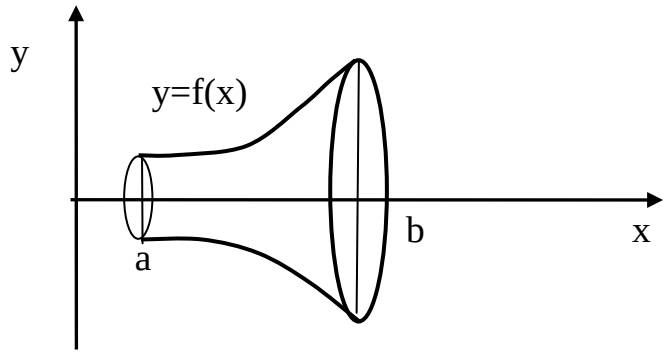
$$l:\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \end{cases} \alpha \le t \le \beta; \qquad \begin{vmatrix} \varphi(\alpha) = a; \\ \varphi(\beta) = b. \end{vmatrix} \quad L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

6.Довжина дуги кривої в полярних координатах. $L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\, d\varphi.$



7.Об’єм тіла обертання.

Розглядаємо тіло, утворене обертанням навкруги вісі OX криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю OX та прямими $x = a;\ \ x = b$. Об’єм такого тіла можна обчислити за формулою $V = \pi \int\limits_{a}^{b} f^2(x)dx$. Якщо тіло утворене обертанням навкруги вісі OY криволінійної трапеції, обмеженої кривими $x = g(y);\ y = c;\ y = d$, справедлива аналогічна формула $V = \pi \int\limits_{c}^{d} g^2(y)dy$.



Завдання 13. Обчислити інтеграли.

13.1. $\int_1^3 \operatorname{arctg} x dx$.

13.2. $\int_{-2}^1 \frac{x dx}{x^3+1}$.

13.3. $\int_{\pi/2}^{\pi} x \sin x dx$.

13.4. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} x^2 \cos 3x dx$.

13.5. $\int_{e/2}^{1} x^2 \ln 2x dx$.

13.6. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{-x}}$.

13.7. $\int_0^4 \frac{(x+2)}{\sqrt{3x+4}+1} dx$.

13.8. $\int_{-1}^0 (2x-3)e^{3x} dx$.

13.9. $\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

13.10. $\int_{2e}^{3e} \frac{dx}{x \ln x}$.

13.11. $\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$.

13.12. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} 2x dx$.

13.13. $\int_0^{10} \sqrt{100-x^2} dx$.

13.14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^3 \sin^2 x \cos^4 x dx$.

13.15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x dx$.

13.16. $\int_0^3 x^2 \ln(x+4) dx$.

13.17. $\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos^2 3x dx$.

13.18. $\int_{-16}^{-11} \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$.

Завдання 14. Обчислити площі фігур, обмежених заданими кривими. Зробити схематичні малюнки.

14.1. $y = x^2 + 7x;\quad y = 4x + 4.$ 14.2. $y = 4 - x^2;\quad y = x^2 - 2x.$

14.3. $x = 9 - y^2;\quad x = y^2 - 3y.$ 14.4. $y = 3x^2 - 5x + 1;\quad y = 2x - 1.$

14.5. $xy = 7;\quad x + y = 8.$ 14.6. $y = x^2 - 3x - 2;\quad y = -2x.$

14.7. $y = x^2 + 4x;\quad y = 7x + 4.$ 14.8. $y = x^2 - 3y = 4;\quad x^2 + y = 8.$

14.9. $y = (x-1)^2;\quad y^2 = x - 1.$ 14.10. $y^2 + 4x = 4;\quad y^2 - 12x = 36.$

14.11. $y = 2x^2 + 7x + 1;\quad y = 2x - 1.$

14.12. $y = x^2 - 2x + 4;\quad 9x + y + 2 = 0.$

14.13. $y = 4x - 3x^2;\quad y + 3x - 2 = 0.$

14.14. $y = x^2 - 3x;\quad y = 2x - 6.$

14.15. $y = x^2 - 2x + 1;\quad y = 3x - 5.$

14.16. $y = 5x - 2x^2;\quad y = 2x - 2.$

14.17. $y = x^2 - 2x = 3;\quad x^2 - y = 4.$

14.18. $y = 2x^2 + 6x + 5;\quad y = x + 3.$

14.19. $y = x^2 - 5x + 1;\quad 2x + y - 1 = 0.$

14.20. $y^2 + 2x = 6;\quad y - 2x = 2.$

Завдання 15. Обчислити площі фігур, обмежених лініями. заданими рівняннями в полярних координатах. Зробити схематичні малюнки.

15.1. $\rho = 3 - \cos\varphi;\quad \rho = 1.$ 15.2. $\rho = 2 + \cos\varphi;\quad \rho = 3.$

15.3. $\rho = 2 - \sin\varphi;\quad \rho = 1.$ 15.4. $\rho = \sin 3\varphi;\quad \varphi = 0;\quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

15.5. $\rho^2 = \cos 2\varphi; \varphi = -\frac{\pi}{4}; \varphi = \frac{\pi}{4}.$ 15.6. $\rho = \varphi;\ \varphi = \frac{\pi}{3};\ \varphi = \frac{\pi}{4}.$

15.7. $\rho = 4 + \cos\varphi; \rho = 3 - \cos\varphi.$ 15.8. $\rho = 2(1 - \cos\varphi).$

15.9. $\rho = 2(1 - \sin\varphi).$ 15.10. $\rho = 3 + \sin\varphi;\quad \rho = 2.$

15.11. $\rho = 3\sin 2\varphi;\ \varphi = 0;\ \varphi = \frac{\pi}{4}.$

15.12. $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi;\ \varphi = 0;\ \varphi = \frac{\pi}{2}.$

15.13. $\rho = 2\cos 4\varphi.$

15.14. $\rho^2 \cos 2\varphi = 1;\ \varphi = -\frac{\pi}{8};\ \varphi = \frac{\pi}{8}.$

15.15. $\rho = 6 - \cos 2\varphi.$ 15.16. $\rho = 2\cos 6\varphi.$

15.17. $\rho = e^{\varphi};\ \varphi = 0;\ \varphi = \frac{\pi}{4}.$ 15.18. $\rho = \frac{13}{2\pi}\varphi; \varphi = \frac{\pi}{12}; \varphi = \frac{\pi}{4}.$

Завдання 16. Обчислити довжини дуг наступних кривих.

16.1. $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t; \\ y = 6\sin t - 8\cos t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$

16.2. $y = \ln\sin x; \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

16.3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t); \\ y = 4(\sin t - t\cos t); \end{cases} \quad 0 \le t \le 2.$

16.4. $\rho = 2(1 - \cos\varphi); \quad 0 \le \varphi \le \pi$.

16.5. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x;\ 0 \le x \le \frac{7}{9}.$

16.6. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t); \\ y = e^t(\cos t - \sin t); \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

16.7. $\rho = 3e^{\frac{3}{4}\varphi}; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

16.8. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t; \\ y = 2t\sin t + (2 - t^2)\cos t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$.

16.9. $\begin{cases} x = 4\sin t + 3\cos t; \\ y = 3\sin t - 4\cos t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$

16.10. $y = 1 - \ln\sin x; \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

16.11. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t); \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t); \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

16.12. $\rho = 6\cos\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

16.13. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

16.14. $y = \arcsin e^{-x}; \quad 0 \le x \le 1$.

16.15. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t; \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

16.16. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}; \quad 0 \le x \le 2$.

16.17. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x; \quad 1 \le x \le 2.$

16.18. $\rho = 1 + \cos\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

Завдання 17. Обчислити об'єми тіл, утворених поверхнями, отриманими при обертанні наступних ліній:

17.1. $y = 2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \left(0 \le x \le 3\right)$ навколо вісі OX .

17.2. $y = e^x; \; y = 1; \; x = \ln 2$ навколо вісі OX .

17.3. $x = 5 - y^2; \;\; x = 5 - 2y$ навколо вісі OY .

17.4. $y = -x^2 + 5x - 4; \; y = 0$ навколо вісі OX .

17.5. $x = 5y^2; \; x = 5$ навколо вісі OY .

17.6. $y = \ln x; \; y = 1; \; x = e^2$ навколо вісі OX .

17.7. $y = \sin x; \; y = 2\sin x \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ навколо вісі OX .

17.8. $y = e^x; \; y = e^{-x}; \; x = 1$ навколо вісі OX .

17.9. $y = 2x - x^2; \; y = 0$ навколо вісі OY .

17.10. $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1; \; x = 3$ навколо вісі OX .

17.11. $y = xe^x; \; x = 1; \; y = 0$ навколо вісі OX .

17.12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \left(a > b > 0\right)$ навколо вісі OY .

17.13. $y = e^x - 1; \; y = 4; \; x = 0$ навколо вісі OX .

17.14. $y = x^2; \; y^2 = x$ навколо вісі OX .

17.15. $y = \arcsin x \left(0 \le x \le 1\right)$ навколо вісі OX .

17.16. $x^4 + y^4 = x^2$ навколо вісі OX .

17.17. $x^2 + y^2 = 5^2$ навколо вісі OX .

6.Функції багатьох змінних

Диференціалом du диференційовної в точці $M_0(a_1, a_2, \ldots a_m)$ функції $u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ називається головна, лінійна відносно приростів аргументів частина приросту цієї функції в точці M_0.

$$du\,|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m.$$

Застосування диференціалу до наближених обчислень

Якщо точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ та $M_0(a_1, a_2, \ldots a_m)$ близькі і містяться в області, де функція u диференційовна, то

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) \approx f(a_1, a_2, \ldots a_m) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\Delta x_m,$$

де $\Delta x_1 = x_1 - a_1; \quad \Delta x_2 = x_2 - a_2; \ldots; \Delta x_m = x_m - a_m.$

Диференціювання складної функції

Розглянемо складну функцію вигляду $u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$, де

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ \quad \ldots \\ x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \ldots, t_k). \end{cases}$$

Якщо функції $\varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_k); \quad i = \overline{1, m}$ диференційовні в деякій точці $M(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \ldots, \overline{t_k})$, а функція $u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ диференційовна у відповідній точці $N(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_m})$, де $\overline{x_1} = \varphi_1(\overline{t_1}, \ldots \overline{t_k}); \cdots; \overline{x_m} = \varphi_m(\overline{t_1}, \ldots \overline{t_k})$, то складна функція $u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ диференційовна в точці $M(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \ldots, \overline{t_k})$. При цьому частинні похідні цієї складної функції в точці M визначаються формулами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_1}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_2}; \\ \ldots\ldots\ldots\

Градієнт функції $u = f(x, y, z)$ в точці M_0:

$$grad u(M_0) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \right\}.$$

Похідна функції $u = f(x, y, z)$ за напрямком вектора $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ в точці M_0: $\frac{\partial u}{\partial a}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cdot \cos\gamma$, де направляючі косинуси вектора $\bar{a}$ знаходимо за допомогою формул

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Завдання 18. Задана функція двох змінних $z = z(x, y)$. Перевірити, чи задовольняє вона дане диференціальне рівняння в частинних похідних.

18.1. $z = \ln(\sqrt{x} - 3y)$; $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

18.2. $z = x^y$; $\quad y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}$.

18.3. $z = e^{xy}$; $\quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

18.4. $z = \sin(x + ay)$; $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

18.5. $z = \frac{x}{y}$; $\quad x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

18.6. $z = \cos y + (y - x)\sin y$; $\quad (x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

18.7. $z = tg^2(2x - 3y)$; $\quad 3 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

18.8. $z = arctg \frac{x}{y}$; $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

18.9. $z=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2(x+y)}{x-y}$.

18.10. $z=\ln(x^2-y^2)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{x+y}$.

18.11. $z=\sqrt{x^2-3y^2}$; $3y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

18.12. $z=\ln(x^2+xy+y^2)$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$.

18.13. $z=(x^2+y^2)tg\dfrac{x}{y}$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$.

18.14. $z=e^{-x-3y}\sin(x+3y)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$.

18.15. $z=\ln\dfrac{x}{y}+x^3-y^3$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=3(x^3-y^3)$.

18.16. $z=\cos^2(x-4y)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$.

