КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Т.М. Жеребко

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНИХ РОБІТ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Київ-2016

УДК 517.2

Рецензент: доц., канд.фіз.-мат. наук Єфіменко С. В.

Жеребко Т.М. Завдання для самостійних робіт з математичного аналізу: Методичний посібник для студентів кафедри «Радіотехніки та радіоелектронних систем» факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем./Жеребко Т.М. К.: КНУ--2016, 107ст.

Посібник можна використовувати як задачник при вивченні курсу „Вища математика" студентами кафедри «Радіотехніки та радіоелектронних систем» факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем. Він містить задачі та приклади розв'язань задач з математичного аналізу для самостійного розв'язування. На початку розділів наведені теоретичні відомості, необхідні для виконання завдань. Останній розділ містить основні відомості з курсу елементарної математики.

Затверджено
Вченою Радою факультету радіофізики,
електроніки та комп'ютерних систем.
Протокол № 1 від 29 вересня 2016 року

Самостійна робота 1.
1.Комплексні числа

Комплексне число – це впорядкована пара дійсних чисел $z=(x,y)$ або вираз вигляду $z=x+i\cdot y$, де $i=\sqrt{-1}$- **уявна одиниця**. $x=\operatorname{Re} z$ називають **дійсною частиною** комплексного числа (realis - дійсний), $y=\operatorname{Im} z$ називають **уявною частиною** (imaginarius - уявний).

Алгебраїчна форма комплексного числа: $z=x+i\cdot y$.

Тригонометрична форма комплексного числа: $\boxed{z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$,

де $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$- ***модуль*** комплексного числа;

$Arg\, z=\arg z+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ - його ***аргумент*** – визначений з точністю до довільного доданку, кратного 2π. Значення $\arg z$: $-\frac{\pi}{2}<\arg z\leq\frac{3\pi}{2}$ називається *головним значенням аргументу* .

$$\arg z=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} & при \quad x>0; \\ arctg\dfrac{y}{x}+\pi & при \quad x<0; \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y & при \quad x=0. \end{cases}$$

Показникова форма комплексного числа:

$z=re^{\boxed{i\varphi}}$.

Для обчислення аргументу випишемо значення арктангенса:

$$arctg\,0=0;\ arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6};\ arctg\,1=\frac{\pi}{4};\ arctg\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}.$$

Операції над комплексними числами

Нехай

$$z_1=x_1+iy_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1);\quad z_2=x_2+iy_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

Додавання.

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Різниця.

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Добуток.

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)=$$

$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))=r_1r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Частка.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Піднесення до степеня. Формула Муавра.

$$\left(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r^n\,e^{in\varphi}.$$

Здобуття кореня.

Корінь комплексного числа є багатозначною функцією, а саме, який порядок кореня, стільки значень ми отримаємо.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},$$

$$k=0,1,\ldots,n-1;\quad n\in N.$$

Показникова функція.

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

$$e^{\pi i}=-1,\ e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2};\quad \left(e^{z_1}\right)^{z_2}=e^{z_1\cdot z_2};\quad e^{z+2k\pi i}=e^z.$$

Формули Ейлера.

$$\boxed{\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\qquad \sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}}$$

Завдання 1.

Виконати дії:

1. 1. $\left(2-i\right)\left(2+i\right)^2-\frac{3-2i}{i}$. **1.2.** $\frac{\left(1+i\right)^3}{1-i}$. **1.3.** $\frac{\left(1-2i\right)^2\left(3-2i\right)}{i}$.

1.4. $\frac{\left(1-i\right)^3}{1+i}$ **.1.5.** $\frac{2\left(3-5i\right)^2}{1-3i}$. **1.6.** $\frac{\left(2+4i\right)^3}{-3+5i}$ **. 1.7.** $\frac{1}{\left(3+2i\right)^2}+\frac{1}{\left(3-2i\right)^2}$.

1.8 $\frac{\left(2-3i\right)^3}{1-3i}$**. 1.9** $\left(1-2i\right)\left(2+i\right)^3-\frac{4}{i}$**. 1.10** $\left(\frac{3}{i}-i\right)\left(1-3i^5\right)^3$.

1.11. $\frac{\left(2+i\right)^2}{2-i}-\frac{3+2i}{i}$. **1.12.** $\frac{\left(1-i\right)^3 i}{1+i^{211}}$ **. 1.13.** $\frac{\left(1+2i\right)^2}{i^{215}\left(3-2i\right)}$.

1.14. $\frac{\left(-1+i\right)^5}{1+i^{2016}}$**. 1.15.** $\frac{\left(1+2i\right)\left(3-5i\right)^2}{1-3i}$**. 1.16.** $\frac{\left(-2+3i\right)^3}{3+5i}$.

1.17. $\dfrac{1}{(1+2i)^2}-\dfrac{1}{(1-2i)^2}$. **1.18** $\dfrac{(1+3i)^3}{2i^{2014}-3i}$. **1.19** $\left(1-\dfrac{2}{i}\right)(2+i)^3+\dfrac{4}{i}$.

1.20. $\left(\dfrac{3}{i^5}-i\right)\left(1-3i^5\right)^2$.

Завдання 2. Представити наступні комплексні числа у тригонометричній і показниковій формах.

2.1. -3. **2.2.** $-i$. **2.3.** $1+i$. **2.4.** $-1+i\sqrt{3}$.

2.5. $2-5i$. **2.6.** $-2+2\sqrt{3i}$. **2.7.** $-\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

2.8 $\sqrt{3}-i$. **2.9** $-3-\sqrt{3}i$. **2.10** $-5-2i$. **2.11.** $\sqrt{7}$. **2.12.** $\dfrac{\pi}{16}i$.

2.13. $4-4i$. **2.14.** $-2-i2\sqrt{3}$. **2.15.** $-3-4i$. **2.16.** $-2+\sqrt{12i}$.

2.17. $-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$. **2.18.** $-3+\sqrt{3}i$. **2.19.** $1+\sqrt{3}i$. **2.20**. $-2+5i$.

Завдання 3. Обчислити z_1z_2 та $\dfrac{z_1}{z_2}$, z_1^{315}, якщо

3.1. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3.2. $z_1=4\left(\cos\dfrac{3\pi}{5}+i\sin\dfrac{3\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3.3 $z_1=3\left(\cos\dfrac{4\pi}{7}+i\sin\dfrac{4\pi}{7}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{3\pi}{7}+i\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$.

3.4. $z_1=4\left(\cos\dfrac{5\pi}{12}+i\sin\dfrac{5\pi}{12}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3.5. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{15}+i\sin\dfrac{2\pi}{15}\right)$.

3.6. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}\right)$.

3.7. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{5}+i\sin\dfrac{4\pi}{5}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{3\pi}{7}+i\sin\dfrac{3\pi}{7}\right)$.

3.8. $z_1=4\left(\cos\dfrac{4\pi}{9}+i\sin\dfrac{4\pi}{9}\right)$; $z_2=6\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

3.9. $z_1 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.10. $z_1 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$.

3.11. $z_1 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.12. $z_1 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.13 $z_1 = 2\left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\frac{4\pi}{7}\right)$; $z_2 = 8\left(\cos\frac{11\pi}{7} + i\sin\frac{11\pi}{7}\right)$.

3.14. $z_1 = 3\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$; $z_2 = 12\left(\cos\frac{22\pi}{3} + i\sin\frac{22\pi}{3}\right)$.

3.15. $z_1 = 14\left(\cos\frac{14\pi}{5} + i\sin\frac{14\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{12\pi}{15} + i\sin\frac{12\pi}{15}\right)$.

3.16. $z_1 = 4\left(\cos\frac{24\pi}{5} + i\sin\frac{24\pi}{5}\right)$; $z_2 = 16\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right)$.

3.17. $z_1 = 5\left(\cos\frac{41\pi}{5} + i\sin\frac{41\pi}{5}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{23\pi}{7} + i\sin\frac{23\pi}{7}\right)$.

3.18. $z_1 = 5\left(\cos\frac{34\pi}{9} + i\sin\frac{34\pi}{9}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

3.19. $z_1 = 7\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right)$; $z_2 = 6\left(\cos\frac{32\pi}{3} + i\sin\frac{32\pi}{3}\right)$.

3.20. $z_1 = 7\left(\cos\frac{24\pi}{5} + i\sin\frac{24\pi}{5}\right)$; $z_2 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$.

Завдання 4. Знайти всі значення коренів:

4.1. $\sqrt[3]{8}$. **4.2.** $\sqrt[3]{i}$. **4.3.** $\sqrt[4]{81}$. **4.4.** $\sqrt[4]{-1}$. **4.5.** $\sqrt[3]{1-i}$

4.6 $\sqrt[4]{-4-4i}$. **4.7** $\sqrt[3]{-4+4i}$. **4.8** $\sqrt[4]{1-\sqrt{3}i}$ **4.9** $\sqrt[3]{-1-i}$ **4.10** $\sqrt[4]{-1+i}$

4.11. $\sqrt[3]{-64}$. **4.12.** $\sqrt[3]{-8i}$. **4.13.** $\sqrt[4]{16}$. **4.14.** $\sqrt[4]{5i}$. **4.15.** $\sqrt[4]{4+4i}$

4.16. $\sqrt[3]{-5-5i}$. **4.17.** $\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}i}$. **4.18.** $\sqrt[4]{-5+5\sqrt{3}i}$ **4.19.** $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$

4.20. $\sqrt[3]{-2\sqrt{3}+2i}$

Завдання 5. Записати як суму sin і cos кратних кутів (використовуючи формули Ейлера):

5.1 $\sin^4\varphi\cos\varphi$. **5.2** $\sin^7\varphi$. **5.3** $\sin^6\varphi$. **5.4** $\sin^5\varphi\cos^2\varphi$.

5.5 $\cos^8\varphi$. **5.6** $\sin^2\varphi\cos^4\varphi$ **5.7** $\cos^5\varphi$ **5.8** $\cos^6\varphi$

5.9 $\sin^4\varphi\cos^2\varphi$ **5.10** $\sin^8\varphi$ **5.11** $\sin^5\varphi\cos\varphi$. **5.12** $\cos^7\varphi$.

5.13 $\cos\varphi\sin^6\varphi$. **5.14** $\sin\varphi\cos^4\varphi$. **5.15** $\sin^8\varphi$. **5.16** $\sin\varphi\cos^5\varphi$

5.17 $\sin^3\varphi\cos^2\varphi$ **5.18** $\sin^6\varphi$ **5.19** $\sin^5\varphi\cos\varphi$ **5.20** $\sin^2\varphi\cos^3\varphi$

Самостійна робота 2.

2.Границі числових функціональних послідовностей.

Властивості границь

Припускаємо надалі, що усі границі існують і скінченні.

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to a}u_1(x)+\lim\limits_{x\to a}u_2(x)+\cdots+\lim\limits_{x\to a}u_n(x).$

2. $\lim\limits_{x\to a}\left(u_1(x)\cdot u_2(x)\times\cdots\times u_n(x)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to a}u_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}u_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim\limits_{x\to a}u_n(x).$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}u(x)}{\lim\limits_{x\to a}v(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a}v(x)\neq 0$.

4. (Теорема про двох міліціонерів.) Якщо значення трьох функцій $u=u(x), z=z(x), v=v(x)$ пов'язані нерівностями $u\le z\le v$, при цьому $u(x)$ і $v(x)$ при $x\to a$ (або $x\to\infty$) прямують до однієї границі b, то і $z=z(x)$ при $x\to a$ ($x\to\infty$) також прямує до границі b.

Символічне правило обчислення границь.

Невизначеними виразами вважаємо наступні вирази:

1) $\infty-\infty$; 2) $\dfrac{\infty}{\infty}$; 3) $\dfrac{0}{0}$; 4) $0\cdot\infty$;

5) 1^∞; 6) 0^0; 7) ∞^0.

Зручно користуватись формулами скороченого множення

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}};\qquad \sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}=\frac{a\pm b}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}.$$

У математичному аналізі *означеними* виразами вважаються такі вирази (тут k - деяка стала; n - натуральне число):

1) $\infty+\infty=\infty$; 2) $k\cdot\infty=\infty$;

3) $\frac{k}{\infty}=0$; 4) $\frac{\infty}{k}=\infty$;

5) $\frac{k}{0}=\begin{cases}+\infty, \textit{якщо } k>0;\\ -\infty, \textit{якщо } k<0.\end{cases}$ 6) $\infty^n=\infty$;

7) $(-\infty)^n=\begin{cases}+\infty, \textit{якщо } n-\textit{парне};\\ -\infty, \textit{якщо } n-\textit{непарне}.\end{cases}$ 8) $\sqrt[n]{\infty}=\infty$.