Завдання 19.

№ 19.1-19.10: обчислити значення виразу, замінивши приріст відповідної функції диференціалом.

19.1. $(1{,}03)^2(0{,}98)^3$.

19.2. $\sqrt{1{,}02^3+1{,}97^3}$.

19.3. $\dfrac{2{,}03}{(2{,}03)^4+(2{,}97)^2}$.

19.4. $\ln\left(\sqrt[5]{0{,}98}+\sqrt[4]{1{,}03}-1\right)$.

19.5. $arctg\dfrac{0{,}98}{1{,}01}$.

19.6. $1{,}04^{2{,}02}$.

19.7. $\sqrt{3{,}97^2+3{,}02^2}$.

19.8. $1{,}02^{2{,}04}-\ln 1{,}02$.

19.9. $0{,}97^{5{,}03}$.

19.10. $\left(2-\sqrt{0{,}97}\right)^{3{,}02}$.

№ 19.11-19.20: Задана функція $u=u(x,y,z)$, точка $A(x_0,y_0,z_0)$ та вектор $\bar{s}$. Знайти:

а)градієнт функції u в точці A;

б)похідну функції u в точці A за напрямком вектора $\bar{s}$.

19.11. $u=z\cdot arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $A(-1{,}1{,}2)$; $\bar{s}=\{1,-1{,}1\}$.

19.12. $u=e^{xyz}$; $A(-1,-2,0)$; $\bar{s}=\{5,6,2\}$.

19.13. $u=arctg(xyz)$; $A(-1,-1{,}6)$; $\bar{s}=\{2,-3{,}11\}$.

19.14. $u=\ln(3xy+2xy^2z+z^2)$; $A(0,1,1)$; $\bar{s}=\{4,-3{,}1\}$.

19.15. $u = \arcsin\left(\frac{xz}{\sqrt{y}}\right)$; $A\left(\sqrt{2},4,\frac{1}{2}\right)$; $\bar{s} = \{1,-2,5\}$.

19.16. $u = 4x^4z + 2xy^3 + yz^3$; $A(2,1,0)$; $\bar{s} = \{5,-8,6\}$.

19.17. $u = \frac{3x+y-z}{x+2y+z}$; $A(3,-1,4)$; $\bar{s} = \{1,1,1\}$.

19.18. $u = \arccos\left(\frac{x^2+y^2}{z}\right)$; $A\left(0,\frac{1}{4},1\right)$; $\bar{s} = \{2,-5,2\}$.

19.19. $u = xy \cdot e^{yz}$; $A(1,1,-2)$; $\bar{s} = \{-5,0,8\}$.

19.20. $u = \ln(x^2 - y^3 + z^4 + 1)$; $A(5,1,2)$; $\bar{s} = \{0,1,1\}$.

Завдання 20.

№ 20.1-20.11: Знайти локальні екстремуми даних функцій.

20.1. $u = x^2 + y^2 + xy - 2x - y - 11$.

20.2. $u = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

20.3. $u = x^3 + y^3 - 9xy$.

20.4. $2x^3 + 2y^3 - 36xy + 50$.

20.5. $u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

20.6. $u = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

20.7. $u = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

20.8. $u = 6x^2 - x^3 + y^2 - 2y$.

20.9. $u = x^3 + xy^2 + 6xy$.

20.10. $u = x^3y^2(6 - x - y)$.

20.11. $u = 2x^2 - y(x-1)^2$.

№ 20.12-20.19: Знайти умовний екстремум функції $u = f(x,y)$, якщо рівняння зв'язку $\varphi(x,y) = 0$.

20.12. $u = x^2 - y^2$; $\varphi(x,y) = 2x - 3y - 1 = 0$.

20.13. $u = x^2 - xy + y^2 - 4x$; $\varphi(x,y) = 2x + 3y - 12 = 0$.

20.14. $u = \frac{1}{2}x^2 - xy$; $\varphi(x,y) = y - \frac{1}{3}x^2 = 0$.

20.15. $u = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$; $\varphi(x,y) = x - 2y + 3 = 0$.

20.16. $u = 4x - 4y - x^2 - y^2$; $\varphi(x,y) = 2x - y = 0$.

20.17. $u = (x-1)^2 + 2y^2$; $\varphi(x,y) = x + y + 1 = 0$.

20.18. $u = 4y^3 + 3x^2 + y^2 - 4y$; $\varphi(x,y) = x - 1 = 0$.

20.19. $u = x^2 - y^2 - 4x$; $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 = 9$.

Завдання 21. Перевірити, чи є функція $u = u(x, y, z)$ розв'язком даного диференціального рівняння (φ та ψ - довільні , достатню кількість разів диференційовні функції).

21.1. $u = x + \varphi(xy)$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} - x = 0$.

21.2. $u = x\varphi\left(\dfrac{x}{y^2}\right)$; $\quad 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0$.

21.3. $u = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $\quad y\dfrac{\partial u}{\partial x} - x\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

21.4. $u = \varphi(x - y, y - z)$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

21.5. $u = \varphi\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right)$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

21.6. $u = \varphi(x)\psi(y)$; $\quad u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

21.7. $u = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$; $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

21.8. $u = x\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right) + y\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} - u = 0$.

21.9. $u = \varphi(xy) + \psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$; $\quad x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

21.10. $u = x + y + \varphi(xy)$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} - x + y = 0$.

21.11. $u = \sqrt{x^2 + y^2}\,\varphi\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \ln\sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

$(x + y)\dfrac{\partial u}{\partial x} - (x - y)\dfrac{\partial u}{\partial y} - u = 0$.

21.12. $u = \sin y + \varphi(\sin x - \sin y)$; $\quad \sec x\dfrac{\partial u}{\partial x} + \sec y\dfrac{\partial u}{\partial y} - 1 = 0$.

21.13. $u = x^5\varphi\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$; $\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial u}{\partial y} - 5z = 0$.

21.14. $u = y\varphi\left(x^2 - y^2\right)$; $\quad y^2\dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} - xu = 0$.

7.Числові ряди

Необхідна умова збіжності ряду.

Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

збіжний, то послідовність його членів є нескінченно малою: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$,то ряд розбіжний.

Узагальнена ознака порівняння.

Якщо $a_n \sim C \cdot \dfrac{1}{n^p}$, $n \to \infty$, де C, p - деякі сталі, то ряд збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$.

Ознака Даламбера.

Якщо $a_n > 0,\ n = 1,2,\ldots$ і $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$.

Ознака Коші.

Якщо $a_n \ge 0,\ n = 1,2,\ldots$ і $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$.

Ознака Лейбніца збіжності знакозмінного ряду.

Нехай виконуються умови: 1) $a_n \ge 0,\ n = 1,2,\ldots$;

2) $a_n \ge a_{n+1} \forall n \ge n_0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ збіжний.

Формула Стірлінга

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Завдання 22. Дослідити знакододатні ряди на збіжність.

22.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10}{n(n+1)}$.

22.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

22.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$.

22.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$.

22.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$.

22.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{n!}$.

22.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$.

22.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)^{n}$.

22.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{n}\right)^{n}$.

22.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

22.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$.

22.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}$.

22.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2+1}$.

22.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

22.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n-2)}$.

22.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\sqrt{n}}$.

22.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^2+1}$.

22.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(3^n)}{n^2}$.

Завдання 23. Дослідити ряди на збіжність та абсолютну збіжність.

23.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

23.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3n}{2n+5}\right)^{n}$.

23.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!4^{n-1}}$.

23.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)(n+2)}$.

23.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

23.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(\ln n)^n}$.

23.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

23.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$.

23.9. $\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n^2}$.

23.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(2n-1)!}$.

23.11. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n+1}e^{-n^2+2n}$.

23.12. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2}$.

23.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

23.14. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$.

8.Функціональні ряди

Степеневі ряди

Для кожного степеневого ряду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

існує інтервал збіжності $|x - x_0| \le R$, всередині якого даний ряд збіжний, а зовні розбіжний. Радіус збіжності R можна знайти за допомогою формул

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{або} \quad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\,.$$

Всередині свого інтервалу збіжності степеневі ряди можна почленно диференціювати і інтегрувати.

Завдання 24. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду та дослідити його поведінку у межових точках інтервалу збіжності.

24.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$.

24.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$.

24.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n n}{3^n+5^n}$.

24.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3x-4)^n}{3^n}$.

24.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\left(\frac{n}{3}\right)^n\cdot(2x-3)^n$.

24.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4+\cos\pi n)(2x)^n}{\sqrt{n}}$.

24.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

24.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{(-2)^n+3^n}$.

24.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x-4)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

24.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x+1)^n}{\ln n}$.

24.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{2^{n^2}}$.

24.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{3^n}\cdot(x-2)^n$.

24.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi}{4^n}\cdot(\pi x-1)^n$.

24.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{n-1}}{n^2+1}\cdot(3x)^n$.

24.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi^n}{2^{2n}}\cdot(x+1)^n$.

24.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(4^n+\frac{\cos\pi n}{n}\right)\cdot(x-\pi)^n$.

Ряди Тейлора

Нехай функція $f(x)$ має похідні усіх порядків в околі точки x_0 і залишковий член формули Тейлора для функції $f(x)$ в точці x_0 задовольняє

співвідношення $R_n(x) \to 0, n \to \infty$. Тоді $f(x)$ може бути записана у вигляді степеневого ряду за степенями $(x - x_0)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Якщо $x_0 = 0$, то відповідний степеневий ряд називають рядом Маклорена: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$.

Розклад у ряд Маклорена основних елементарних функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (-\infty < x < \infty).$$

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n \qquad (-1 < x < 1).$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \qquad (-1 < x \le 1).$$

Завдання 25. Розкласти задані функції в ряд Маклорена.

25.1. $f(x) = 3^x$.

25.2. $f(x) = \frac{1 + x}{(1 - x)^2}$.

Вказівка. Розкласти $\frac{1}{(1-x)^2}$ по степенях x, а потім його домножити на $(1 + x)$.

25.3. $f(x) = 4^{-x^3}$.

25.4. $f(x) = \cos^2 x$.

25.5. $f(x) = \sin x^2$.

25.6. $f(x) = \sqrt[3]{1 + x}$.

25.7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

25.8. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - 2x}}$.

25.9. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

Вказівка. Скористатися розкладом в ряд Маклорена функції $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ і проінтегрувати обидві частини рівності.

25.10. $\mathrm{f}(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}$.

Вказівка. Розкласти даний дріб в суму найпростіших.

25.11. $\mathrm{f}(x)=(1+x)\ln(1+x)$.

25.12. $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

25.13. $\mathrm{f}(x)=\frac{2}{1-3x^2}$.

25.14. $\mathrm{f}(x)=\frac{e^x-1}{x}$.

Завдання 26.

26.1. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\ln x$ у ряд Тейлора за степенями $(x-1)$.

26.2. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+1)$.

26.3. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+4)$.

26.4. Розкласти $\mathrm{f}(x)=e^x$ у ряд Тейлора за степенями $(x+2)$.

26.5. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+4)$.

26.6. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\cos x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

26.7. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\cos^2 x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

26.8. Розкласти $\mathrm{f}(x)=chx$ у ряд Маклорена.

26.9. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\ln\left(1+x+x^2+x^3\right)$ у ряд Маклорена.

26.10. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\int_0^x e^{-t^2}dx$ у ряд Маклорена.

Ряди Фур'є

Якщо функція $\mathrm{f}(x)$ є кусково-гладенькою на інтервалі $(-\pi,\pi)$, періодичною з періодом 2π, то функція $\mathrm{f}(x)$ у кожній точці x неперервності може бути представлена своїм рядом Фур'є :

$\mathrm{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, де

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f}(x)\cos nx dx,\ n=0,1,2,\ldots,$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(x)\sin nx dx,\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$$

Якщо x^* - точка розриву функції $\mathrm{f}(x)$, то тригонометричний ряд Фур'є збігається у цій точці до значення $\frac{1}{2}\left[\mathrm{f}\left(x^* - 0\right) + \mathrm{f}\left(x^* + 0\right)\right]$.