В цих рівностях вважається, що зліва стоїть деякий вираз під знаком границі. Наприклад, рівність (3) $\frac{k}{\infty}=0$ означає, що маємо границю вигляду $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)\to k$ при $x\to a$, а $g(x)\to\infty$ при $x\to a$ (a може дорівнювати $\pm\infty$). Правило твердить, що в цьому випадку $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

Визначні границі та їх наслідки

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Обчислити

$$\lim_{x\to\infty}\left(a(x)\right)^{b(x)}=\lceil 1^{\infty}\rceil=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\varepsilon(x)\right)^{\frac{1}{\varepsilon(x)}}\right)^{b(x)\varepsilon(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}b(x)\varepsilon(x)},$$

де $\varepsilon(x):=a(x)-1\to 0, x\to\infty$.

О-символіка

Нехай $\varphi(x),\psi(x)$- деякі функції, задані в околі точки x_0. Нехай $\psi(x)\neq 0$ в деякому околі U_{x_0} точки $x_0\,(x\neq x_0)$.

Запис $\varphi(x)=O(\psi(x))$ при $x\to x_0$ означає, що існує константа $C>0$, така, що $|\varphi(x)|\le C|\psi(x)|$ при всіх значеннях x в певному околі точці x_0 (функція φ обмежена зверху функцією ψ з точністю до множника в околі точки x_0).

Запис $\varphi(x)=o(\psi(x))$ при $x\to x_0$ означає, що $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$ (функція φ є функією меншого степеня в порівнянні з функцією ψ в околі точки x_0).

Функції називаються **еквівалентними** ($\varphi(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \psi(x)$) при $x \to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1$.

Можна навести такі приклади нескінченно малих еквівалентних функцій при $x \to 0$:

$\sin x \sim x;$	$1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2};$	$tgx \sim x;$	$\arcsin x \sim x;$
$arctgx \sim x;$	$\ln(1+x) \sim x;$	$e^x - 1 \sim x;$	$(1+x)^a - 1 \sim ax.$

Завдання 1. Обчислити границі числових послідовностей.

1.1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{n^3+3} - \sqrt[3]{n^3-1}\right)$.

1.2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{2+27n^3} - 3n\right)$.

1.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt[3]{n^3-4}\right)\cdot n\sqrt{n}$.

1.4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+6} - n\right)$.

1.5. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2}\right)$.

1.6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5-6} - n\sqrt{n(n^2+4)}}{\sqrt{n}}$.

1.7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt[3]{n^3-3}\right)$.

1.8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)} - \sqrt{n^2-3n+2}\right)$.

1.9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+4)(n-1)} - \sqrt{(n+7)(n-4)}\right)$.

1.10. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n^4-4)} - \sqrt{n^5+1}\right)$.

1.11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+1\right)\left(\sqrt[3]{8n^3-3} - \sqrt[3]{8n^3+1}\right)$.

1.12. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n-1)\left(2n - \sqrt[3]{8n^3-3}\right)$.

1.13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8+2n-n^3} + n\right)\cdot\sqrt{n}$.

1.14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2-5n+12} - 2n\right)$.

1.15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n-1} - \sqrt{4n^2-2n+1}\right)$.

1.16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+3n-6} - n\sqrt{n(n^2-4)}}{\sqrt{n-1}}$.

1.17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{3-5n+n^2}\right)$.

1.18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+3)} - \sqrt{n(n-3)}\right)$.

1.19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n-5)}-\sqrt{(n-1)(n-3)}\right)$.

1.20. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3-2}\left(\sqrt{n(4n^4-4n^2-1)}-\sqrt{4n^5-4n^3+1}\right)$.

Завдання 2. Обчислити границі заданих функцій.

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^4+2x^3+1}$.

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^3-3x+1}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

2.4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^6-1}{x^4-1}$.

2.5. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-3x^3-3x+9}{-x^5+3x^4+4x-12}$.

2.6. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+3x^2-6x}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$.

2.8. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$.

2.10. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^{13}-x+1}{x^4+12x^3+1}$.

2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+1}{x^3-5x+1}$.

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{2x^2-1}+\dfrac{1-x^4}{2x^2+1}\right)$.

2.14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$.

2.15. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^4+3x^3-3x-9}{x^5+3x^4-4x-12}$.

2.16. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4+2x^3-4x^2+16}{x^4+2x^3+3x^2+6x}$.

2.17. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+9x^2+9x+1}{x^3-x^2+2}$.

2.18. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^4-81}{3x^4-9x^3-4x+12}$.

2.19. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^3-20x+25}{3x^3+10x^2-25x}$.

2.20. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4+16}{x^4+7x-2}$.

Завдання 3. Обчислити границі заданих функцій.

3.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{e^{3x}-1}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2\sin x)}{\sin3x}$.

3.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{e^{x^2}-1}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{\ln(1+2x)}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1-\ln(e-x)}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(\pi\left(1+x/3\right)\right)}{e^{6x}-1}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin 3x}}{\operatorname{tg} 2x}$. **3.8.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} 2x}}{\sin x^3}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+2)(\ln(2x-3)-\ln(2x+1))$.

3.10. $\lim\limits_{x\to\infty} (x+8)(\ln(3-2x)-\ln(6-2x))$. **3.11.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 9x}{1-\sqrt{\cos 4x}}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 8x}{x\cdot tg5x}$. **3.13.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos 5x-2\sqrt{1+3x^2}}{e^{3x^2}-1}$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x \operatorname{tg} 5x}{\ln(1+2x^2)}$. **3.15.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x^3}{\ln\dfrac{1-x^3}{1+x^3}}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(3x^2+2x\right)}{e^{6x^2}-e^{5x}}$. **3.17.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x^2}-e^{\sin 3x^2}}{\cos 5x-\cos 3x}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin 4x}-\sqrt{1+\operatorname{tg} 4x}}{\ln\left(1+x^3\right)}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin 2x}\left(\ln\left(3-2x\right)-\ln\left(2x+1\right)\right)$.

3.20. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{x}}{(2x+1)^{\frac{1}{8}}}\left((2x+3)^{\frac{1}{8}}-(2x-3)^{\frac{1}{8}}\right)$.

Завдання 4. Обчислити границі заданих функцій.

4.1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3x}$. **4.2.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{x}$.

4.3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x-1}{4x+3}\right)^{3x+2}$. **4.4.** $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{x^2-3}\right)^{-4x}$.

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{2x}{x^3-1}\right)^{-3x^2}$. **4.6.** $\lim\limits_{x\to 4} (9-2x)^{\frac{1}{x-4}}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{4x}{x+1}\right)^{\frac{7}{x^2+x}}$. **4.8.** $\lim\limits_{x\to 1} (5x-4)^{\frac{2}{x-1}}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to 7} (8-x)^{\frac{x}{x-7}}$. **4.10.** $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{2x-3}{x+1}\right)^{1/(\sqrt{x}-2)}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{3x^2}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+3x-1}{4x^2+4}\right)^{x}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{11+2x-7x^3}{4-7x^3}\right)^{3x^2+2}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{x-x^2}{x^2-3}\right)^{-4x+3}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2x}{x^3-1}\right)^{1-3x^2}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to 3}(7-2x)^{\frac{2}{x-3}}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x+2}{x^2-5x+2}\right)^{\frac{-3}{x^2-x}}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{2}{x^2-1}}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 6}(7-x)^{\frac{-x+1}{x-6}}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x-3}{x+1}\right)^{1/(x^2-4)}$.

Самостійна робота 3.

3.Похідні та їх застосування

Таблиця похідних основних елементарних функцій.

Вважаємо u, v деякими диференційовними функціями аргументу x.

1.	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.	$\left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$
2.	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.	$x' = 1,\ c' = 0$
3.	$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a;\quad (a>0, a\neq 1)$.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a;\quad (a>0, a\neq 1)$.
4.	$(e^u)' = e^u \cdot u'$.	$(e^x)' = e^x$.
5.	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{\ln a \cdot u} \cdot u'$.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{\ln a \cdot x}$.
6.	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
7.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.	$(\sin x)' = \cos x$.
8.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.	$(\cos x)' = -\sin x$.
9.	$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

10.	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'.$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
11.	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
12.	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'.$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
13.	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u'.$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$
14.	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}\cdot u'.$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$
15.	$\left(u^{v(x)}\right)' = u^{v(x)}\left(v(x)\ln u(x)\right)' = u^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x) + \frac{u'v(x)}{u}\right);\quad u>0.$	
16.	$\left(u(x)v(x)\right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$	$(cu)' = cu'$
17.	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	

Похідна параметрично заданої функції: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t};$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{\frac{d}{dt}(y')}{\dot{x}_t},\quad y''' = \frac{d}{dx}(y'') = \frac{\frac{d}{dt}(y'')}{\dot{x}_t}\ .$$

Повне дослідження функції:

1. Область значень.
2. Область визначення.
3. Точки перетину з осями: знайти y, коли x=0 та знайти x, коли y=0.
4. Парність функції: якщо $f(x) = f(-x)$ -- парна функція, $f(x) = -f(-x)$ -- непарна функція, в іншому разі функція є індиферентною, функція загального виду.
5. Періодичність функції.
6. Обчислюємо першу похідну: інтервали монотонності ($f'(x) > 0$, фукнція в цій точці зростає, $f'(x) < 0$, то спадає), критичні (не існує похідної в цій точці) та стаціонарні точки $f'(x) = 0$.

7. Обчислюємо другу похідну: інтервали опуклості ($f''(x)>0$ -- функція опукла вниз, $f''(x)<0$ -- увігнута, опукла вгору), точки перегину $f''(x)=0$ або точки в яких друга похідна не існує.

8. Асимптоти: горизонтальні $y=a_{1,2}$, де $a_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$; вертикальні $x=a$, якщо $\infty=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і похилі асимптоти $y=ax+b$, де $a_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b_{1,2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-a_{1,2}x\right)$.

Завдання 1. Продиференціювати задані функції. Знайти $y'=\dfrac{dy}{dx}$ і в пунктах е) є) обчислити ще $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

1.1.а) $y=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$;

б) $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1+2\sin x}}$;

в) $y=\ln\left(e^{2x}+1\right)-2arctg\left(e^x\right)$;

г) $y=x^{\sin x}$;

д) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;

е) $y=e^{x^2}$;

є) $\begin{cases}x=2t^2;\\ y=3t^3.\end{cases}$

1.2. а) $y=(2+x)\sqrt{3-x}$;

б) $y=\ln(\arcsin 5x)$;

в) $y=\dfrac{x}{\sin\left(x^2+3\right)}$;

г) $y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$;

д) $xy=arctg\dfrac{x}{y}$;

е) $y=(\arcsin x)^2$;

є) $\begin{cases}x=e^{-3t};\\ y=e^{3t}.\end{cases}$

1.3. а) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$;

б) $y=3^{ctg\frac{1}{x}}$;

в) $y=\arcsin(\ln x)$;

г) $y=x^{x^2}$;

д) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=5$;

е) $y=\left(1+x^2\right)arctgx$;

є) $\begin{cases}x=t-\sin t;\\ y=t-\cos t.\end{cases}$

1.4. а) $y = \sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$;

б) $y = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;

в) $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln\left(\sqrt{x}+1\right)$;

г) $y = \left(\arccos x\right)^{x^3}$;

д) $3^x + 3^y = \sin y$;

е) $y = \sqrt{1+x^2}$;

є) $\begin{cases} x = t - \cos^2 t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

1.5. а) $y = \dfrac{1}{8}\dfrac{x^8}{\left(1-x^2\right)^4}$;

б) $y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x}$;

в) $y = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$;

г) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

д) $x = y + arctgy$;

е) $y = tgx$;

є) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$

1.6. а) $y = x\sqrt{x^2-1}$;

б) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

в) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$;

г) $y = x^{\sqrt{x}}$;

д) $x^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$;

е) $y = x^3 e^x$;

є) $\begin{cases} x = t^3; \\ y = \ln t^2. \end{cases}$

1.7. а) $y = \left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$;

б) $y = \sin x \cdot \cos^3 x^2$;

в) $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$;

г) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$;

д) $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$;

е) $y = e^{-x^2}$;

є) $\begin{cases} x = t\cos t; \\ y = t\sin t. \end{cases}$

1.8. а) $y = \sqrt{x+2\sqrt{x}}$;

б) $y = arctg\dfrac{1+x}{1-x}$;

д) $x\sin y + y\sin x = 9$;

е) $y = ctgx$;

в) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

г) $y = x^{\ln x}$;

є) $\begin{cases} x = \arcsin t; \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

1.9. а) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

б) $y = arctg\sqrt{4x^4 - 1}$;

в) $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)$;

г) $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

д) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$;

е) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$;