Розклад парної функції.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ парна функція періодом 2π, то

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad \text{де } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f}(x)\cos nx dx,\ n = 0,1,2,\ldots$$

Розклад непарної функції.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ непарна функція з періодом 2π, то

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{де } b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{f}(x)\sin nx dx,\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$$

Аналогічний розклад справедливий у випадку, коли функція є періодичною з періодом $2l$:

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \text{ де}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx,\ n = 0,1,2,\ldots,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx,\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$$

Розклад парної функції.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ парна функція з періодом $2l$, то

$$\mathrm{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},\ \text{де } a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} \mathrm{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx,\ n = 0,1,2,\ldots$$

Розклад непарної функції.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ непарна функція з періодом $2l$, то

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \text{де } b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} \mathrm{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx,\ \mathrm{n} = 1,2,\ldots$$

Завдання 27. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)$. Зобразити графік функції і суми ряду Фур'є.

27.1. $f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi < x \le 0; \\ x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$ 27.2. $f(x) = \pi - x, x \in (0,2\pi)$.

27.3. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, x\in(-\pi,\pi)$.

27.4. $f(x)=\begin{cases}-x, -\pi<x<0;\\ 0, \quad 0\le x<\pi.\end{cases}$

27.5. $f(x)=|x|, -\pi<x<\pi$.

27.6. $f(x)=\begin{cases}-1, -\pi<x<0;\\ 2, \quad 0\le x<\pi.\end{cases}$

27.7. $f(x)=\pi+x, -\pi<x<\pi$.

27.8. $f(x)=\begin{cases}x+\pi, -\pi<x\le 0;\\ x-\pi, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

27.9. $f(x)=\begin{cases}-x, -\pi<x\le 0;\\ 2x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

27.10. $f(x)=\begin{cases}1, -\pi<x\le 0;\\ 2, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

27.11. $f(x)=\begin{cases}\pi+x, -\pi<x\le 0;\\ \pi-x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

27.12. $f(x)=\frac{x}{\pi}, x\in(-\pi,\pi)$.

27.13. $f(x)=\begin{cases}\pi, \quad -\pi<x\le 0;\\ \pi-x, 0<x<\pi.\end{cases}$

27.14. $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}+x, \quad -\pi<x\le 0;\\ \frac{\pi}{2}-x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

27.15. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}, x\in(0,2\pi)$.

27.16. $f(x)=2x, x\in(0,2\pi)$.

27.17. $f(x)=\begin{cases}2x, \quad -\pi<x\le 0;\\ -2x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

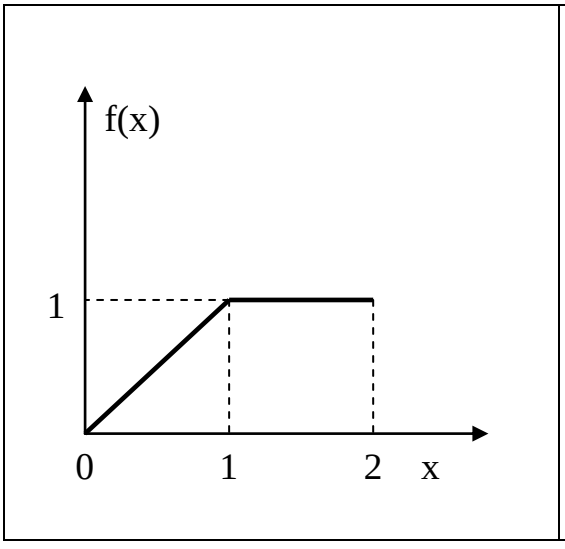
27.18. $f(x)=\begin{cases}x, \quad 0<x<\pi;\\ \pi, \quad \pi\le x<2\pi.\end{cases}$

27.19. $f(x)=|\cos 2x|$.

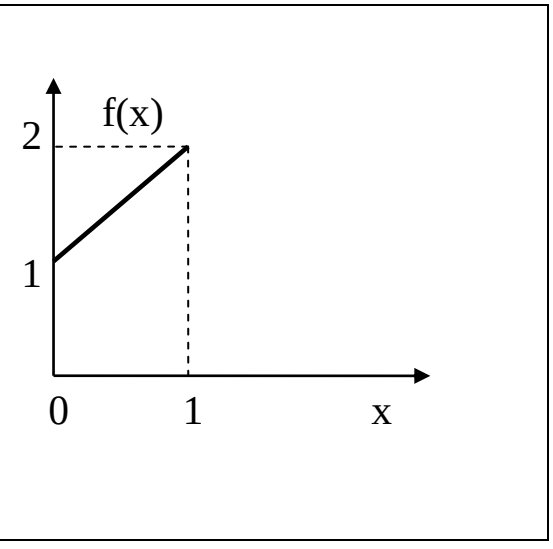
27.20. $f(x)=x, x\in(-\pi,\pi)$.

Завдання 28. Функцію $f(x)$, зображену графічно на інтервалі $(0,T)$, розкласти в ряд Фур'є: а) з періодом T ; б) за косинусами; в) за синусами.

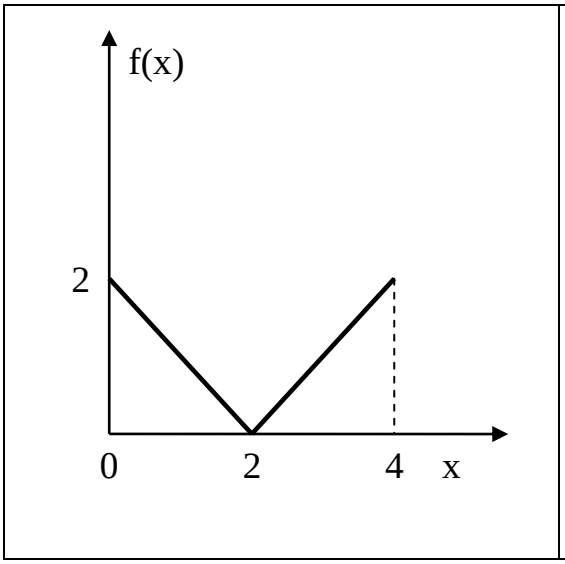
28.1.



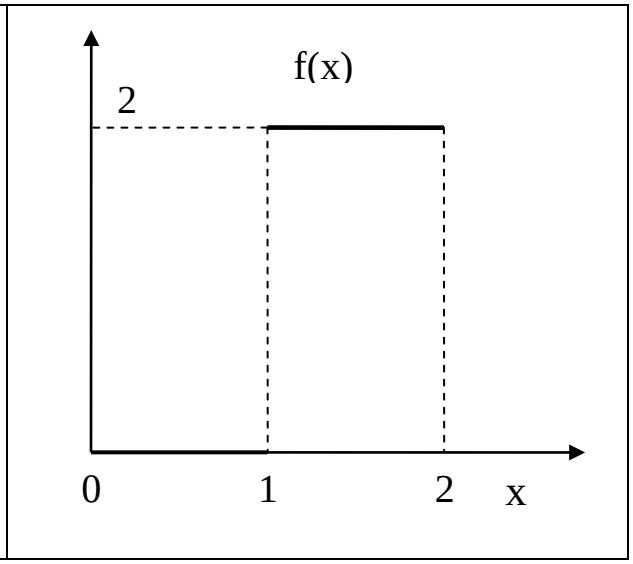
28.2.



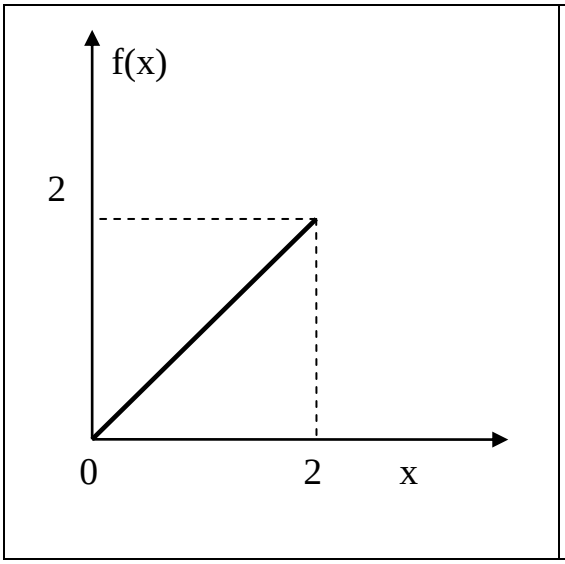
28.3.



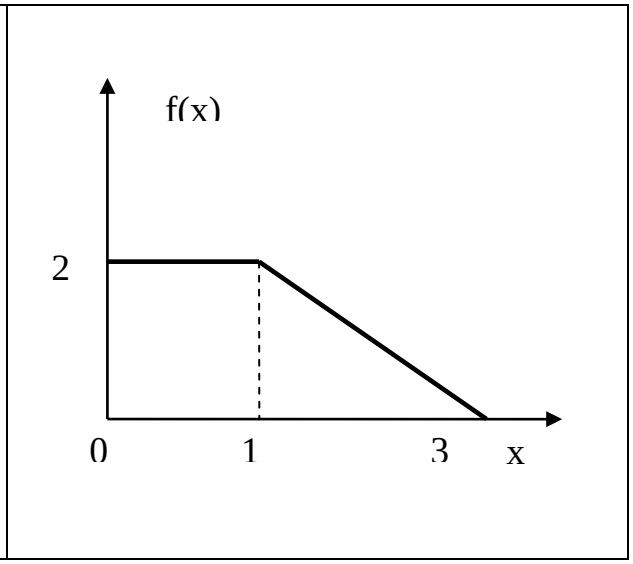
28.4.



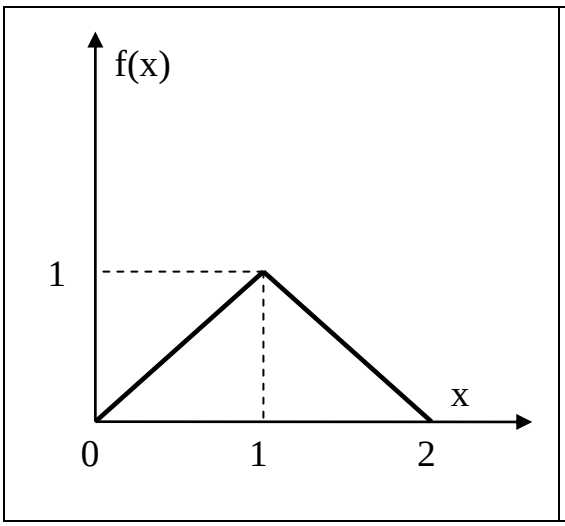
28.5.



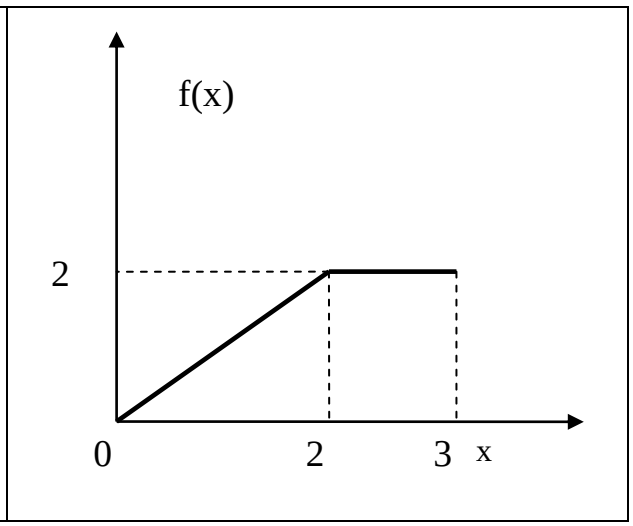
28.6.



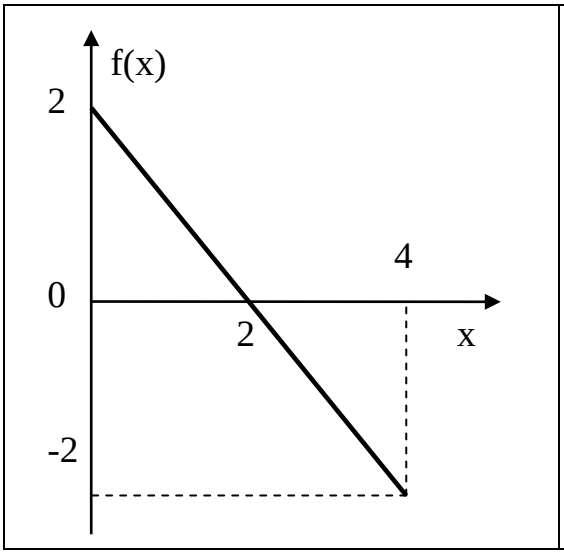
28.7.



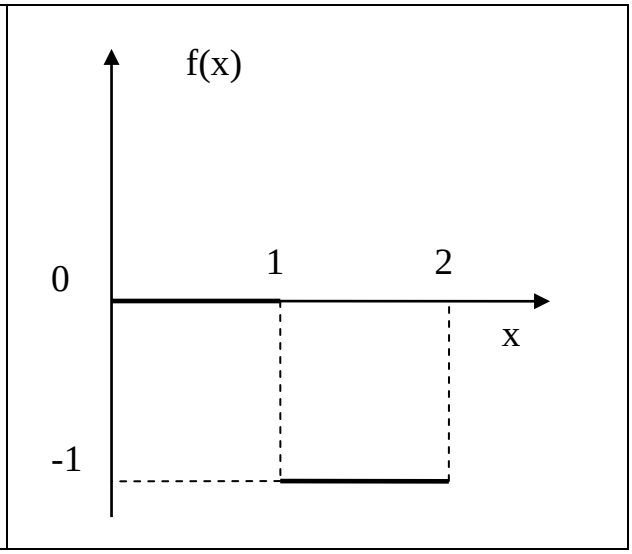
28.8.



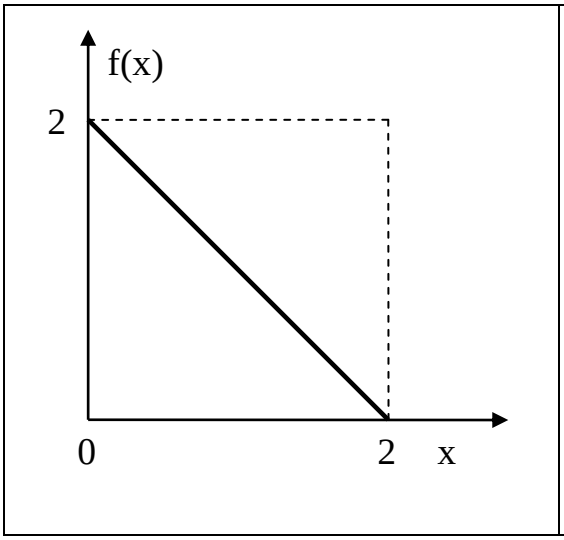
28.9.



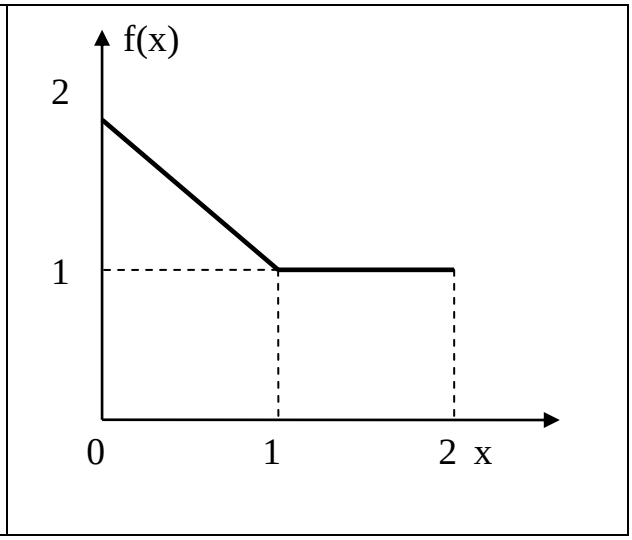
28.10.



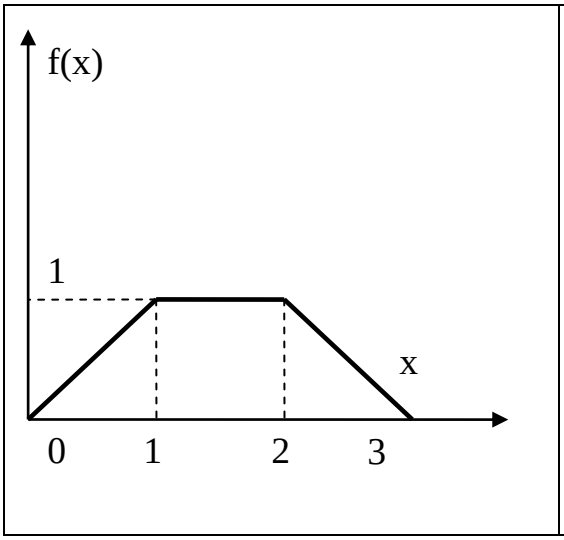
28.11.



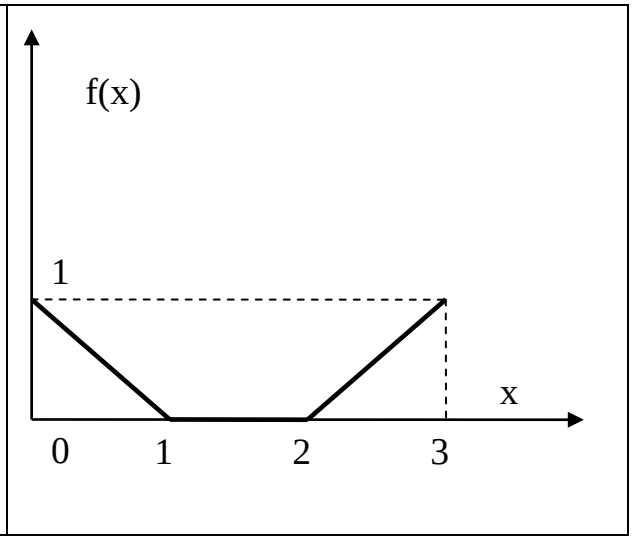
28.12



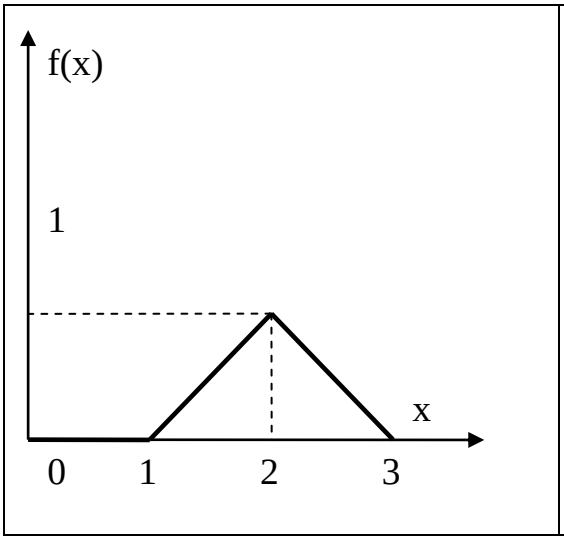
28.13.



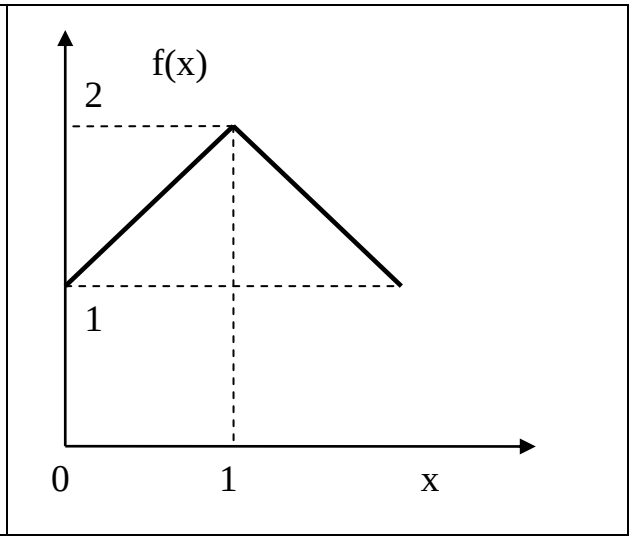
28.14.



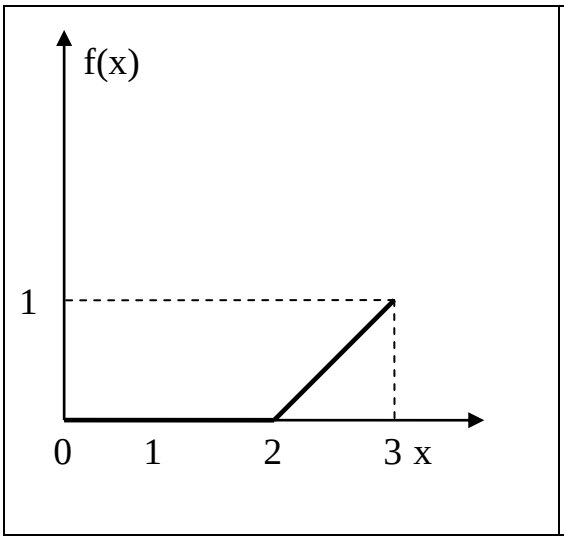
28.15.



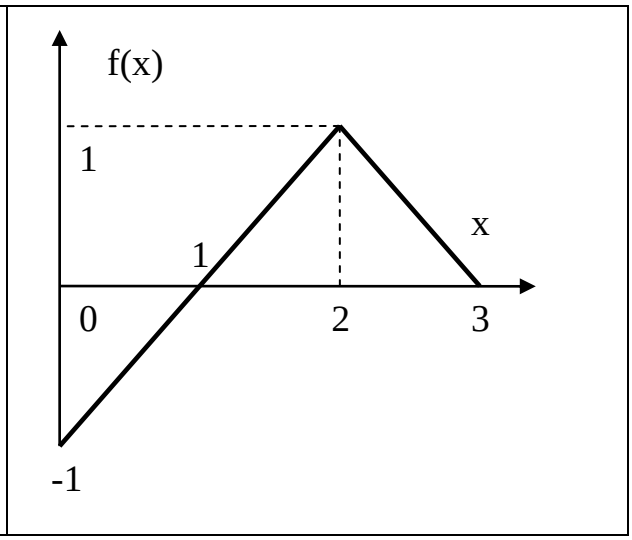
28.16.



28.17.



28.18.



9.Невласні інтеграли

Невласні інтеграли першого роду визначаються наступними рівностями

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int_a^{B} f(x)dx; \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^{b} f(x)dx \quad ,$$ якщо

написані границі існують. Якщо границі не існують, то інтеграли називаються розбіжними.

Асимптотична ознака порівняння

Маємо невласні інтеграли $\int_a^\infty f(x)dx$ та $\int_a^\infty g(x)dx$. Якщо $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} Cg(x)$, де C - стала, то ці інтеграли збігаються або розбігаються одночасно.

Асимптотично-степенева ознака порівняння

Якщо $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{C}{x^\alpha}$, де C - стала,

то при $\begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ збіжний;} \\ \alpha \le 1 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx \text{ розбіжний.} \end{cases}$

Невласні інтеграли другого роду

Нехай $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,c)$, а в околі точки с $f(x)$необмежена. $\int_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx$. Якщо ж $f(x)$ має розрив в лівому кінці відрізка $[a,c]$, то $\int_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b\to a+0}\int_a^b f(x)dx$.

Асимптотично-степенева ознака порівняння

Якщо $f(x) \underset{x\to b-0}{\sim} \frac{C}{(b-x)^\alpha}$, то при $\begin{cases} \alpha \ge 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \text{розбіжний;} \\ \alpha < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \text{збіжний.} \end{cases}$

Якщо $f(x) \underset{x\to a+0}{\sim} \frac{C}{(x-a)^\alpha}$, то при $\begin{cases} \alpha \ge 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \text{розбіжний;} \\ \alpha < 1 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \quad \text{збіжний.} \end{cases}$

Завдання 29.