є) $\begin{cases} x = \ln\left(1+t^2\right); \\ y = t^2. \end{cases}$

1.10. а) $y = \left(1 - 2\sqrt{x}\right)^4$;

б) $y = \sin\sqrt{1+x^2}$;

в) $y = \ln^5(1+\cos x)$;

г) $y = \left(x^2 + 4\right)^x$;

д) $3^x + 3^y = \cos y$;

е) $y = \arccos 2x$;

є) $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{1+t^4}; \\ y = \dfrac{1-t^3}{1+t^4}. \end{cases}$

1.11. а) $y = \sqrt[3]{7+5x^3}$;

б) $y = \arcsin\dfrac{2}{x}$;

в) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;

г) $y = (\sin 3x)^x$;

д) $y = 5x + arctgy$;

е) $y = -\dfrac{5}{x+3}$;

є) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$

1.12. а) $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{1-x^4}}$;

б) $y = \arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2}$;

в) $y = \ln\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3x}$;

д) $\sin(xy) + \cos y = 0$;

е) $y = \sqrt{4-x^2}$;

є) $\begin{cases} x = arctgt; \\ y = \dfrac{t^2}{2}. \end{cases}$

г) $y = x^{\sin^2 x}$;

1.13. а) $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x}$;

б) $y = \sqrt{arctgx} - \arcsin 2x$;

в) $y = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3}$;

г) $y = (2x+1)^{\frac{3}{x}}$;

д) $y^2 = x \sin y$;

е) $y = \sqrt{tg3x}$;

є) $\begin{cases} x = \cos 2t; \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$

1.14. а) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x+2}{x-2}}$;

б) $y = \sin^2(x^3)$;

в) $y = \sqrt[3]{\ln^2 x + 5}$;

г) $y = (x^2+4)^{\sin x}$;

д) $x \ln y + \dfrac{y^2}{x} = 3$;

е) $y = e^{\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x = 5t^4 + t; \\ y = \ln t. \end{cases}$

1.15.а) $y = \dfrac{1}{10x^5} - \dfrac{1}{4x^4}$;

б) $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

в) $y = \dfrac{1}{2} \ln tgx + \ln \cos x$;

г) $y = \left(\dfrac{x}{x+5}\right)^x$;

д) $y \sin y - \cos(x-y) = 0$;

е) $y = xe^{x^2}$;

є) $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

1.16. а) $y = \dfrac{1}{x - \sqrt{4+x^2}}$;

б) $y = arctg^2 \dfrac{1}{x}$;

в) $y = \ln^7(\sin 2x)$;

г) $y = (\cos x)^{\sin x}$;

д) $x + \sqrt{xy} + y = 5$;

е) $y = \dfrac{1}{1+x^3}$;

є) $\begin{cases} x = a(t - \sin t); \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

1.17. а) $y = \dfrac{5}{(x^2 - x + 1)^4}$;

д) $x^2 - 2xy + y^3 = 1$;

б) $y = \sin^3(\cos 4x)$;

в) $y = \dfrac{1}{\ln^5 x}$;

г) $y = x^{\sin(x+5)}$;

е) $y = \dfrac{1}{7+\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x = arctgt; \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

1.18.а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$;

б) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

в) $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$;

г) $y = (x^2+3)^{5x}$;

д) $x^2 + 3xy + y^3 + 1 = 0$;

е) $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

є) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = t^3. \end{cases}$

1.19. а) $y = \dfrac{3}{x^2(x-2)}$;

б) $y = x\ln\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)$;

в) $y = (\arcsin x + 2x^2)^7$;

г) $y = (x^2+7)^{\sin x}$;

д) $y^3 - 3y + 10x = 0$;

е) $y = \log_7 x$;

є) $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = \sin t. \end{cases}$

1.20. а) $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}$;

б) $y = \dfrac{\cos x}{\ln\sin x}$;

в) $y = e^{-x^2}\cdot\ln x$;

г) $y = (\cos x)^{\ln x}$;

д) $y = \cos(x+y)$;

е) $y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

є) $\begin{cases} x = \ln t; \\ y = \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

Завдання 2. Дослідити задані функції за допомогою похідних першого порядку і побудувати ескізи графіків в околі їх екстремумів.

2.1. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

2.2. $y = 2 - 3x^3 + x^4$.

2.3. $y = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 1$.

2.4. $y = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \dfrac{7}{4}$.

2.5. $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$.

2.6. $y = -\frac{1}{16}(x-2)^2(x-6)^2$.

2.7. $y = \frac{27}{4}(x^3 + x^2) - 5$.

2.8. $y = x^3(x+2)^2 + 1$.

2.9. $y = \frac{1}{6}x^3 + 2x^2 + 6x$.

2.10. $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

2.11. $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$.

2. 12. $y = 4x^3 + 15x^2 + 12x + 1$.

2.13. $y = 3 - 6x + 15x^2 - 8x^3$.

2.14. $y = 16x^3 - 12x^2 + 3$.

2.15. $y = -\frac{x^3}{5} + \frac{6}{5}x^2 + 3x - 12$.

2.16. $y = x(1-x)^3$.

2.17. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

2.18. $y = 4x^3 + 9x^2 - 12x - 5$.

2.19. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 10$.

2.20. $y = (x^2 - 1)^3$.

Завдання 3. Провести повне дослідження і побудувати графіки функцій.

3.1. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.

3.2. $y = \frac{3}{x^2 + 3x}$.

3.3. $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$.

3.4. $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}$.

3.5. $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$.

3.6. $y = \frac{1}{16x^4 - 1}$.

3.7. $y = \frac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

3.8. $y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$.

3.9. $y = \frac{2x^2 + 1}{x^3 - x}$.

3.10. $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$.

3.11. $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$.

3.12. $y = \frac{x}{4 + 3x - x^2}$.

3.13. $y = \frac{3x - 4}{x^3}$.

3.14. $y = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4}$.

3.15. $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x}$.

3.16. $y = -\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$.

3.17. $y = -\frac{3x}{x^2 - 1}$.

3.18. $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$.

3.19. $y = -\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^2$.

3.20. $y = \frac{x^3 - 8}{x^2}$.

Самостійна робота 4.

4.Невизначені інтеграли

Таблиця основних невизначених інтегралів

1.	$\int 0dx = C$.
2.	$\int dx = x + C$.
3.	$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1)$.
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\|dx + C; \quad (x \neq 0)$.
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad (0 < a \neq 1)$.
6.	$\int e^x dx = e^x + C$.
7.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$.
8.	$\int \cos x dx = \sin x + C$.
9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.
10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$.
12.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg\frac{x}{a} + C; \quad (a \neq 0)$.
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\| + C; \quad (a > 0)$.
14.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C; \quad (a \neq 0)$.
15.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$.
16.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$.
17.	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$.

18.	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C; \quad (a > 0).$

Формула інтегрування частинами.

Якщо $u(x),\ v(x)$ - неперервно-диференційовні функції на (a,b), і на (a,b) існує первісна для $v(x)u'(x)$, то на (a,b) існує первісна для $u(x)v'(x)$, а також справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Формула заміни змінних.

Нехай змінну x можна представити у вигляді $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ - неперервно-диференційовна функція, що має обернену. Тоді $\int \mathrm{f}(x)dx = \int \mathrm{f}(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Метод невизначених коефіцієнтів (МНК).

Для інтегрування раціональних функцій $\frac{P_n}{R_m}$ перевіряємо, де більший степінь многочлена в чисельнику, чи в знаменнику. Якщо $n \geq m$, то ділимо многочлен на многочлен в стовпчик (виділяємо цілу частину дробу) , якщо $n < m$, то за допомогою МНК розбиваємо дріб на суму простих дробів:

$$\frac{P_n(x)}{R_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(a_1x + b_1)^{s_1}(a_2x + b_2)^{s_2}(x^2 + c^2)^{s_3}} =$$

$$\frac{A_1}{(a_1x - b_1)^{s_1}} + \frac{A_2}{(a_1x - b_1)^{s_1 - 1}} + .. + \frac{A_{s_1}}{(a_1x - b_1)} + \frac{B_1}{(a_2x - b_2)^{s_2}} + \frac{B_2}{(a_2x - b_2)^{s_2 - 1}} + ..$$

$$+ \frac{B_{s_2}}{(a_2x - b_2)} + \frac{C_1x + D_1}{(x^2 + c^2)^{s_3}} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + c^2)^{s_3 - 1}} + ... + \frac{C_{s_3}x + D_{s_3}}{(x^2 + c^2)}, \text{ де}$$

$A_1, ..., A_{s_1}, B_1, ..., B_{s_2}, C_1, D_1, ..., C_{s_3}, D_{s_3}$ -- невизначені коефіцієнти, які шукаємо звівши суму до спільного знаменника, при цьому чисельник цього дробу прирівнюємо до P_n. Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів, отримуємо систему, з якої знаходимо невизначені коефіцієнти.

Інтегрування тригонометричних функцій.

Можливі заміни : $t = \sin x,\ dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$

$$t = tg\frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1 + t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2},\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$t = tgx,\ dx = \frac{dt}{1 + t^2},\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Завдання 1. Обчислити невизначені інтеграли.

1.1 $\int \left(x^5 - 1\right)^3 dx.$

1.2 $\int \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x^2}\right) x^{-3/2} dx.$

1.3 $\int \frac{dx}{3x-2}$

1.4 $\int \left(\sqrt{2x-5} - \sqrt[5]{5-3x}\right) dx$

1.5 $\int \frac{dx}{4-5x}$

1.6 $\int \frac{x}{x-1} dx$

1.7 $\int \sin(3x-2)\, dx$

1.8 $\int \cos(3-2x)\, dx$

1.9 $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-5)}$

1.10 $\int \frac{dx}{cos^2(3-5x)}$

1.11 $\int 3^{3x-1} dx$

1.12 $\int e^{2x-1} dx$

1.13 $\int \frac{dx}{x^2+4}$

1.14 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

1.15 $\int \frac{dx}{4x^2+1}$

1.16 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

1.17 $\int tg^2(5x-2)\, dx$

1.18 $\int ctg^2(3x-4)\, dx$

1.19 $\int \sin 3x \cos 5x dx$

1.20 $\int \cos^2(4x+6)\, dx$

Завдання 2. Обчислити невизначені інтеграли.

2. 1. $\int (2x+5)e^{-3x} dx.$

2.2. $\int (6-x)\cos 2x dx.$

2.3. $\int \ln(9x+16)\, dx.$

2.4. $\int (3x+4)\sin\frac{x}{2} dx.$

2.5. $\int (x+1)^2 \ln(x+1) dx.$

2.6. $\int \left(x^2-3\right)\cos 3x dx.$

2.7. $\int arctg(3x+5)\, dx.$

2.8. $\int \arcsin 2x dx.$

2.9. $\int \arccos 3x dx.$

2.10. $\int x^3 \ln x dx.$

2.11. $\int 3^x x dx.$

2.12. $\int \left(x^2-5x+1\right)e^{-x} dx.$

2.13. $\int (2x+7)^2 e^{4x} dx.$

2.14. $\int \left(4+x^2\right)\cos 7x dx.$

2.15. $\int (x-2)\ln^2(x-2) dx.$

2.16. $\int \left(x^2+6x-22\right)\sin 6x dx.$

2.17. $\int (x+3)\ln^2(x+3)\, dx.$

2.18. $\int (1-5x)^2 \sin\frac{x}{5} dx.$

2.19. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

2.20. $\int \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^4} dx.$

Завдання 3. Знайти невизначені інтеграли від виразів, що містять квадратний тричлен.

3.1. **а)** $\int \frac{(3+4x)dx}{x^2+6x+10}$. **б)** $\int \frac{(2x^4-x+3)dx}{x(x+1)(x-2)}$.

3.2. **а)** $\int \frac{(2x+5)dx}{4x^2+4x+5}$. **б)** $\int \frac{(x^4-5x^3+4x+1)dx}{x(x^2-1)}$.

3.3. **а)** $\int \frac{(x+6)dx}{x^2+4x+5}$. **б)** $\int \frac{(4x^3-13x^2+16x+5)dx}{(x-1)^3 x}$.

3.4. **а)** $\int \frac{(2x+7)dx}{4x^2+8x+7}$. **б)** $\int \frac{(x^3-8x^2+23x-16)dx}{x(x-2)^3}$.

3.5. **а)** $\int \frac{(3x+7)dx}{4x^2+6x+1}$. **б)** $\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+x+2)(x^2+2)}$.

3.6. **а)** $\int \frac{(3x+8)dx}{9x^2+6x+4}$. **б)** $\int \frac{(x^3+6x^2+9x+6)dx}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$.

3.7. **а)** $\int \frac{(5x+3)dx}{16x^2+4x-3}$. **б)** $\int \frac{(-4x^2+2x-9)dx}{(x^2+x+1)(x^2+4)}$.

3.8. **а)** $\int \frac{(2x+3)dx}{9x^2+3x+1}$. **б)** $\int \frac{(x^3+4x^2+4x+2)dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$.

3.9. **а)** $\int \frac{(2x+9)dx}{x^2+8x+17}$. **б)** $\int \frac{(3x^4-2x^3+5)dx}{(x-1)(x+1)(x-2)}$.

3.10. **а)** $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2+2x+3}$. **б)** $\int \frac{(x^4-2x^2+5)dx}{x(x-2)(x-3)}$.

3.11. **а)** $\int \frac{(4x+5)dx}{4x^2-4x+3}$. **б)** $\int \frac{(-3x^2+3x+18)dx}{x^2(x-3)^2}$.

3.12. **а)** $\int \frac{(3x+4)dx}{9x^2+6x+5}$. **б)** $\int \frac{(-5x^2+15x+40)dx}{(x-2)^2(x+3)^2}$.

3.13. **а)** $\int \frac{(6x-1)dx}{x^2-5x}$. **б)** $\int \frac{(2x^3+4x^2+2x+2)dx}{(x^2+x+1)(x^2+x+2)}$.

3.14. **а)** $\int \frac{(5x+1)dx}{4x^2-4x+1}$. **б)** $\int \frac{(4x^2+7x-2)dx}{(x^2-x+1)(x^2+4)}$.

3.15. **а)** $\int \frac{(x+7)dx}{16x^2+4x+5}$. **б)** $\int \frac{(x^4-5x+4)dx}{x^3-9x}$.

3.16. а) $\int \frac{(7x-6)dx}{9x^2-6x+5}$. **б)** $\int \frac{(2x^4-3x+3)dx}{x(x+1)(x-4)}$.

3.17 а) $\int \frac{2x-3}{3x^2-2x-8}dx$ **б)** $\int \frac{(2x^4-3x+3)dx}{(x+1)(x^2-4)}$.

3.18 а) $\int \frac{5x+2}{3x^2+11x-4}dx$ **б)** $\int \frac{(2x^3+4x^2+2x+2)dx}{(x^2+4)(x^2-x+1)}$.

3.19а) $\int \frac{5x+3}{2x^2-13x+15}dx$ **б)** $\int \frac{(2x^4+2)dx}{(x^2+2x)(x-3)}$.

3.20а) $\int \frac{2x-11}{2x^2+7x-15}dx$ **б)** $\int \frac{(2x^4+4x^2+2x+2)dx}{(x^2+x)(x^2+2x+2)}$.

Завдання 4. Знайти невизначені інтеграли.

4.1. $\int \cos 3x \cdot \sin^2 2x dx$. **4.2.** $\int \frac{10+tgx}{5\sin^2 x-9\cos^2 x+3}dx$.

4. 3. $\int \sin^2 x \cdot \cos 4x dx$. **4.4.** $\int \sin^6 \frac{x}{2}dx$.

4.5. $\int \frac{dx}{3+4tgx}$. **4.6.** $\int \frac{dx}{\cos x-6\sin x}$.

4.7. $\int \sin^4 4x \cdot \cos^2 4x dx$. **4.8.** $\int \frac{4+tgx}{2\cos^2 x-5}dx$.

4.9. $\int tg^4 x dx$. **4.10.** $\int \cos 3x \cdot \cos 5x dx$.

4.11. $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$. **4.12.** $\int \cos^4 x dx$.

4.13. $\int \frac{4-3tgx}{7\cos^2 x+3\sin^2 x}dx$. **4.14.** $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$.

4.15. $\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x dx$. **4.16.** $\int \frac{7-2tgx}{(5\sin x+2\cos x)^2}dx$.

4.17 $\int \frac{dx}{\cos^2 x+3\sin^2 x}$ **4.18** $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx$.

4.19 $\int \frac{dx}{2\sin x-3\cos x+1}$ **4.20** $\int \cos^3 x \sin^6 x dx$

Завдання 5. Знайти невизначені інтеграли.

5.1. $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{2x+1}}$. **5.2.** $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$.

5.3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$.

5.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

5.5. $\int \frac{dx}{2+\sqrt[3]{x-2}}$.

5.6. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+4}-3\sqrt[3]{x+4}}$.

5.7. $\int \sqrt{\frac{x-4}{x-11}}dx$.

5.8. $\int \frac{dx}{2-\sqrt{1-5x}}$.

5.9. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{100-x^2}}$.

5.10. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^4}dx$.

5.11. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}+2\sqrt[3]{3x+1}}$.

5.12. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{1}{1-x}dx$.

5.13. $\int \frac{x^2 dx}{\left(81-x^2\right)^{3/2}}$.

5.14. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+8}+\sqrt[3]{x+8}}$.

5.15. $\int \frac{dx}{\left(64+x^2\right)^{3/2}}$.

5.16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}$.

5.17. $\int \sqrt{9-x^2}dx$.

5.18. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$.

5.19 $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$.

5.20 $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}-1}dx$.

5.Визначений інтеграл

Формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо функція $\mathrm{f}(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a,b]$, а $\mathrm{F}(x)$- її первісна, то

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b.$$

Формула інтегрування частинами.

Якщо існують $u(x),\ v(x)$ - неперервно-диференційовні функції на $[a,b]$, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Формула заміни змінних.

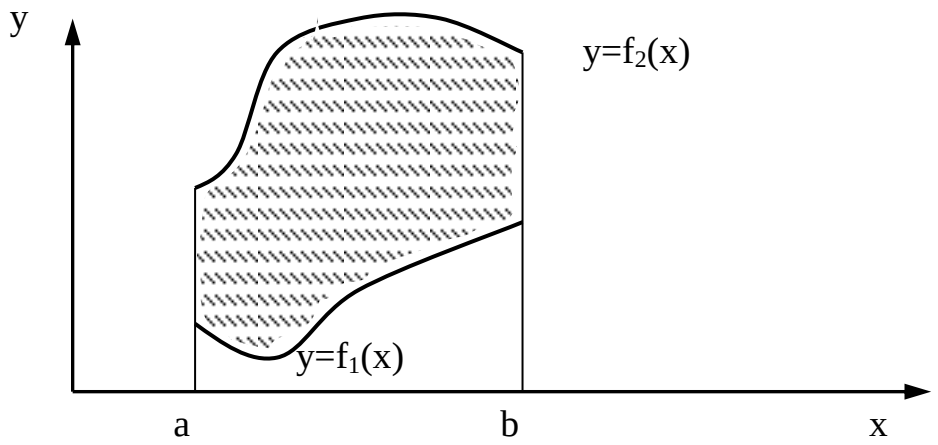
Якщо $\mathrm{f}(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, а $\varphi(t)$ - неперервно-диференційовна функція на (α,β), де $a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$, то

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

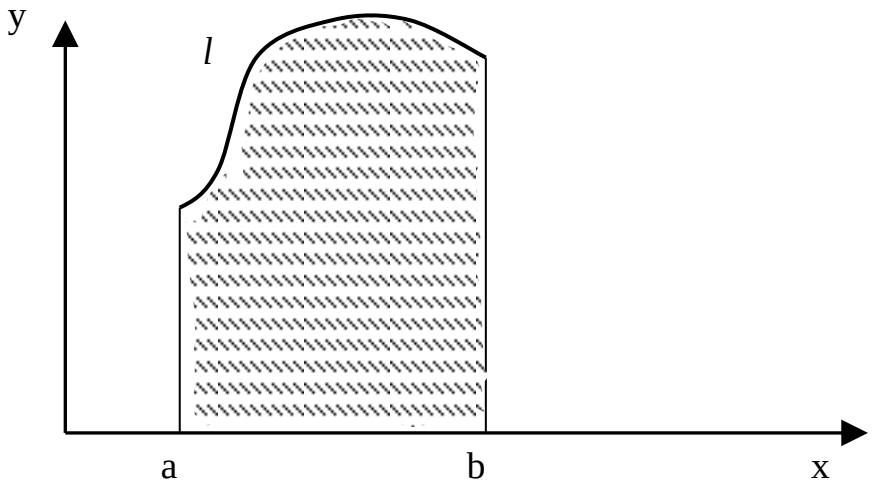
Застосування визначеного інтегралу

1.Обчислення **площ** в прямокутних координатах.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$



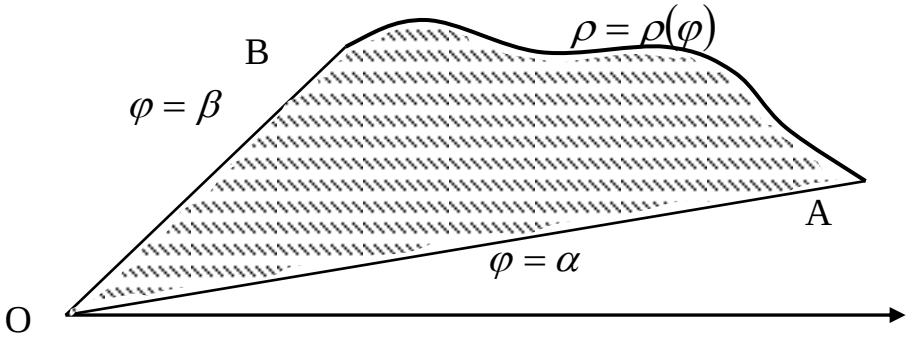
2. Обчислення **площ** при параметричному заданні кривої.



$$l: \begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta; \quad \begin{vmatrix} \varphi(\alpha) = a; \\ \varphi(\beta) = b. \end{vmatrix} \quad S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

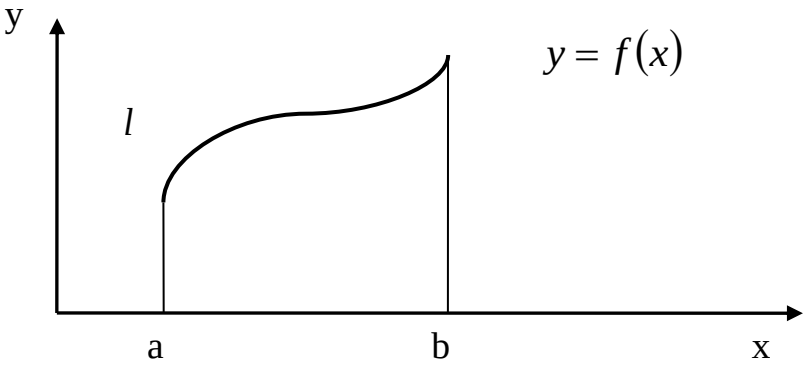
3.**Площа** криволінійного сектора в полярних координатах.

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$



4.**Довжина дуги** кривої, заданої в Декартовій системі координат.

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

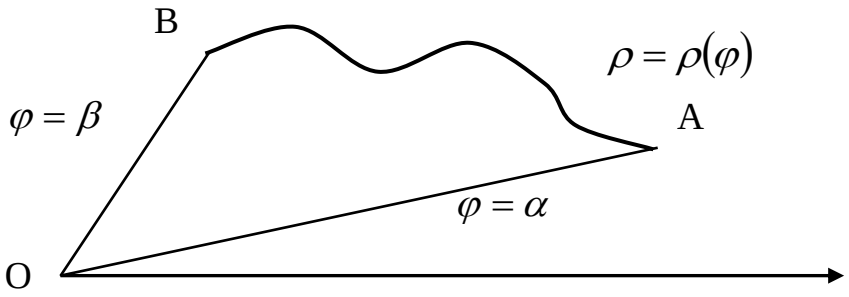


5.**Довжина дуги** кривої у випадку параметричного задання.

$$l: \begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \end{cases} \alpha \le t \le \beta; \qquad \begin{vmatrix} \varphi(\alpha) = a; \\ \varphi(\beta) = b. \end{vmatrix} \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$$

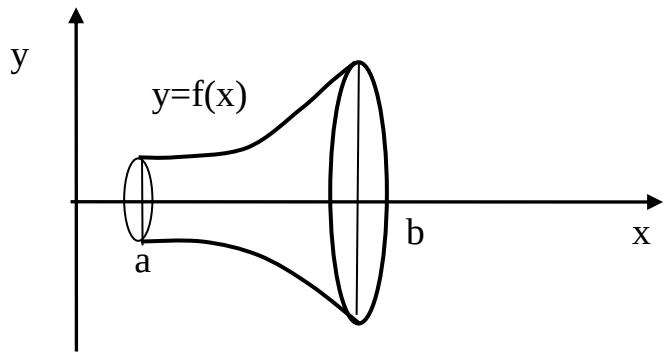
6.**Довжина дуги** кривої в полярних координатах.