№ 29.1 – 29.12: обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

29.1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$. 29.2. $\int_0^\infty e^{-ax}dx$. 29.3. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

29.4. $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}dx$. 29.5. $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}dx$. 29.6. $\int_{\sqrt{2}}^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

29.7. $\int_0^{\infty} e^{-x}\sin x dx$. 29.8. $\int_1^{\infty} \frac{arctgx}{x^2} dx$. 29.9. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

29.10. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$. 29.11. $\int_0^1 x\ln x dx$. 29.12. $\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

№ 29.13-29.18:дослідити невласні інтеграли на збіжність.

29.13. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$. 29.14. $\int_0^{\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$.

29.15. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1} dx$. 29.16. $\int_0^{\infty} \frac{x^{13}}{\left(x^5+x^3+1\right)^3} dx$.

29.17. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$. 29.18. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$.

10.Кратні інтеграли

Нехай $D \subset \mathrm{R}^2$ - замкнена область, яка може бути задана нерівностями: $a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)$, де $y_1(x), y_2(x)$ - неперервні на відрізку $[a,b]$ функції. Тоді подвійний інтеграл по області D від неперервної функції $\mathrm{f}(x,y)$ обчислюється за формулою:

$$\iint_D \mathrm{f}(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{f}(x,y)dy$$

Якщо $\mathrm{f}(x,y) \equiv 1$, то даний інтеграл чисельно дорівнює площі області D.

Нехай $V \subset \mathrm{R}^3$ - область, яка може бути визначена нерівностями: $x_1 \le x \le x_2$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, де $y_1(x), y_2(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ - неперервні функції. Тоді потрійний інтеграл по області V від неперервної функції $\mathrm{f}(x,y,z)$ обчислюється за формулою:

$$\iiint_V \mathrm{f}(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathrm{f}(x,y,z)dz.$$

Якщо $\mathrm{f}(x,y,z) \equiv 1$, то інтеграл чисельно дорівнює об'єму області V.

Завдання 30. Обчислити потрійні інтеграли.

30.1. $\iiint_V ydxdydz$, $V: x=0; x=2; y=0; y=1; z=0; z=1-y.$

30.2. $\iiint_V xdxdydz$, $V: y=0; x=1; y=10x; y=1; z=0; z=xy.$

30.3. $\iiint_V zdxdydz$, $V: x=0; y=0; z=0; x^2+y^2+z^2=1.$

30.4. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^2}$; $V: x=0; y=0; z=0; x+y+z=1.$

30.5. $\iiint\limits_V \sqrt{2}zdxdydz$; $V: y=2x^2; y+z=2; z=0.$

30.6. $\iiint\limits_V xdxdydz$; $V: y=0; y=x; x=1; z=0; z=\sqrt{xy}.$

30.7. $\iiint\limits_V \left(\frac{9}{16}\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)dxdydz$; $V: x=4y^2; x=4; z=0; z=y^2.$

30.8. $\iiint\limits_V 6xdxdydz$; $V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=x^2+y^2.$

30.9. $\iiint\limits_V (2x+3y)dxdydz$; $V: x=0; y=0; x+3y=6; z=0; z=\frac{y}{3}.$

30.10. $\iiint\limits_V x^2ydxdydz$; $V: x=0; y=1; y=\sqrt{x}; z=0; z=1-y^2.$

30.11. $\iiint\limits_V 2(x^2+2y^2)dxdydz$; $V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=3y.$

30.12. $\iiint\limits_V y^2dxdydz$; $V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=10(y+3x).$

30.13. $\iiint\limits_V xdxdydz$; $V: y=\sqrt{x}; y=2\sqrt{x}; x+2z=4; z=0.$

30.14. $\iiint\limits_V xdxdydz$; $V: x+6y=6; x=0; y=0; z=0; z=9-x^2 (x\geq 0).$

30.15. $\iiint\limits_V 4zdxdydz$; $V: x=0; y=0; 3x+y=6; z=0; z=\frac{1}{4}y^2.$

Завдання 31. Знайти об'єм тіла, заданого поверхнями, що його обмежують. Зробити схематичний малюнок.

31.1. $x^2+y^2=4;\quad z=0;\quad z=x+y+10.$

31.2. $x^2+y^2=3;\quad z=2-x-y;\quad z=4-x-y.$

31.3. $z=x^2+y^2;\quad z=y.$

31.4. $y=4-x^2;\quad y=0;\quad z=0;\quad z=5.$

31.5. $z=1+x^2+y^2;\quad z=5.$

31.6. $x^2+y^2=2x;\quad z=2x;\quad z=4x.$

31.7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

11.Векторний аналіз

Криволінійні інтеграли першого роду

Якщо $f(x,y,z)$ - функція, визначена і неперервна в точках гладенької кривої L

$$L:\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t); \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

то криволінійний інтеграл першого роду зводиться до визначеного інтегралу

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\,dt.$$

Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку кривої L.

Механічне застосування криволінійного інтегралу першого роду

Якщо $\gamma = \gamma(x,y,z)$ - лінійна густина в точці (x,y,z) кривої L, то маса кривої L дорівнює

$$M = \int_L \gamma(x,y,z)dl.$$

Довжину l кривої L знаходять за формулою $l = \int_L dl$.

Завдання 32.

№32.1-32.10: обчислити криволінійні інтеграли першого роду

32.1. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$; L – відрізок, що з'єднує точки $A(0,0)$ та $B(1,2)$.

32.2. $\int_L (x-y)dl; \quad L:\begin{cases} x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t; \\ y = \frac{1}{2}\sin t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

32.3. $\int_L xyzdl; \quad L:\begin{cases} x = t; \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{2t^3}; \\ z = \frac{1}{2}t^2; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$

32.4. $\int_L \left(x^2+y^2\right)^n dl; \quad n \in N; \quad L:\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

32.5. $\int_L \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)dl; \quad L:\begin{cases} x = 5\cos^3 t; \\ y = 5\sin^3 t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

32.6. $\int\limits_L zdl;$ $\quad L:\begin{cases} x=t\cos t; \\ y=t\sin t; \\ z=t; \end{cases} \quad 0\le t\le 1.$

32.7. $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dl;$ $\quad L:\begin{cases} x=a\cos t; \\ y=a\sin t; \\ z=bt; \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$

32.8. $\int\limits_L xyzdl;$ L – відрізок, що з'єднує точки $A(1,1,1)$ та $B(4,4,4)$.

32.9. $\int\limits_L xdl;$ $\quad L:\begin{cases} x=3t; \\ y=3t^2; 0\le t\le 1. \\ z=2t^3; \end{cases} \quad L:\begin{cases} x=e^t\cos t; \\ y=e^t\sin t; \\ z=e^t \end{cases} \quad -1\le t\le 1.$

32.10. $\int\limits_L x^2ydl,$ де L – границя трикутника з вершинами в точках $O(0,0);\ A(2,0);\ B(1,2).$

№ 32.11-32.15: знайти масу дуги кривої L з лінійною густиною $\gamma=\gamma(x,y,z).$

32.11. $\gamma=|y|;$ $\quad L:\begin{cases} x=2\cos t; \\ y=4\sin t; \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$

32.12. $\gamma=|y|;$ $\quad L: y=2px; \quad 0\le x\le \frac{p}{2}.$

32.13. $\gamma=z;$ $\quad L:\begin{cases} x=e^{-t}\cos t; \\ y=e^{-t}\sin t; \\ z=e^{-t}; \end{cases} \quad 0\le t\le 1.$

32.14. $\gamma=z;$ $\quad L:\begin{cases} x=t\cos t; \\ y=t\sin t; \\ z=t; \end{cases} \quad 0\le t\le 1.$

32.15. $\gamma=xy^2z^3;$ L – відрізок AB, де A(1,1,1), а B(1,3,0).

№ 32.16-32.18: знайти довжину дуги кривої.

32.16. $\quad L:\begin{cases} x=\ln(1+t^2); \\ y=2arctgt-t; \end{cases} \quad 0\le t\le 1.$

32.17. $L:\begin{cases} x=3t; \\ y=3t^2; \\ z=2t^3 \end{cases}$ від точки $O(0,0,0)$ до $A(3,3,2)$.

32.18. $L:\begin{cases} x=e^t\cos t; \\ y=e^t\sin t; \\ z=e^t \end{cases}$ $-1\le t\le 1$.

Криволінійні інтеграли другого роду

Якщо функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні в точках гладенької кривої L

$$L:\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t); \\ z=z(t); \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta,$$

що проходиться в напрямку зростання параметру t, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=$$

$$=\int_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\big)dt.$$

При зміні напрямку обходу кривої L цей інтеграл змінює свій знак на обернений.

У випадку плоскої кривої :

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta \big(P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\big)dt$$

Механічне застосування криволінійного інтегралу другого роду

Роботу сили $\overline{F}=\{P,Q,R\}$ вздовж кривої L можна обчислити за допомогою формули

$$A=\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

Незалежність інтегралу від шляху інтегрування

Якщо контур інтегрування L цілком лежить у деякій однозв'язній області D, в якій функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми похідними першого порядку, то необхідною і достатньою умовою

незалежності інтегралу $\int_L Pdx + Qdy$ від шляху інтегрування є виконання рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

в усіх точках D.

Формула Гріна. Зв'язок криволінійного інтегралу з подвійним

Нехай L - замкнений простий кусково-гладенький контур, що обмежує однозв'язну область D, функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми похідними першого порядку в області D і на її границі. Тоді має місце формула Гріна

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

Завдання 33.

33.1. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по просторовій кривій L, що задана параметрично

$$\int_L xydx + x^2 zdy + xyzdz; \qquad L: \begin{cases} x = e^t; \\ y = e^{-t}; \\ z = t^2; \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1.$$

33.2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по просторовій кривій L, що задана параметрично

$$\int_L \frac{yz}{x} dx + e^y dy + \sin z dz; \qquad L: \begin{cases} x = t^3; \\ y = t; \\ z = t^2; \end{cases} \qquad 2 \le t \le 3.$$

33.3. Обчислити $\int_L \cos x dx + e^{-y} dy + z^2 dz$, де L - відрізок прямої від точки $(-1,2,4)$ до точки $(6,0,-2)$.

33.4. Обчислити $\int_L (x^2 - y^2)dx + (x^2 + 2y^2)dy$, де L – частина кола $x^2 + y^2 = 9$ від точки $A(0,-3)$ до точки $B(3,0)$.

33.5. Обчислити $\int_L 2xyz^3 dx + (x^2 z^2 + 2y)dy + 3x^2 yz^2 dz$, де L – відрізок прямої від точки $(0,0,0)$ до точки $(1,2,3)$.

33.6. Знайти роботу сили $\bar{F} = (2xy + y)\bar{i} + (x^2 + xy)\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y = 4 - 2x^2$ від точки $A(\sqrt{2},0)$ до точки $B(-\sqrt{2},0)$.

33.7. Знайти роботу сили $\overline{F} = 2y\bar{i} - 3x\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ від точки $A(-2,0)$ до точки $B(0,2)$.

33.8. Знайти роботу сили $\overline{F} = 4xy\bar{i} + 2y\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y = \sin x$ від точки $A(\pi,0)$ до точки $B(0,0)$.

33.9. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (x+y)dx - (x-y)dy$ по еліпсу $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, застосовуючи формулу Гріна.

33.10. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (xy + x + y)dx - (xy + x - y)dy$ по колу $L: x^2 + y^2 = 2x$, застосовуючи формулу Гріна.

33.11. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L 2(x^2 + y^2)dx + (x+y)^2 dy$, де L – контур трикутника з вершинами в точках $A(1,1); B(2,2); C(1,3)$, застосовуючи формулу Гріна.

33.12. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L y^2 dx - x^2 dy$ по колу $L: x^2 + y^2 = 2y$, застосовуючи формулу Гріна.

33.13. Знайти роботу сили $\overline{F} = 2y\bar{i} - (x^3 + 2x^2)\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y = \ln x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

33.14. Знайти роботу сили $\overline{F} = e^{y-x}\bar{i} - e^{x-y}\bar{j}$ при переміщенні вздовж прямої від точки $A(1,1)$ до точки $B(3,2)$.

33.15. Знайти роботу сили $\overline{F} = (x + \sqrt{2y})\bar{i} - (y + 2x)\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y = \frac{x^2}{2}$ від точки $A(2,2)$ до точки $B\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

33.16. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} yxdx + \frac{x^2 - y^2}{2}dy$ не залежить від шляху і обчислити його.

33.17. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)} -(x-y)dx + (x-y)dy$ не залежить від шляху і обчислити його.

33.18. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ не залежить від шляху і обчислити його.

33.19. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(2,4)}\left(x^2+y^2\right)xdx-\left(x^2+y^2\right)ydy$ не залежить від шляху і обчислити його.

33.20. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(-1,1)}^{(2,2)}\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$ не залежить від шляху і обчислити його. (Шлях інтегрування не проходить через початок координат.)

Поверхневі інтеграли першого роду.

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна на гладкій поверхні σ, що задається рівнянням $z=z(x,y)$ і однозначно проектується на площину OXY в область D_{XY}, то поверхневий інтеграл першого роду можна обчислити за формулою

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{D_{XY}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Справедливі аналогічні формули у випадку, коли поверхня σ однозначно проектується на площину OYZ чи OXZ.

Площу S поверхні σ можна знайти таким чином:

$$S=\iint\limits_{\sigma} d\sigma=\iint\limits_{D_{XY}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Випадок параметричного задання поверхні

Якщо σ- кусочно-гладенька двостороння поверхня , задана параметрично

$$\sigma:\begin{cases} x=x(u,v); \\ y=y(u,v); \quad (u,v)\in\Omega, \\ z=z(u,v); \end{cases}$$

$f(x,y,z)$ - функція, неперервна в точках поверхні σ, то

$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma=\iint\limits_{\Omega} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$, де

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Відповідно площа S поверхні σ знаходиться так: $S = \iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$

Завдання 34.

34.1. Обчислити $\iint\limits_S (x^2 + z)d\sigma$, де S - частина поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad z \geq 0.$

34.2. Обчислити $\iint\limits_S (6x + 4y + 3z)d\sigma$, де S - частина площини $x + y + 2z = 1$, що лежить в першому октанті.

34.3. Обчислити $\iint\limits_S y d\sigma$, де S - частина поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що лежить в першому октанті.

34.4. Обчислити $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{(1 + x + z)^3}$, де S - частина площини $x + y + z = 1$, що лежить в першому октанті.

34.5. Обчислити $\iint\limits_S x^2 d\sigma$, де S - бічна поверхня конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 0 \leq z \leq 2.$

34.6. Знайти площу частини поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, розташованої всередині циліндра $2y = x^2 + y^2.$

34.7. Знайти площу частини поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вирізаної з неї поверхнею $2x = x^2 + y^2.$

34.8. Обчислити $\iint\limits_S (x^2 + y^2)d\sigma$ де S - частина поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 0 \leq z \leq 1.$

34.9. Знайти площу частини площини $z = 4 + 2x + 3y$, вирізаної з неї поверхнями $x^2 + y^2 = 4; \quad y = 0; \quad y = 2x$ (I октант).

34.10. Обчислити $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{x^2 + y^2 + z^2}$ де S - частина циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, обмежена площинами $z = 0$ і $z = h.$

34.11. Обчислити $\iint\limits_S x^2 yz d\sigma$, де S - частина площини $x + y + z = 1$, розташована в першому октанті.

34.12. Знайти площу поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, z = 3.$

34.13. Обчислити $\iint\limits_S y d\sigma$, де S - півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

34.14. Обчислити площу поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z = x, x + y = 1, y = 0, x = 0$.

34.15. Знайти площу частини параболічного циліндру $y^2 = 6x$, що задовольняє умовам $0 \le z \le 2; 0 \le x \le 2$. (Спроектувати поверхню на площину OYZ.)

34.16. Обчислити $\iint\limits_S y d\sigma$, де S - частина параболічного циліндру $y^2 = 6x$, що задовольняє умовам $0 \le z \le 2; 0 \le x \le 2$.

34.17. Обчислити $\iint\limits_S \frac{\partial \sigma}{\sqrt{1 - x^2}}$, де S - частина еліптичного циліндру $x^2 + y^2 = 1$, що задовольняє умовам $-2 \le z \le 2; y \ge 0$.

34.18. Обчислити $\int\limits_S \frac{d\sigma}{(1 + x + y)^2}$, де S - границя тетраедра $x + y + z \le 1; x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0$.

Поверхневі інтеграли другого роду.

Нехай σ - гладенька двостороння поверхня, σ^+ - її сторона, що характеризується напрямком нормалі $\bar{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. На поверхні σ задана і неперервна векторна функція $\bar{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$. Тоді поверхневий інтеграл другого роду так виражається через поверхневий інтеграл першого роду:

$$\iint\limits_{\sigma^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint\limits_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma$$

При переході до поверхні σ^- інтеграл змінює свій знак на обернений.

Якщо поверхня σ задана в параметричному вигляді, то направляючі косінуси нормалі до поверхні визначаються за формулами

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \text{де}$$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Поверхневий інтеграл другого роду можна також звести до суми трьох подвійних. Нехай σ однозначно проектується на координатні площини OXY, OXZ та OYZ відповідно в області D_{XY}, D_{XZ}, D_{YZ}, тобто може бути задана рівнянням $z = z(x, y), y = y(x, z), x = x(y, z)$. Тоді

$$\iint\limits_{\sigma^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm \iint\limits_{D_{YZ}} f(x(y,z), y, z)dydz \pm$$

$$\pm \iint\limits_{D_{XZ}} Q(x, y(x,z), z)dxdz \pm \iint\limits_{D_{XY}} R(x, y, z(x,y))dxdy,$$

де знаки перед подвійним інтегралом беруться відповідно ті самі, що й у $\cos\alpha, \cos\beta$ і $\cos\gamma$ відповідно.

Якщо поверхня задана у вигляді $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$- диференційовна функція, то одна з нормалей до неї може бути знайдена так: $\bar{n} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right\}$.

Фізичний зміст поверхневого інтегралу

Поверхневий інтеграл другого роду також називають **потоком** вектора $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ через поверхню σ. Його можна розглядати як кількість рідини чи газу, що протікає через задану поверхню σ за одиницю часу зі швидкістю $\bar{V}$.

Завдання 35.

35.1. Обчислити $\iint\limits_S (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$, де S - зовнішня сторона бічної поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $0 \le z \le H$.

35.2. Обчислити $\iint\limits_S 2xdydz + ydxdz + zdxdy$, де S - трикутник, утворений перетином площини $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ з координатними площинами (нормаль зовнішня).

35.3. Обчислити $\iint\limits_S xdydz + 5ydxdz + 5zdxdy$, де S - нижня частина площини $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$, розташована в першому октанті.

35.4. Обчислити $\iint\limits_S zdxdy$, де S - верхня сторона поверхні $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; $0 \le z \le 1$, що лежить у першому октанті.

35.5. Обчислити $\iint\limits_S xdydz$, де S - верхня сторона поверхні півсфери $x^2+y^2+z^2=a^2 \quad (z\geq 0)$.

35.6. Обчислити $\iint\limits_S xdydz+4ydxdz+5zdxdy$, де S - верхня сторона поверхні $x+2y+\frac{z}{2}=1$, що лежить у першому октанті.

35.7. Обчислити $\iint\limits_S z^2dxdy$, де S - верхня частина поверхні параболоїда $z=\frac{H}{R^2}\left(x^2+y^2\right); \quad z\leq H$.

35.8. Знайти потік векторного поля $\overline{F}=\{2z-x, x-y, 3x+z\}$ через замкнену поверхню $S: x+y+2z=2; x=0; y=0; z=0$.

35.9. Обчислити $\iint\limits_S xydxdy$, де S - нижня сторона трикутника $x+2y+z=1; \quad x=0; \quad y=0; \quad z=0$.

35.10. Обчислити $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+(z-2)dxdy$, де S - нижня частина поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що вирізається площиною $z=1$.

35.11. Обчислити $\iint\limits_S xz^2dxdy$, де S - зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=1$, розміщеної в першому октанті.

№ 35.12-35.17: знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

35.12. $\vec{a}=(x+xy)\vec{i}+(y-yx)\vec{j}+(z-1)\vec{k} \quad S: z=\sqrt{x^2+y^2} \quad P: z=2$.

35.13. $\vec{a}=xy\vec{i}-3x^2\vec{j}+4\vec{k} \quad S: z=-\sqrt{x^2+y^2} \quad P: z=-1$.

35.14. $\vec{a}=2xyz\vec{i}-x^2z\vec{j}+2\vec{k} \quad S: z=\sqrt{4-x^2-y^2} \quad P: z=0$.

35.15. $\vec{a}=(x+yz)\vec{i}+y\vec{j}+(z-xy)\vec{k} \quad S: z=-2\sqrt{x^2+y^2} \quad P: z=-2$.

35.16. Обчислити $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Формули Стокса і Остроградського. Елементи векторного поля.

Нехай $u(x,y,z)$ є функція, неперервно – диференційовна в розглядуваній області. Градієнт функції $u(x,y,z)$ позначатимемо $\nabla u = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{\mathrm{k}}$, де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{\mathrm{k}}$ („набла").

Нехай $\bar{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\bar{i} + Q(x,y,z)\bar{j} + R(x,y,z)\bar{k}$ - неперервно – диференційовне векторне поле.

Дивергенцією векторного поля $\bar{F}$ називається вираз $\operatorname{div}\bar{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\bar{F}, \nabla)$.

Ротором векторного поля називається вектор

$$\operatorname{rot}\bar{F} = [\nabla, \bar{F}] = \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Векторне поле $\bar{F}$ є потенціальним, якщо $rot\bar{F} = 0$. Векторне поле $\bar{F}$ є соленоїдним, якщо $div\bar{F} = 0$.

Формула Остроградського

Якщо замкнена поверхня S є кусково-гладенькою і обмежує об'єм V, $\vec{n}$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до S, $\bar{F}$ - неперервно – диференційовне векторне поле в області V і на поверхні S, то має місце формула, що пов'язує поверхневий інтеграл другого роду і потрійний інтеграл.

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_V \operatorname{div}\bar{F}dxdydz$$

Формула Стокса

Якщо замкнена крива L, що обмежує поверхню S, обходиться в додатньому напрямку, а векторне поле $\bar{F}$ - неперервно-диференційовне, то має місце формула Стокса, яка пов'язує криволінійний інтеграл по замкненому контуру і поверхневий інтеграл другого роду:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{F} \cdot \bar{n})dS = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

де $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S. векторне поле

Завдання 36.

№ 36.1-36.8: за допомогою формули Остроградського перетворити поверхневі інтеграли по замкненій поверхні у потрійні і обчислити їх.

36.1. $\iint\limits_S xzdydz + xydxdz + yzdxdy$, де S - зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + 2y + 4z = 12$.

36.2. $\iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy$, де S - зовнішня сторона поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2};\quad 0 \le z \le H$.

36.3. $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, де S - зовнішня поверхня кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

36.4. $\iint\limits_S (z^n - y^n)dydz + (x^n - z^n)dxdz + (y^n - x^n)dxdy$, де S - зовнішня поверхня кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

36.5. Знайти потік вектора $\bar{a} = 2x\bar{i} - y\bar{j}$ через циліндричну поверхню $x^2 + y^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, 0 \le H \le z$ у напрямку зовнішньої нормалі.

36.6. Знайти потік вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + x\bar{j} + xz\bar{k}$ через поверхню тіла, обмеженого параболоїдом $y = x^2 + z^2$ і площинами $x = 0, y = 1, z = 0$, орієнтовану в напрямку зовнішньої нормалі.

36.7. Знайти потік вектора $\bar{a} = y\bar{i} + z^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через усю поверхню тіла $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$, орієнтовану в напрямку зовнішньої нормалі.

36.8. Функція $u = u(x, y, z)$, для якої виконується $\Delta u = 0$, називається *гармонічною.* Довести, що для гармонічної функції трьох змінних виконується

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x}dydz + \frac{\partial u}{\partial y}dzdx + \frac{\partial u}{\partial x}dxdy = 0,$$

де S - деяка замкнена гладенька поверхня.

№ 36.9-36.18: за допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{F}$ вздовж замкненого контуру L.