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}\, d\varphi.$$



7.**Об'єм** тіла обертання.

Розглядаємо тіло, утворене обертанням навкруги вісі OX криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю OX та прямими $x = a;\quad x = b$. Об'єм такого тіла можна обчислити за формулою $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$. Якщо тіло утворене обертанням навкруги вісі OY криволінійної трапеції, обмеженої кривими $x = g(y);\ y = c;\ y = d$, справедлива аналогічна формула $V = \pi\int\limits_c^d g^2(y)dy$.



Завдання 1. Обчислити інтеграли.

1.1. $\int\limits_1^3 \operatorname{arctg} x dx$.

1.2. $\int\limits_{-2}^1 \frac{xdx}{x^3+1}$.

1.3. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} x\sin x dx$.

1.4. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} x^2\cos 3x dx$.

1.5. $\int\limits_{e/2}^{1} x^2 \ln 2x dx$.

1.6. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{1+e^{-x}}$.

1.7. $\int\limits_{0}^{4} \frac{(x+2)}{\sqrt{3x+4}+1} dx$.

1.8. $\int\limits_{-1}^{0} (2x-3)e^{3x} dx$.

1.9. $\int\limits_{1}^{2} \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

1.10. $\int\limits_{2e}^{3e} \frac{dx}{x \ln x}$.

1.11. $\int\limits_{0}^{3} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx$.

1.12. $\int\limits_{0}^{1} x \operatorname{arctg} 2x dx$.

1.13. $\int\limits_{0}^{10} \sqrt{100-x^2} dx$.

1.14. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2^3 \sin^2 x \cos^4 x dx$.

1.15. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x dx$.

1.16. $\int\limits_{0}^{3} x^2 \ln(x+4) dx$.

1.17. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos^2 3x dx$.

1.18. $\int\limits_{-16}^{-11} \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$.

1.19 $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2-x-3}$

1.20 $\int\limits_{4}^{9} \sqrt{x^2+9} dx$

Завдання 2. Обчислити площі фігур, обмежених заданими кривими. Зробити схематичні малюнки.

2.1. $y = x^2 + 7x;\quad y = 4x + 4$.

2.2. $y = 4 - x^2;\quad y = x^2 - 2x$.

2.3. $x = 9 - y^2;\quad x = y^2 - 3y$.

2.4. $y = 3x^2 - 5x + 1;\quad y = 2x - 1$.

2.5. $xy = 7;\quad x + y = 8$.

2.6. $y = x^2 - 3x - 2;\quad y = -2x$.

2.7. $y = x^2 + 4x;\quad y = 7x + 4$.

2.8. $x^2 - 3y = 4;\quad x^2 + y = 8$.

2.9. $y = (x-1)^2;\quad y^2 = x - 1$.

2.10. $y^2 + 4x = 4;\quad y^2 - 12x = 36$.

2.11. $y = 2x^2 + 7x + 1;\quad y = 2x - 1$.

2.12. $y = x^2 - 2x + 4;\quad 9x + y + 2 = 0$.

2.13. $y = 4x - 3x^2;\quad y + 3x - 2 = 0$. **2.14.** $y = x^2 - 3x;\quad y = 2x - 6$.

2.15. $y = x^2 - 2x + 1;\quad y = 3x - 5$. **2.16.** $y = 5x - 2x^2;\quad y = 2x - 2$.

2.17. $x^2 - 2y = 3;\quad x^2 - y = 4$.

2.18. $y = 2x^2 + 6x + 5;\quad y = x + 3$.

2.19. $y = x^2 - 5x + 1;\quad 2x + y - 1 = 0$. **2.20.** $y^2 + 2x = 6;\quad y - 2x = 2$.

Завдання 3. Обчислити площі фігур, обмежених лініями. заданими рівняннями в полярних координатах. Зробити схематичні малюнки.

3.1. $\rho = 3 - \cos\varphi; \quad \rho = 1.$ **3.2.** $\rho = 2 + \cos\varphi; \quad \rho = 3.$

3.3. $\rho = 2 - \sin\varphi; \quad \rho = 1.$ **3.4.** $\rho = \sin 3\varphi; \quad \varphi = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$

3.5. $\rho^2 = \cos 2\varphi; \varphi = -\frac{\pi}{4}; \varphi = \frac{\pi}{4}.$ **3.6.** $\rho = \varphi; \varphi = \frac{\pi}{3}; \varphi = \frac{\pi}{4}.$

3.7. $\rho = 4 + \cos\varphi; \rho = 3 - \cos\varphi.$ **3.8.** $\rho = 2(1 - \cos\varphi).$

3.9. $\rho = 2(1 - \sin\varphi).$ **3.10.** $\rho = 3 + \sin\varphi; \quad \rho = 2.$

3.11. $\rho = 3\sin 2\varphi; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{4}.$ **3.12.** $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{2}.$

3.13. $\rho = 2\cos 4\varphi.$ **3.14.** $\rho^2 \cos 2\varphi = 1; \varphi = -\frac{\pi}{8}; \varphi = \frac{\pi}{8}.$

3.15. $\rho = 6 - \cos 2\varphi.$ **3.16.** $\rho = 2\cos 6\varphi.$

3.17. $\rho = e^{\varphi}; \varphi = 0; \varphi = \frac{\pi}{4}.$ **3.18.** $\rho = \frac{13}{2\pi}\varphi; \varphi = \frac{\pi}{12}; \varphi = \frac{\pi}{4}.$

3.19. $\rho = \sin\phi + \cos\phi; \phi = \pi; \phi = \frac{3\pi}{2}.$ **3.20.** $\rho = 3\cos 2\phi.$

Завдання 4. Обчислити довжини дуг наступних кривих.

4.1. $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t; \\ y = 6\sin t - 8\cos t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$

4.2. $y = \ln\sin x; \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

4.3. $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t); \\ y = 4(\sin t - t\cos t); \end{cases} \quad 0 \le t \le 2.$

4.4. $\rho = 2(1 - \cos\varphi); \quad 0 \le \varphi \le \pi.$

4.5. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x; 0 \le x \le \frac{7}{9}.$

4.6. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t); \\ y = e^t(\cos t - \sin t); \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

4.7. $\rho = 3e^{\frac{3}{4}\varphi}; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

4.8. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t; \\ y = 2t\sin t + (2 - t^2)\cos t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$

4.9. $\begin{cases} x = 4\sin t + 3\cos t; \\ y = 3\sin t - 4\cos t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}.$

4.10. $y = 1 - \ln\sin x; \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

4.11. $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t); \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t); \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

4.12. $\rho = 6\cos\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

4.13. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t); \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

4.14. $y = \arcsin e^{-x}; \quad 0 \le x \le 1$.

4.15. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t; \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

4.16. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}; \quad 0 \le x \le 2$.

4.17. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x; \quad 1 \le x \le 2.$

4.18. $\rho = 1 + \cos\varphi; \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

4.19 $\rho = 1 - \sin\varphi, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi.$

4.20 $y = x^2 \ln x, 1 \le x \le e.$

Завдання 5. Обчислити об’єми тіл, утворених поверхнями, отриманими при обертанні наступних ліній:

5.1. $y = 2\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \left(0 \le x \le 3\right)$ навколо вісі OX .

5.2. $y = e^x; \; y = 1; \; x = \ln 2$ навколо вісі OX .

5.3. $x = 5 - y^2; \;\; x = 5 - 2y$ навколо вісі OY .

5.4. $y = -x^2 + 5x - 4; \; y = 0$ навколо вісі OX .

5.5. $x = 5y^2; \; x = 5$ навколо вісі OY .

5.6. $y = \ln x; \; y = 1; \; x = e^2$ навколо вісі OX .

5.7. $y=\sin x;\ y=2\sin x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ навколо вісі OX .

5.8. $y=e^{x};\ y=e^{-x};\ x=1$ навколо вісі OX .

5.9. $y=2x-x^{2};\ y=0$ навколо вісі OY .

5.10. $\dfrac{x^{2}}{2^{2}}-\dfrac{y^{2}}{2^{2}}=1;\ x=3$ навколо вісі OX .

5.11. $y=xe^{x};\ x=1;\ y=0$ навколо вісі OX .

5.12. $\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1\left(a>b>0\right)$ навколо вісі OY .

5.13. $y=e^{x}-1;\ y=4;\ x=0$ навколо вісі OX .

5.14. $y=x^{2};\ y^{2}=x$ навколо вісі OX .

5.15. $y=\arcsin x\left(0\le x\le 1\right)$ навколо вісі OX .

5.16. $x^{4}+y^{4}=x^{2}$ навколо вісі OX .

5.17. $x^{2}+y^{2}=5^{2}$ навколо вісі OX .

5.18. $y=e^{x};\ y=e^{-x};\ x=-1$ навколо вісі OX .

5.19. $y=x-x^{2};\ y=0$ навколо вісі OY .

5.20. $\dfrac{x^{2}}{4}+\dfrac{y^{2}}{9}=1;\left(-2\le x\le -1\right)$ навколо вісі OY .

6.Невласні інтеграли

Невласні інтеграли першого роду визначаються наступними рівностями

$$\boxed{\int_{a}^{\infty}f\left(x\right)dx=\lim_{B\to\infty}\int_{a}^{B}f\left(x\right)dx;\qquad\int_{-\infty}^{b}f\left(x\right)dx=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{b}f\left(x\right)dx}$$

, якщо написані границі існують. Якщо границі не існують або дорівнюють $\pm\infty$, тоді інтеграли називаються *розбіжними*.

Асимптотична ознака порівняння

Маємо невласні інтеграли $\int_{a}^{\infty}f\left(x\right)dx$ та $\int_{a}^{\infty}g\left(x\right)dx$. Якщо $f\left(x\right)\underset{x\to\infty}{\sim}Cg\left(x\right),$ де C - стала, тоді ці інтеграли збігаються або розбігаються одночасно.

Асимптотично-степенева ознака порівняння

Якщо $f\left(x\right)\underset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{C}{x^{\alpha}}$, де C - стала,

тоді при $\begin{cases} \alpha > 1 \Rightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)dx \text{ } \textit{збіжний;} \\ \alpha \le 1 \Rightarrow \int\limits_a^{\infty} f(x)dx \text{ } \textit{розбіжний.} \end{cases}$

Нехай $f(x)$ визначена і неперервна на $[a,c)$, а в околі точки с функція $f(x)$ необмежена, $\boxed{\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b \to c-0} \int\limits_a^b f(x)dx.}$ Якщо ж $f(x)$ має розрив в лівому кінці відрізка $[a,c]$, тоді $\boxed{\int\limits_a^c f(x)dx = \lim\limits_{b \to a+0} \int\limits_b^c f(x)dx}$. Такі інтеграли називаються невласними інтегралами другого роду.

Асимптотично-степенева ознака порівняння

Якщо $f(x) \underset{x \to b-0}{\sim} \dfrac{C}{(b-x)^{\alpha}}$, тоді при $\begin{cases} \alpha \ge 1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \quad \textit{розбіжний;} \\ \alpha < 1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \quad \textit{збіжний.} \end{cases}$

Якщо $f(x) \underset{x \to a+0}{\sim} \dfrac{C}{(x-a)^{\alpha}}$, тоді при $\begin{cases} \alpha \ge 1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \quad \textit{розбіжний;} \\ \alpha < 1 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \quad \textit{збіжний.} \end{cases}$

Завдання 1.

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

1.1. $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^4}$. **1.2.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}dx$. **1.3.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$.

1.4. $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{\ln x}{x}dx$. **1.5.** $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x}{(1+x)^3}dx$. **1.6.** $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1.7. $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin x dx$. **1.8.** $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{arctgx}{x^2}dx$. **1.9.** $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.10. $\int\limits_0^{2} \dfrac{dx}{x^2-4x+3}$. **1.11.** $\int\limits_0^{1} x\ln x dx$. **1.12.** $\int\limits_0^{e^{-1}} \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

1.13 $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{arctg(x+1)dx}{x^2+2x+2}$. **1.14.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-3x}\sin 2x dx$. **1.15.** $\int\limits_6^{\infty} \dfrac{dx}{x^2-6x+8}$.

1.16. $\int_5^{\infty} \frac{\left(x^2+5\right)dx}{\sqrt{x^2-4}}$. **1.17.** $\int_0^{\infty} e^{-5x}\cos 3x dx$. **1.18.** $\int_5^{\infty} \frac{arctg\left(x-3\right)}{x^2-6x+10}dx$.

1.19. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{8-x^2-2x}}$. **1.20.** $\int_0^{5} \frac{dx}{x^2-3x-10}$.

Завдання 2.

Дослідити невласні інтеграли на збіжність.

2.1. $\int_0^{2} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{4-x^2}}dx$.

2.2. $\int_0^{\infty} \frac{xarctg\frac{x}{2}}{\sqrt[5]{x^2+4}}dx$.

2.3. $\int_1^{\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^3-x^2+1}dx$.

2.4. $\int_0^{\infty} \frac{x^{17}}{\left(x^5-x^3+1\right)^4}dx$.

2.5. $\int_0^{1} \frac{dx}{e^{2x}-\cos 2x}$.

2.6. $\int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{x^2}dx}{4x-x^{7/6}}$.

2.7. $\int_0^{1} \frac{\cos x}{\sqrt[5]{1-x^2}}dx$.

2.8. $\int_0^{\infty} \frac{arctg3x}{\sqrt[3]{9x^2+1}}dx$.

2.9. $\int_1^{\infty} \frac{x^6\sqrt[4]{x}-5\sqrt[3]{x^2}-1}{x^7-3x^2+6}dx$.

2.10. $\int_0^{\infty} \frac{2x^5-3x^2+1}{\left(x^3-3x+6\right)^4}dx$.

2.11. $\int_0^{1} \frac{dx}{xe^x-\sin x}$.

2.12. $\int_0^{1} \frac{\sqrt[3]{x}dx}{4\sqrt{x}-x^{5/6}}$.

2.13. $\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$.

2.14. $\int_0^{\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$.

2.15. $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$.

2.16. $\int_0^{\infty} \frac{x^{13}}{\left(x^5+x^3+1\right)^3}dx$.

2.17. $\int_0^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

2.18. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^3}$.

2.19. $\int_0^{\infty} \frac{2x^3-1}{x^5+x^2+1}dx$.

2.20. $\int_0^{\infty} \frac{2x^8-2x^5-1}{\left(x^5-2x^3+34\right)^3}dx$.

Самостійна робота №5.

Функції багатьох змінних

Диференціалом du диференційовної в точці $M_0(a_1, a_2)$ функції $u = f(x_1, x_2)$ називається $\boxed{du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)dx_2.}$

Диференціалом du диференційовної в точці $M_0(a_1, a_2, \ldots a_m)$ функції $u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ називається

$$\boxed{du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)dx_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m.}$$

Застосування диференціалу до наближених обчислень

Якщо точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ та $M_0(a_1, a_2, \ldots a_m)$ близькі і містяться в області, де функція u диференційовна, тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots x_m) \approx f(a_1, a_2, \ldots a_m) + \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\Delta x_2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)\Delta x_m,$$

де $\Delta x_1 = x_1 - a_1; \quad \Delta x_2 = x_2 - a_2; \ldots; \Delta x_m = x_m - a_m.$

Диференціювання складної функції

Розглянемо складну функцію вигляду $u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$, де

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \\ \qquad \ldots \\ x_m = x_m(t_1, t_2, \ldots, t_k). \end{cases}$$

Якщо функції $x_i(t_1, t_2, \ldots, t_k); \quad i = \overline{1, m}$ диференційовні в деякій точці $M(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \ldots, \overline{t_k})$, а функція $u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ диференційовна у відповідній точці $N(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots \overline{x_m})$, де $\overline{x_i} = x_i(\overline{t_1}, \overline{t_2}, ..., \overline{t_k})$, тоді складна функція $u = f(x_1, x_2, \ldots x_m)$ диференційовна в точці $M(\overline{t_1}, \overline{t_2}, \ldots, \overline{t_k})$. При цьому частинні похідні цієї складної функції в точці M визначаються формулами:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t_1} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_1} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_1}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_2} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_2} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_2} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u}{\partial t_k} = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\dfrac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\dfrac{\partial x_2}{\partial t_k} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_m}\dfrac{\partial x_m}{\partial t_k}. \end{cases}$$

Для випадку, коли функція $u = f(x, y)$ залежить від двох змінних $x = x(t,s),\ y = y(t,s)$, її частинні похідні обчислюватимуться наступним чином $\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}; \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s} \end{cases}}$.

Градієнт функції $u = f(x, y, z)$ в точці M_0:

$$grad u(M_0) = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \right\}.$$

Похідна функції $u = f(x, y, z)$ **за напрямком** вектора $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ в точці M_0: $\dfrac{\partial u}{\partial a}(M_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cdot \cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cdot \cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cdot \cos\gamma =$

$$= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cdot a_x + \dfrac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cdot a_y + \dfrac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cdot a_z}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}}.$$

Важливим застосуванням диференціювання ФВА є відшукання ***локальних та глобальних екстремумів функції***. Для цього спершу визначаємо критичні точки функції(точки в яких перші частинні похідні рівні 0 або не існують): складаємо систему, в якій кожна частинна похідна першого порядку прирівнюється до нуля. Наприклад у випадку коли змінних три матимемо наступну систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{dx} = 0; \\ \dfrac{\partial u}{dy} = 0; \\ \dfrac{\partial u}{dz} = 0. \end{cases}$$ З неї шукаємо точки, які задовольняють цю систему, або точки в яких яка-небудь частинна похідна є невизначеною. Ці точки можуть бути точками екстремуму.

Другий крок: знаходимо диференціал другого порядку і перевіряємо в кожній точці чи цей диференціал додатньозначний(точка мінімуму) чи від'ємнозначний(точка максимуму), якщо знак форми другого диференціала не визначений, тоді точка не є точкою екстремума. Для цього скористайтеся критерієм Сильвестра.

Завдання 1. Задана функція двох змінних $z = z(x, y)$. Перевірити, чи задовольняє вона дане диференціальне рівняння в частинних похідних.

1.1. $z = \ln\left(\sqrt{x} - 3y\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

1.2. $z = x^y$; $y \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + y \ln x\right) \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

1.3. $z = e^{xy}$; $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

1.4. $z = \sin\left(x + ay\right)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

1.5. $z = \dfrac{x}{y}$; $x \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

1.6. $z = \cos y + \left(y - x\right)\sin y$; $\left(x - y\right) \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

1.7. $z = tg^2\left(2x - 3y\right)$; $3 \dfrac{\partial z}{\partial x} + 2 \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.8. $z = arctg \dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

1.9. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2\left(x + y\right)}{x - y}$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.10. $z = \ln\left(x^2 - y^2\right)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{x+y}$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.11. $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$; $3y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.12. $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.13. $z = \left(x^2 + y^2\right)tg\dfrac{x}{y}$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.14. $z = e^{-x-3y}\sin(x+3y)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

1.15. $z = \ln\dfrac{x}{y} + x^3 - y^3$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\left(x^3 - y^3\right)$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.16. $z = \cos^2(x - 4y)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

1.17. $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.18. $z = \ln\dfrac{x-2y}{2x-y}$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.19. $z = arctg\sqrt{xy}$; $\sqrt{\dfrac{x}{y}}\dfrac{\partial z}{\partial x} - \sqrt{\dfrac{y}{x}}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, обчислити $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

1.20. $z = \sin^2(3x - 2y)$; $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0$

Завдання 2.

Обчислити значення виразу, замінивши приріст відповідної функції диференціалом.

2.1. $(1{,}03)^2(0{,}98)^3$.

2.2. $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

2.3. $\dfrac{2{,}03}{(2{,}03)^4 + (2{,}97)^2}$.

2.4. $\ln\left(\sqrt[5]{0{,}98} + \sqrt[4]{1{,}03} - 1\right)$.

2.5. $arctg\dfrac{0{,}98}{1{,}01}$.

2.6. $1{,}04^{2{,}02}$.

2.7. $\sqrt{3{,}97^2 + 3{,}02^2}$.

2.8. $1{,}02^{2{,}04} - \ln 1{,}02$.

2.9. $0{,}97^{5{,}03}$.

2.10. $\left(2-\sqrt{0{,}97}\right)^{3{,}02}$.

2.11. $(0{,}99)^2\,(0{,}98)^3$.

2.12. $\sqrt{1{,}01^2+1{,}97^3}$.

2.13. $\dfrac{2{,}01}{(2{,}01)^4+(2{,}98)^2}$.

2.14. $\ln\left(\sqrt[3]{0{,}97}+\sqrt[4]{1{,}01}+1\right)$.

2.15. $\arcsin\left(\sqrt{1{,}02}-0{,}49\right)$.

2.16. $0{,}98^{2{,}01}$.

2.17. $\sqrt[3]{7{,}97\ +8{,}02^2}$.

2.18. $1{,}02^{1{,}98}-\ln 0{,}97$.

2.19. $0{,}97^{5{,}93}$.

2.20. $\left(2-\sqrt{1{,}01}\right)^{2{,}97}$.

Завдання 3. Задана функція $u=u(x,y,z)$, точка $A(x_0,y_0,z_0)$ та вектор $\bar{s}$. Знайти:

а)градієнт функції u в точці A;

б)похідну функції u в точці A за напрямком вектора $\bar{s}$.

3.1. $u=x\cdot\arcsin\left(\dfrac{y}{z}\right)$; $A(-1,1,2)$; $\bar{s}=\{1,-1,1\}$.

3.2. $u=e^{xy-z}$; $A(-1,-2,0)$; $\bar{s}=\{5,6,2\}$.

3.3. $u=ar\cos(x+yz)$; $A(-1,-1,1)$; $\bar{s}=\{2,-3,11\}$.

3.4. $u=\ln\left(3\dfrac{x}{y}+z^2\right)$; $A(0,1,1)$; $\bar{s}=\{4,-3,1\}$.

3.5. $u=\operatorname{arc}tg\left(\dfrac{x\sqrt{z}}{y}\right)$; $A(1,2,4)$; $\bar{s}=\{1,-2,5\}$.

3.6. $u=4\dfrac{xy^3}{z}+yz^3$; $A(2,-1,1)$; $\bar{s}=\{5,-8,6\}$.

3.7. $u=\dfrac{3x+y-z}{x+2y+z}$; $A(3,-1,4)$; $\bar{s}=\{1,1,1\}$.

3.8. $u=\arccos\left(\dfrac{x^2+y^2}{z}\right)$; $A\left(0,\dfrac{1}{4},1\right)$; $\bar{s}=\{2,-5,2\}$.

3.9. $u=xy\cdot e^{yz}$; $A(1,1,-2)$; $\bar{s}=\{-5,0,8\}$.

3.10. $u=\ln(x^2-y^3+z^4+1)$; $A(5,1,2)$; $\bar{s}=\{0,1,1\}$.

3.11. $u=z\cdot arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $A(-1,1,2)$; $\bar{s}=\{1,-1,1\}$.

3.12. $u=e^{xyz}$; $A(-1,-2,0)$; $\bar{s}=\{5,6,2\}$.

3.13. $u=arctg(xyz)$; $A(-1,-1,6)$; $\bar{s}=\{2,-3,11\}$.

3.14. $u = \ln\left(3xy + 2xy^2z + z^2\right)$; $A(0,1,1)$; $\bar{s} = \{4,-3,1\}$.

3.15. $u = \arcsin\left(\dfrac{xz}{\sqrt{y}}\right)$; $A\left(\sqrt{2},4,\dfrac{1}{2}\right)$; $\bar{s} = \{1,-2,5\}$.

3.16. $u = 4x^4z + 2xy^3 + yz^3$; $A(2,1,0)$; $\bar{s} = \{5,-8,6\}$.

3.17. $u = \dfrac{3x + y - z}{x + 2y + z}$; $A(3,-1,4)$; $\bar{s} = \{1,1,1\}$.

3.18. $u = \arccos\left(\dfrac{x^2 + y^2}{z}\right)$; $A\left(0,\dfrac{1}{4},1\right)$; $\bar{s} = \{2,-5,2\}$.

3.19. $u = xy \cdot e^{yz}$; $A(1,1,-2)$; $\bar{s} = \{-5,0,8\}$.

3.20. $u = \ln\left(x^2 - y^3 + z^4 + 1\right)$; $A(5,1,2)$; $\bar{s} = \{0,1,1\}$.

Завдання 4.

Знайти локальні екстремуми даних функцій.

4.1. $u = x^2 + y^2 + xy - 2x - y - 11$. **4.2.** $u = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

4.3. $u = x^3 + y^3 - 9xy$. **4.4.** $2x^3 + 2y^3 - 36xy + 50$.

4.5. $u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

4.6. $u = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$. **4.7.** $u = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

4.8. $u = 6x^2 - x^3 + y^2 - 2y$. **4.9.** $u = x^3 + xy^2 + 6xy$.

4.10. $u = x^3y^2(6 - x - y)$. **4.11.** $u = 2x^2 - y(x-1)^2$.

4.12 $u = 4x^2 + 4y^2 + 2xy - 2x - y - 5$ **4.13.** $u = x^3 + 3y^3 - 9xy + 6$.