36.9. $\bar{F} = xy\bar{i} + x\bar{j} + y^2\bar{k};\quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ z = y. \end{cases}$

36.10. $\bar{F} = x\bar{i} + z^2\bar{j} + y\bar{k};\quad L: \begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1; \\ z = 2x - y - 1. \end{cases}$

36.11. $\overline{F} = 7x\bar{i} - x\bar{j} + yz\bar{k}; \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 6; \\ z = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

36.12.

$\overline{F} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}; \quad L: \begin{cases} x + y + z = 1; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$

36.13. $\overline{F} = (x^2 - yz)\bar{i} + (y^2 - xz)\bar{j} + (z^2 - xy)\bar{k}; \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

36.14. $\overline{F} = (y + xz)\vec{i} + 2x\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}; \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3. \end{cases}$

36.15. $\overline{F} = (y - \sin z)\vec{i} + (2x - y^2)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}; \quad L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$

36.16. За допомогою формули Стокса обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$, де L - еліпс, заданий параметрично: $x = a\sin^2 t,\ y = 2a\sin t\cos t, \quad z = a\cos^2 t,\ 0 \le t \le \pi$.

№ 36.17,36.18: перевірити потенціальність векторного поля $\overline{F}$ та знайти його потенціал.

36.17. $\overline{F} = \{2xy + z, x^2 + z, x + y\}$.

36.18. $\overline{F} = \left\{\dfrac{2x}{x^2 + z^2}, 2z, \dfrac{2z}{x^2 + y^2} + 2y\right\}$.

12. Відомості з елементарної математики

Арифметична прогресія:

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \ldots, a_n = a_1 + (n-1)d,$$

d – різниці арифметичної прогресії.

Формула n–го члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Формула суми n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Характеристична властивість арифметичної прогресії:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрична прогресія:

$$b_1, b_2 = b_1 q, b_3 = b_1 q^2, \ldots, b_n = b_1 q^{n-1},$$

q – знаменник геометричної прогресії.

Формула n–го члена геометричної прогресії:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суми n перших членів геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Формула суми нескінченої кількості членів геометричної прогресії:

$$S_\infty = \frac{b_1}{1-q}, |q| < 1.$$

Характеристична властивість геометричної прогресії:

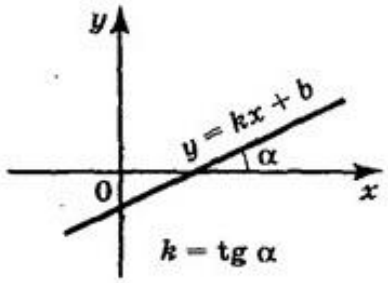
$$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}.$$

Формули скороченого множення:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots b^{n-2}a + b^{n-1}).$$

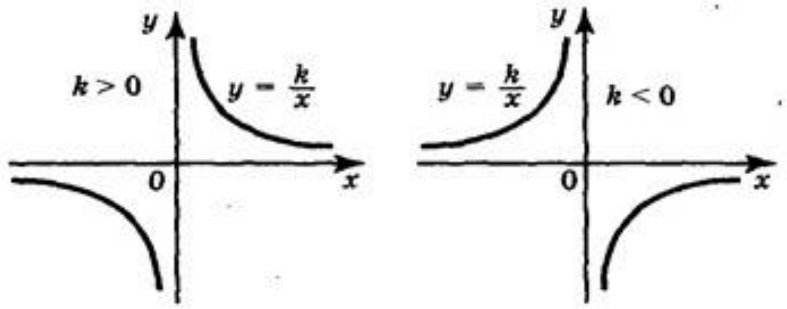
Графіки елементарних функцій

Лінійна функція: $y = kx + b$



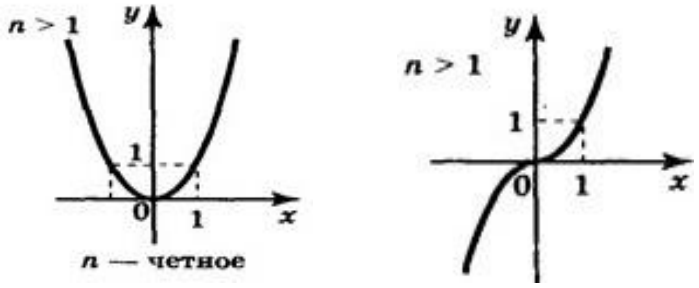
Функція $y = kx + b$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Вона зростає при $k > 0$, спадає – при $k < 0$. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція оберненої пропорційності: $y = \dfrac{k}{x}$



Функція $y=\frac{k}{x}$ визначена на $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Вона спадає при $k>0$, зростає – при $k<0$ на $(-\infty;0)$ та $(0;\infty)$. Ця функція є непарною. Функція є неперервною на множині визначення, має розрив в точці 0.

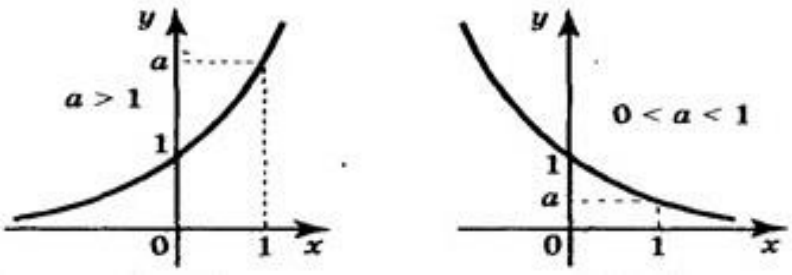
Степенева функція: $y=x^k, k\in\square$



Функція $y=x^{2n}, n\in\square$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $[0;\infty)$. Вона зростає при $x>0$, спадає – при $x<0$. Ця функція є парною $(-x)^{2n}=x^{2n}$. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція $y=x^{2n-1}, n\in\square$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Вона зростає при всіх x. Ця функція є непарною $(-x)^{2n-1}=-x^{2n-1}$. Функція є неперервною на множині визначення.

Показникова функція: $y=a^x$



Функція $y=a^x$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $(0;\infty)$. Ця функція зростає при $a>1$, спадає – при $0<a<1$. Функція є неперервною на множині визначення.

Властивості степенів:

1. $a^0 = 1.$ 2. $a^1 = 1.$

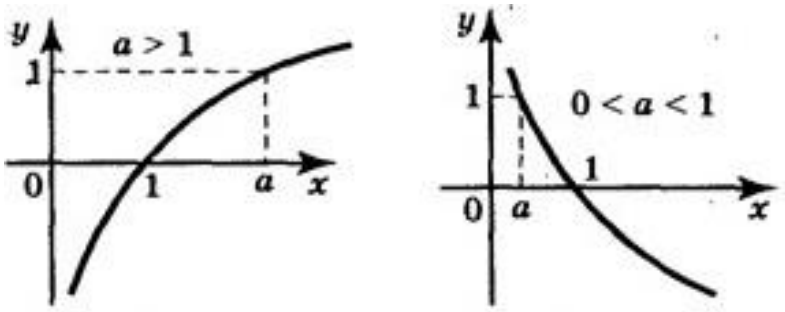
3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$ 4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$

5. $\left(a^n\right)^m = a^{nm}.$ 6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$

7. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$ 8. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$

Означення логарифма: $b = a^{\log_a b}, b > 0, a > 0, a \neq 1.$

Логарифмічна функція: $y = \log_a x$



Функція $y = \log_a x, x > 0$ визначена на $(0;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Ця функція зростає при $a > 1$, спадає при $0 < a < 1$. Функція є неперервною на множині визначення.

Зауважимо, що логарифмічна функція $y = \log_a x$ є оберненою до степеневої функції $y = a^x$, тобто мають місце наступні тотожності $a^{\log_a x} = x, \quad \log_a(a^x) = x, \quad x > 0$ при допустимих значеннях a.

Властивості логарифмів при $b > 0, a > 0, a \neq 1$:

1. $\log_a 1 = 0.$ 2. $\log_a a = 1.$

3. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc).$ 4. $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}.$.

5. $\log_a b^n = n \log_a b.$ 6. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b.$

7. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$ 8. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

Рівняння

1. $x^2 = a,\ a > 0$
   $x = \pm\sqrt{a}.$

2. $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$
   якщо $D = b^2 - 4ac \geq 0 : x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$

3. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$
   якщо $D = b^2 - 4ac \geq 0.$

4. $\sqrt{x} = a,\ a > 0$
   $x = a^2.$

5. $a^x = b,\ b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
   $x = \log_a b.$

6. $x^n = a,\ a > 0$
   $x = \sqrt[n]{a}.$

7. $|x| = a,\ a > 0$
   $x = \pm a.$

Нерівності

1. $\lvert x\rvert \geq a,\ a > 0$ $x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty).$	$\lvert x\rvert < a,\ a > 0$ $x \in (-a; a).$
2. $a^x \leq b,\ b > 0,\ a > 1$ $x \leq \log_a b.$	$a^x > b,\ b > 0,\ 0 < a < 1$ $x < \log_a b.$
3. $\log_a x \geq \log_a y,\ a > 1$ $x \geq y > 0.$	$\log_a x < \log_a y,\ 0 < a < 1$ $x > y > 0.$

4. $a^x \geq a^y$, $a > 1$ $\quad$ $a^x < a^y$, $0 < a < 1$

$x \geq y$; $\quad$ $x > y$.

Метод інтервалів

Розв'язуючи нерівність $(x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{\alpha_n} \wedge 0$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, розставимо числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на числовій прямій. Ці числа розбивають дійсну вісь на $n+1$ інтервали, на кожному з яких вираз у лівій частині нерівності зберігає знак. Підставляючи по одному значенню з кожного інтервалу, визначаємо числа з яких інтервалів задовольняють даній нерівності.

Розв'язуючи нерівність $\frac{P(x)}{Q(x)} \wedge 0$, де $P(x), Q(x)$ – многочлени, заміняємо на еквівалентну $P(x)Q(x) \wedge 0$, знаходимо всі дійсні корені многочленів $P(x)$, $Q(x)$ і впорядкуємо їх за зростанням $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Розставимо знайдені корені на числовій осі. Ці числа розбивають дійсну вісь на $n+1$ інтервали, на кожному з яких дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ зберігає знак. Підставляючи по одному значенню з кожного інтервалу, визначаємо, числа з яких інтервалів задовольняють даній нерівності.

Теорема Безу

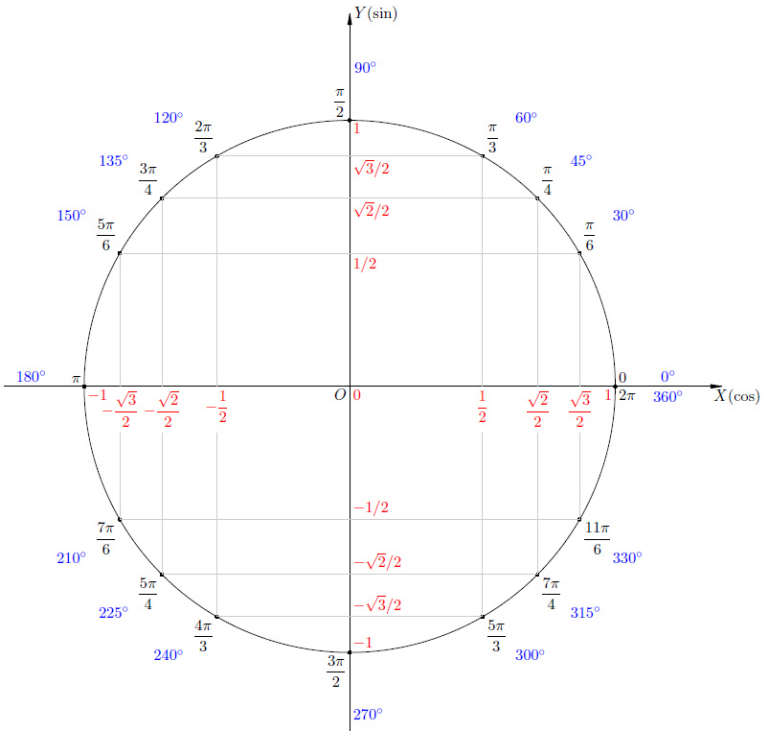
Теорема. Залишок від ділення $P(x)$ на лінійний двучлен $x-a$ дорівнює значенню многочленна в точці a , числу $P(a)$.

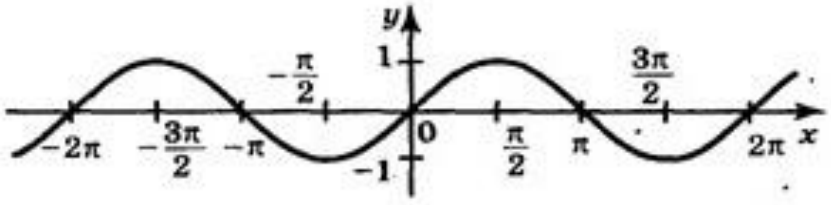
Наслідок. Для того щоб многочлен $P(x)$ ділився націло на лінійний двучлен $x-a$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $P(a)=0$, тобто щоб число a було коренем многочленна $P(x)$. Тобто, розв'язуючи рівняння $P(x)=0$, знаходимо корінь многочлена $P(x)$ – число a. Теорема Безу стверджує, що многочлен $P(x)$ ділиться на $x-a$. Тому вихідне рівняння переписується у вигляді $(x-a)Q(x)=0$. Таким чином понижується степінь многочлена, корені якого потрібно знайти.

Наприклад, рівняння $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ переписується у вигляді $(x+1)(x^2-4)=0$, корені якого $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 2.$

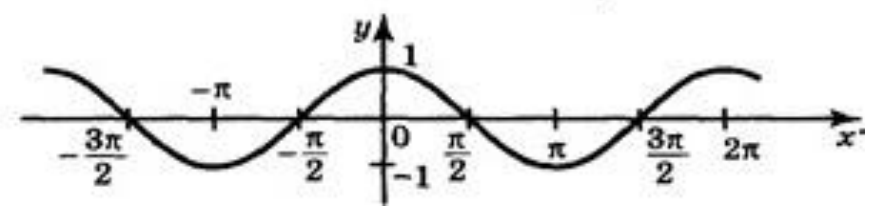
Тригонометрія

Поняття $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ для всіх дійсних x визначаються за допомогою одиничного кола. Нехай одиничний радіус пересунувся на кут x проти руху годинникової стрілки (за рухом – у випадку від'ємного значення x), тоді $\sin x$ – проекція відповідної точки одиничного кола на вісь OY, $\cos x$ – проекція відповідної точки одиничного кола на вісь OX, $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}, ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

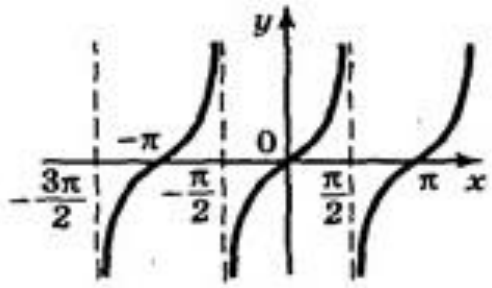


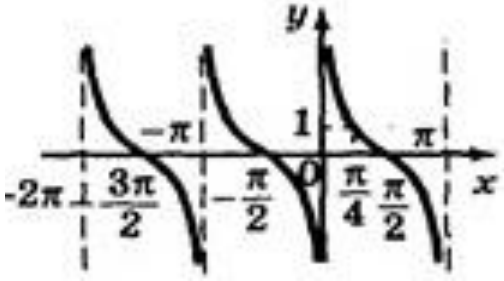


Функція $y = \sin x$ визначена на $(-\infty; \infty)$, множиною значень є $[-1;1]$. Ця функція є непарною $(\sin(-x) = -\sin x)$, періодичною з періодом $T = 2\pi$. Функція є неперервною на множині визначення.



Функція $y = \cos x$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $[-1;1]$. Ця функція є парною $(\cos(-x) = \cos x)$, періодичною з періодом $T = 2\pi$. Функція є неперервною на множині визначення.





Функція $y = tgx$ визначена на інтервалах $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Ця функція є непарною $(tg(-x) = -tgx)$, періодичною з періодом $T = \pi$. Функція є неперервною на кожному з інтервалів $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$.

Функція $y = ctgx$ визначена на інтервалах $(\pi k; \pi + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Ця функція є непарною $(ctg(-x) = -ctgx)$, періодичною з періодом $T = \pi$. Функція є неперервною на кожному з інтервалів $(\pi k; \pi + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$.

Формули зведення

Розглянемо співвідношення, за допомогою яких значення тригонометричних функцій аргументів $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ **в**иражаються через значення $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

Формули зведення описуються наступними правилами:

1) якщо у формулах містяться кути π і 2π, то найменування функції не змінюється; якщо ж у формулах містяться кути $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$, тоді функція змінюється на ко-функцію (синус – на косинус, тангенс – на котангенс і навпаки);

2) щоб визначити знак у правій частині формули («+» або « –») досить, вважаючи кут α гострим, визначити знак вихідної функції кута вихідного

аргументу $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \quad \pi \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$. Одержаний знак ставлять перед ко-функцією кута α у рівності.

Приклад. $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha, \ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha.$

Основні тригонометричні тотожності:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \ tgx \cdot ctgx = 1.$

1. $\sin(-x) = -\sin x; \ \cos(-x) = \cos x;$
   $tg(-x) = -tgx; \ ctg(-x) = -ctgx.$

2. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x; \ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x;$
   $tg(\frac{\pi}{2} - x) = ctgx; \ ctg(\frac{\pi}{2} - x) = tgx.$

3. $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x; \ \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x;$
   $tg(\frac{\pi}{2} + x) = -ctgx; \ ctg(\frac{\pi}{2} + x) = -tgx.$

4. $\sin(\pi - x) = \sin x; \ \cos(\pi - x) = -\cos x;$
   $tg(\pi - x) = -tgx; \ ctg(\pi - x) = -ctgx.$

5. $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x; \ \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x;$
   $tg(\frac{3\pi}{2} - x) = ctgx; \ ctg(\frac{3\pi}{2} - x) = tgx.$

6. $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x; \ \cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x;$
   $tg(\frac{3\pi}{2} + x) = -ctgx; \ ctg(\frac{3\pi}{2} + x) = tgx.$

7. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

8. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$

9. $tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta};$

$ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{ctg\alpha ctg\beta\mp 1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}.$

10. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$

11. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$
$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}.$

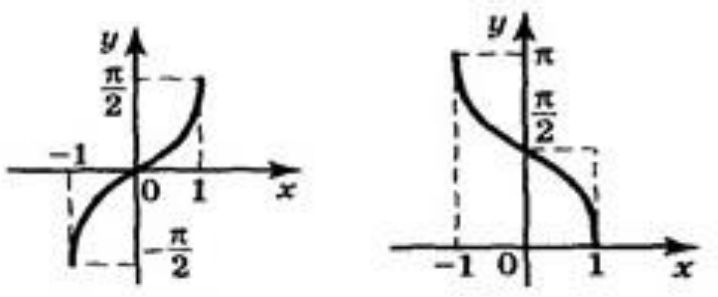
12. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2};$
$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

13. $tg\alpha+tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$
$tg\alpha-tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

14. $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right];$
$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right];$
$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right].$

Обернені тригонометричні функції

$y=\arcsin x$ $\qquad$ $y=\arccos x$

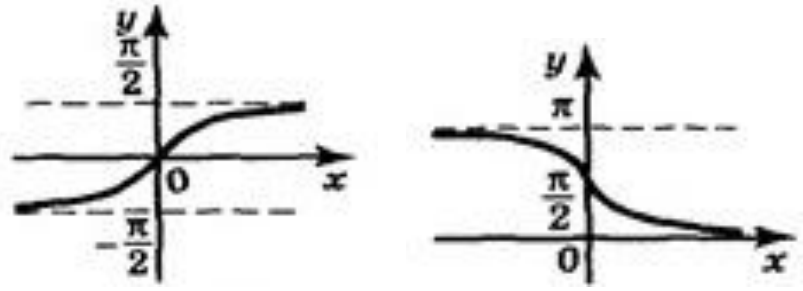


Функція $y = \arcsin x,$ визначена на $[-1;1]$, множиною значень якої є $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ – обернена до функції $y = \sin x,$ тобто мають місце рівності: $\arcsin(\sin x) = x,\ x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}];\quad \sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1;1].$ Ця функція є непарною $(\arcsin(-x) = -\arcsin x),$ не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція $y = \arccos x,$ визначена на $[-1;1]$, множиною значень якої є $[0;\pi]$ – обернена до функції $y = \cos x,$ тобто мають місце рівності:

$\arccos(\cos x) = x,\ x \in [0;\pi];\quad \cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1;1].$ Ця функція не є ні парною, ні непарною $(\arccos(-x) = \pi - \arccos x),$ не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

$y = \operatorname{arc}tgx$ $y = \operatorname{arc}ctgx$



Функція $y = \operatorname{arc}tgx,$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень якої є $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ – обернена до функції $y = tgx,$ тобто мають місце рівності: $arctg(tgx) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);\quad tg(arctgx) = x,\ x \in (-\infty;\infty).$ Ця функція є непарною $(arctg(-x) = -arctgx),$ не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція $y = \operatorname{arc}ctgx,$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень якої є $(0;\pi)$ – обернена до функції $y = tgx,$ тобто мають місце рівності: $arcctg(ctgx) = x,\ x \in (0;\pi);\quad ctg(arcctgx) = x,\ x \in (-\infty;\infty)$. Ця функція не є ні парною, ні непарною ($arcctg(-x) = \pi - arcctgx$), не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

Тригонометричні рівняння

1. $\sin x = a,\ -1 \le a \le 1$
   $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

2. $\cos x = a,\ -1 \le a \le 1$
   $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

3. $tgx = a,\ a \in \mathbb{R}$
   $x = \operatorname{arc}tga + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

4. $ctgx = a,\ a \in \mathbb{R}$
   $x = arcctga + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Окремо наведемо розв'язки деяких стандартних тригонометричних рівнянь:

5. $\sin x = 1$
   $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$
6. $\sin x = -1$
   $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$
7. $\sin x = 0$
   $x = \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$
8. $\cos x = 1$
   $x = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$
9. $\cos x = -1$
   $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$
10. $\cos x = 0$
    $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$

Література

1.Берман Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа. – М., 1977.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник. – М., 1987.

3.Гаврильченко Х.И., Кривой А.Ф., Кропивянский П.С. и др. Высшая математика: сборник задач. – К., 1991.

4.Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Т.2. – Л., 1949.

5.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1973.

6.Дубовик В.П., Юрик І.І, Вовкодав І.П. та ін. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник. – К., 2004.

7.Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т.1,2 – М., 2001.

8.Пискунов Н.Е. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1,2. - М., 1972.

9.Барановская Г.Г., Иванова О.А., Коханенко Н.В., Карпович Л.Г., Бакун В.В., Нефедова Г.Г. Методические указания к изучению разделов «Дифференциальные уравнения» и «Ряды» высшей математики. – К., КПИ, 1992.

10.Єфіменко С.В., Кривошея С.А. Контрольні завдання з математичного аналізу. – К.: „Київський університет”, 2002.

11.Єфіменко С.В., Кривошея С.А., Придатченко Ю.В., Янішевський А.Т. Комплексні числа. – К.: „Київський університет”, 1997.

12.Єфіменко С.В., Сугакова О.В., Індивідуальні завдання з математичного аналізу для самостійної роботи. – К.: „Київський університет”, 2006.

13.Клепко В.Ю. Методичні вказівки до вивчення розділу „Функції багатьох змінних”. – К.:ЕКОМЕН, 1998.

14.Фесенко А.Г., Польща Г.С., Отрубянникова Л.В., Клепко В.Е., Андрющенко Е.И., Роженко Н.А. Задания для типовых расчетов по высшей математике. – К.:КТИЛП, 1983.

Зміст

1.Комплексні числа……..…2
2.Границі……4
3.Похідні та їх застосування……7
4.Невизначений інтеграл……14
5.Визначений інтеграл……18
6.Функції багатьох змінних……25
7.Числові ряди ……31
8.Функціональні ряди …… 32
9.Невласні інтеграли ……..42
10.Кратні інтеграли……..43
11.Векторний аналіз……44
12.Відомості з елементарної математики……..……56
13.Література ……...69