4.14. $2x^3 + 2y^3 - 24xy - 47$. **4.15.** $u = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 15$.

4.16 $u = x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x + 5y + 7$.

4.17. $u = x^2 + y^2 - 4x - 4y - 27$. **4.18.** $u = 6x^2 - 12x^3 + y^2 - 2y - 1$.

4.19. $u = y^3 + 6xy - 3y^2x + 7$. **4.20.** $u = x^3y^2 - x^3y - 13$.

Завдання 5.

Знайти умовний екстремум функції $u = f(x,y)$, якщо рівняння зв'язку $\varphi(x,y) = 0$.

5.1 $u = x^2 - 3y^2 - 3$ $\varphi(x,y) = 2x + 6y - 4 = 0$

5.2. $u = x^2 - y^2$; $\varphi(x,y) = 2x - 3y - 1 = 0$.

5.3. $u = x^2 - xy + y^2 - 4x$; $\varphi(x,y) = 2x + 3y - 12 = 0$.

5.4. $u = \frac{1}{2}x^2 - xy$; $\varphi(x,y) = y - \frac{1}{3}x^2 = 0$.

5.5. $u = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$; $\varphi(x,y) = x - 2y + 3 = 0$.

5.6. $u = 4x - 4y - x^2 - y^2$; $\varphi(x,y) = 2x - y = 0$.

5.7. $u = (x-1)^2 + 2y^2$; $\varphi(x,y) = x + y + 1 = 0$.

5.8. $u = 4y^3 + 3x^2 + y^2 - 4y$; $\varphi(x,y) = x - 1 = 0$.

5.9. $u = x^2 - y^2 - 4x$; $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 = 9$.

5.10 $u = 2x^2 + 3y^2 - x - 8y - 17$ $\varphi(x,y) = 4x + 6y + 1 = 0$.

5.11 $u = x^2 + 3y^2 + 5$ $\varphi(x,y) = 2x - y + 5 = 0$

5.12. $u = 7 - x^2 + y^2 - 3xy$; $\varphi(x,y) = x + y - 1 = 0$.

5.13. $u = x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 3$; $\varphi(x,y) = 2x + y - 8 = 0$.

5.14. $u = \frac{1}{2}y^2 - xy - 9$; $\varphi(x,y) = x - \frac{1}{3}y^2 = 0$.

5.15. $u = x^2 + y^2 - x - 2y - 7$; $\varphi(x,y) = x - 2y + 7 = 0$.

5.16. $u = 2x - 2y + x^2 - y^2 - 4$; $\varphi(x,y) = 2x - y = 0$.

5.17. $u = 2(y-1)^2 + x^2$; $\varphi(x,y) = x - y + 1 = 0$.

5.18. $u = 4x^3 + x^2 + 3y^2 - 4y - 3$; $\varphi(x,y) = y - x - 1 = 0$.

5.19. $u = 2x^2 - y^2 - 4x - 4$; $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 = 4$.

5.20. $u = 3x^2 + 4y^2 - 6x - 8y + 18$ $\varphi(x,y) = 2x - 3y + 1 = 0$.

Завдання 6. Перевірити, чи є функція $u = u(x,y,z)$ розв'язком даного диференціального рівняння (φ та ψ - довільні , достатню кількість разів диференційовні функції).

6.1. $u = x + \varphi(xy)$; $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} - x = 0$.

6.2. $u = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$; $2x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0$.

6.3. $u = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

6.4. $u = \varphi(x - y, y - z)$; $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

6.5. $u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$; $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

6.6. $u=\varphi(x)\psi(y);\quad u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

6.7. $u=\varphi(x+y)+\psi(x-y);\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

6.8. $u=x\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)+y\,\psi\left(\dfrac{x}{y}\right);\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

6.9. $u=\varphi(xy)+\psi\left(\dfrac{x}{y}\right);\quad x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

6.10. $u=x+y+\varphi(xy);\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}-x+y=0.$

6.11. $u=\sqrt{x^2+y^2}\,\varphi\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right);$

$(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-u=0.$

6.12. $u=\sin y+\varphi(\sin x-\sin y);\quad \sec x\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sec y\dfrac{\partial u}{\partial y}-1=0.$

6.13. $u=x^5\,\varphi\left(\dfrac{y}{x^2}\right);\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y\dfrac{\partial u}{\partial y}-5z=0.$

6.14. $u=y\,\varphi\left(x^2-y^2\right);\quad y^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+xy\dfrac{\partial u}{\partial y}-xu=0.$

6.15. $u=xy+\varphi\left(x-y\right);\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-x-y=0.$

6.16. $u=\varphi\left(x-2\right)\psi\left(y+2\right);\quad u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}.$

6.17. $u=\varphi\left(2x+y\right)+\psi\left(x-2y\right);\quad 2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial xy}=0.$

6.18. $u=x\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right);\quad \dfrac{x}{y}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{x}{y}u=0.$

6.19. $u=\dfrac{x}{y}\varphi\left(xy\right);\quad y\dfrac{\partial u}{\partial x}-x\dfrac{\partial u}{\partial y}-\left(\dfrac{x^2+y^2}{y^2}\right)u=0.$

6.20. $u=x-y+\varphi\left(xy\right);\quad x\dfrac{\partial u}{\partial x}-y\dfrac{\partial u}{\partial y}-x+y=0.$

Самостійна робота № 6.

7.Числові ряди

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ -- **числовий ряд,** $a_n \in \square$ -- *загальний член* числового ряду.

Необхідна умова збіжності ряду.

Якщо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

збіжний (сума дорівнює скінченному числу), то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

!!! Наслідок. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$,то ряд розбіжний.

Якщо ряд знакосталий, тоді для дослідження його збіжності використовується одна з наступніх ознак.

Узагальнена ознака порівняння.

Якщо $a_n \sim C \cdot \frac{1}{n^p}$, $n \to \infty$, де C, p- деякі сталі, то ряд збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$.

Ознака Даламбера.

Якщо $a_n > 0,\ n = 1,2,\ldots$ і $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$.

Ознака Коші радикальна.

Якщо $a_n \ge 0,\ n = 1,2,\ldots$ і $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$.

Ознака Коші інтегральна. $a_n = a(n) > 0$. Ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ і інтеграл $\int_{n_0}^{\infty} a(n)dn$ збігаються і розбігаються одночасно.

Якщо ж ряд знакозмінний, тоді для збіжності використовуємо поняття абсолютної та умовної збіжності. Якщо ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a|_n$ збігається, тоді ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **збігається абсолютно**. Якщо ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a|_n$ розбігається, а ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

збігається, тоді ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ **збігається умовно**. Для ряду $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a|_n$ використовуємо вищезгадані ознаки, а якщо він розбігається, тоді для знакозмінного $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ використовуємо наступні ознаки.

Якщо ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, тоді застосовуємо

Ознака Лейбніца збіжності знакозмінного ряду.

Нехай виконуються умови: 1) $a_n \geq 0,\ n = 1,2,\ldots;$

2) $a_n \geq a_{n+1} \forall n \geq n_0$; 3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ збіжний.

Для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, використовуємо

Ознака Діріхле збіжності знакозмінного ряду.

Нехай виконуються умови: 1) $a_n \to 0, n \to \infty$ монотонно, 2)

$\forall N \in \square\ \exists C > 0 : \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \right| < C$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається.

Завдання 1. Дослідити ряди на збіжність.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n(n+1)}$.

1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

1.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

1.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}$.

1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^{\frac{n}{3}}$.

1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n$.

1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg \frac{1}{n} \right)^n$.

1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$.

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$.

1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+1}$.

1.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n(n-2)}$.

1.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\sqrt{n}}$.

1.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^2+1}$.

1.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2\left(3^{-n}\right)}{n^2}$.

1.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(arctg\frac{1}{n}\right)^2}{n\sqrt{n}}$.

1.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(3^{-n}\right)}{n^2}$

Завдання 2. Дослідити ряди на абсолютну та умовну збіжність.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3n}{2n+5}\right)^n$.

2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!4^{n-1}}$.

2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n+1)(n+2)}$.

2.5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^n}$.

2.6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{10}}{(\ln n)^n}$.

2.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$.

2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$.

2.9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-10)^{-n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n^2}$.

2.10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{(2n-1)!}$.

2.11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^{n+1}e^{-n^2+2n}$.

2.12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^n\left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{n^2}$.

2.13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

2.14. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$.

2.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n arctg\, n}{n^3+3n}$.

2.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{7n^3-3n+1}$.

2.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 3n}{n^3+3}$.

2.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(n^2-1\right)}{n^5+n^2+1}$

2.19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{n}{n^3-1}\right)$.

2.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cos 5n}{5n^3-2n^2+1}$

8.Функціональні ряди

Степеневі ряди

Для кожного **степеневого ряду**

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

існує **інтервал збіжності** $|x - x_0| < R$, всередині якого даний ряд збіжний, а зовні розбіжний, на межах інтервала збіжність ряду досліджуються окремо. **Радіус збіжності** R можна знайти за допомогою формул

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{або} \quad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Всередині свого інтервалу збіжності степеневі ряди можна почленно диференціювати і інтегрувати.

Завдання 3. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$.

3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n}$.

3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n n}{3^n+5^n}$.

3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(3x-4)^n}{3^n}$.

3.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\left(\frac{n}{3}\right)^n\cdot(2x-3)^n$.

3.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4+\cos\pi n)(2x)^n}{\sqrt{n}}$.

3.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

3.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{(-2)^n+3^n}$.

3.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x-4)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

3.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x+1)^n}{\ln n}$.

3.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{2^{n^2}}$.

3.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi^n}{8^n}\cdot(x-2)^n$.

3.13. $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi}{4^n}\cdot(\pi x-1)^n$.

3.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{n-1}}{n^2+1}\cdot(3x)^n$.

3.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi^n}{2^{2n}}\cdot(x+1)^n$.

3.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(4^n+\frac{\cos\pi n}{n}\right)\cdot(x-\pi)^n$.

3.17. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^3}(x+1)^n$.

3.18. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi^n}{6^n}\cdot(x-2)^n$.

3.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n n^2}{2^n+7^n}$.

3.20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^3+1)(2x+1)^n}{3^n}$.

Ряди Тейлора.

Нехай функція $\mathrm{f}(x)$ має похідні усіх порядків в околі точки x_0 і залишковий член формули Тейлора для функції $f(x)$ в точці x_0 задовольняє співвідношення $R_n(x)\to 0, n\to\infty$. Тоді $f(x)$ може бути записана у вигляді степеневого ряду за степенями $(x-x_0)$:

$$\boxed{\mathrm{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{f}^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$ -- **ряд Тейлора**.

Якщо $x_0=0$, то відповідний степеневий ряд називають *рядом Маклорена*: $\mathrm{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{f}^{(n)}(0)}{n!}(x)^n$.

Розклад у ряд Маклорена основних елементарних функцій:

$$(1)\ e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad (R=\infty).$$

$$(2)\ \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}\quad (R=\infty).$$

$$(3)\ \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\quad (R=\infty).$$

$$(4)\ (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\qquad (R=1).$$

$$(5)\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}\qquad (R=1).$$

І додатково запишемо ще одну формулу, яка часто використовується

$$(6)\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\ (R=1)$$

Завдання 4. Розкласти задані функції в ряд Маклорена і вказати радіус збіжності.

4.1. $\mathrm{f}(x)=3^x$.

4.2. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$. Вказівка. Розкласти $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ по степенях x, а потім його домножити на $(1+x)$.

4.3. $\mathrm{f}(x)=4^{-x^3}$.

4.4. $\mathrm{f}(x)=\cos^2 x$.

4.5. $\mathrm{f}(x)=\sin x^2$.

4.6. $\mathrm{f}(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

4.7. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4.8. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

4.9. $\mathrm{f}(x)=\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)$.

4.10. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$. Вказівка. Розкласти даний дріб в суму найпростіших.

4.11. $\mathrm{f}(x)=(1+x)\ln(1+x)$.

4.12. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

4.13. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{2}{1-3x^2}$.

4.14. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

4.15. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{2}{1+3x^2}$.

4.16. $f(x)=\cos 3x^3$.

4.17. $\mathrm{f}(x)=x\sin x^4$.

4.18. $\mathrm{f}(x)=x\sqrt[3]{1+x^2}$.

4.19. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{\sqrt[6]{1-3x^5}}$.

4.20. $\mathrm{f}(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-2x^3}}$.

Завдання 5.

5.1. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\ln x$ у ряд Тейлора за степенями $(x-1)$.

5.2. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{x}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+1)$.

5.3. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+4)$.

5.4. Розкласти $\mathrm{f}(x)=e^x$ у ряд Тейлора за степенями $(x+2)$.

5.5. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\sqrt{x}$ у ряд Тейлора за степенями $(x+4)$.

5.6. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\cos x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.7. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\cos^2 x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5.8. Розкласти $\mathrm{f}(x)=chx$ у ряд Маклорена.

5.9. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=\ln\left(1-x^2\right)$ у ряд Маклорена.

5.10. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dx$ у ряд Маклорена.

5.11. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=\ln\left(x+2\right)$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x+1\right)$.

5.12. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x}$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x+5\right)$.

5.13. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x+2\right)$.

5.14. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=e^{-x}$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x-2\right)$.

5.15. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=\sqrt[3]{x}$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x+4\right)$.

5.16. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=\sin 2x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.17. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=\sin^2 x$ у ряд Тейлора за степенями $\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.18. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=shx$ у ряд Маклорена.

5.19. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=\ln\left(x^2-7x+6\right)$ у ряд Маклорена.

5.20. Розкласти $\mathrm{f}\left(x\right)=\int\limits_0^x \sin t^2 dx$ у ряд Маклорена.

Ряди Фур'є.

Якщо функція $\mathrm{f}(x)$ є кусково-гладенькою на інтервалі $(-\pi,\pi)$, періодичною з періодом $2l$, то функція $\mathrm{f}(x)$ у кожній точці x неперервності може бути представлена своїм рядом Фур'є :

$$\boxed{\mathrm{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)}, \text{ де}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=0,1,2,\ldots,$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ \mathrm{n}=1,2,\ldots$$

Розклад парної функції.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ парна функція з періодом $2l$, то

$$\boxed{\mathrm{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}},\ \text{де}\ a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}\mathrm{f}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ n=0,1,2,\ldots$$

Розклад непарної функції.

Якщо $\mathrm{f}(x)$ непарна функція з періодом $2l$, то

$$\boxed{\mathrm{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}},\quad \text{де}\ b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}\mathrm{f}(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ \mathrm{n}=1,2,\ldots$$

Завдання 6. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)$. Зобразити графік функції і суми ряду Фур'є.

6.1. $f(x)=\begin{cases}x+2\pi, & -\pi<x\le 0;\\ x, & 0<x<\pi.\end{cases}$ **6.2.** $f(x)=\pi-x, x\in(0,2\pi)$.

6.3. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}, x\in(-\pi,\pi)$. **6.4.** $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x<0;\\ 0, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

6.5. $f(x)=|x|, -\pi<x<\pi$. **6.6.** $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0;\\ 2, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

6.7. $f(x)=\pi+x, -\pi<x<\pi$. **6.8.** $f(x)=\begin{cases}x+\pi, & -\pi<x\le 0;\\ x-\pi, & 0<x<\pi.\end{cases}$

6.9. $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi<x\le 0;\\ 2x, & 0<x<\pi.\end{cases}$ **6.10.** $f(x)=\begin{cases}1, & -\pi<x\le 0;\\ 2, & 0<x<\pi.\end{cases}$

6.11. $f(x)=\begin{cases}\pi+x, -\pi<x\le 0;\\ \pi-x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$ **6.12.** $f(x)=\dfrac{x}{\pi}, x\in(-\pi,\pi)$.

6.13. $f(x)=\begin{cases}\pi, \quad -\pi<x\le 0;\\ \pi-x, 0<x<\pi.\end{cases}$

6.14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+x, \quad -\pi<x\le 0;\\ \dfrac{\pi}{2}-x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$

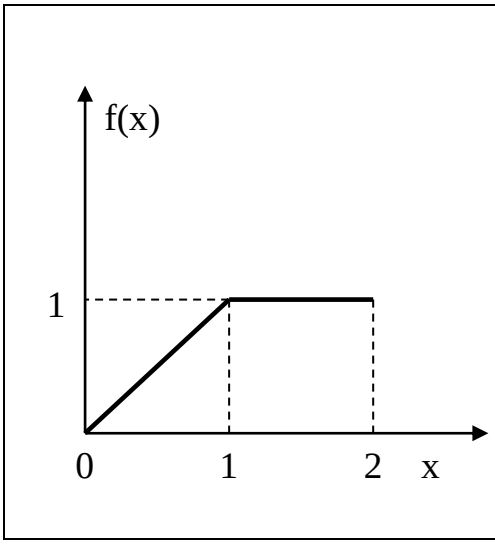
6.15. $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}, x\in(0,2\pi)$. **6.16.** $f(x)=2x, x\in(0,2\pi)$.

6.17. $f(x)=\begin{cases}2x, \quad -\pi<x\le 0;\\ -2x, \quad 0<x<\pi.\end{cases}$ **6.18.** $f(x)=\begin{cases}x, \quad 0<x<\pi;\\ \pi, \quad \pi\le x<2\pi.\end{cases}$

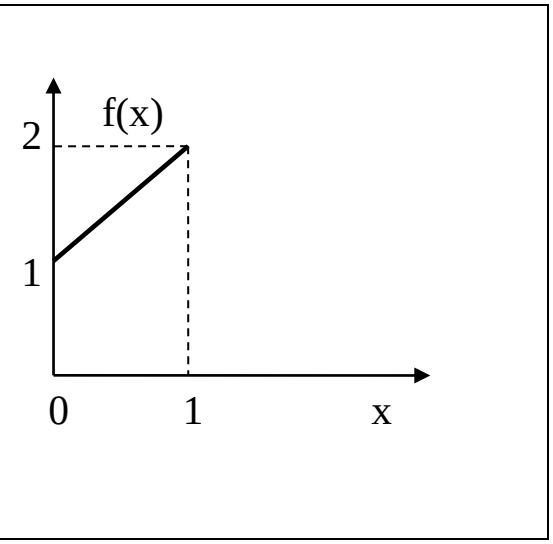
6.19. $f(x)=|\cos 2x|$. **6.20.** $f(x)=x, x\in(-\pi,\pi)$.

Завдання 7. Функцію $f(x)$, зображену графічно на інтервалі $(0,T)$, розкласти в ряд Фур'є: а) з періодом T ; б) за косинусами; в) за синусами.

7.1.

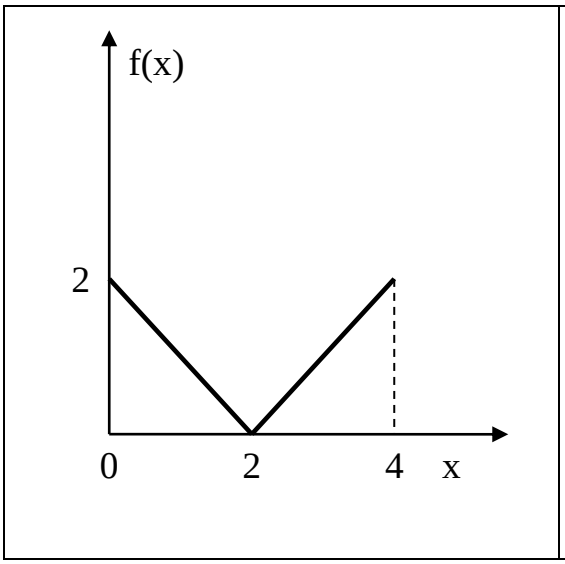


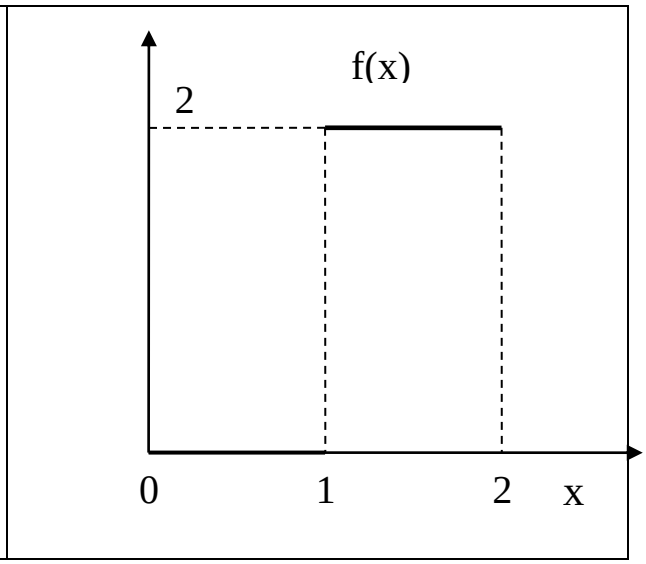
7.2.



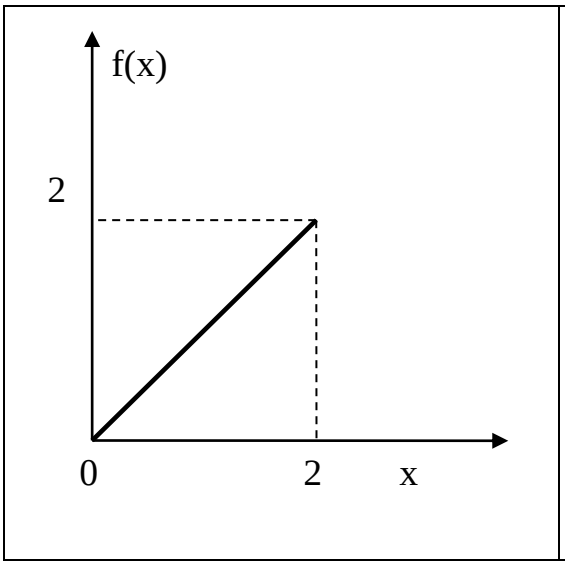
7.3.

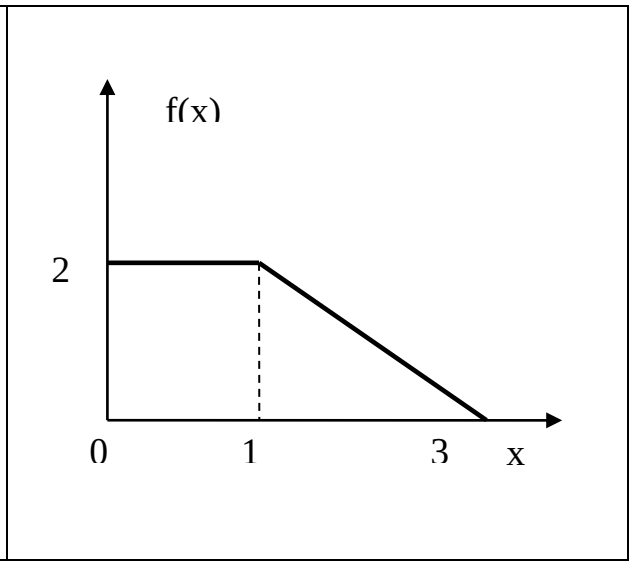
7.4.



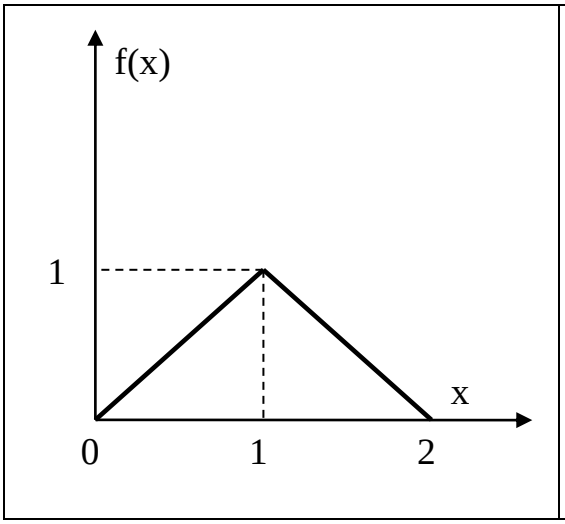


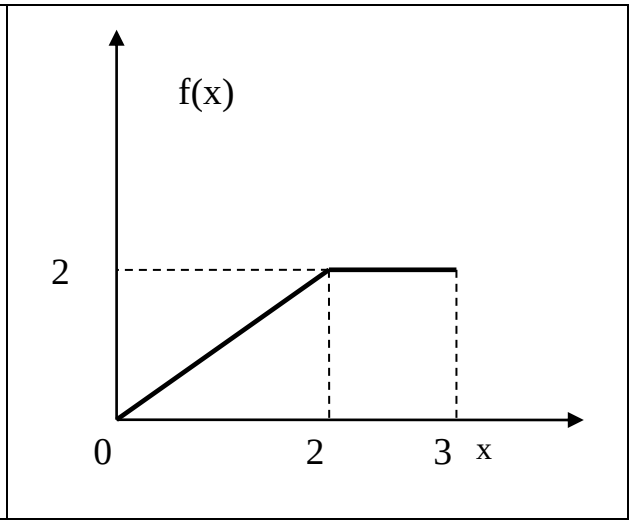
7.5. **7.6.**



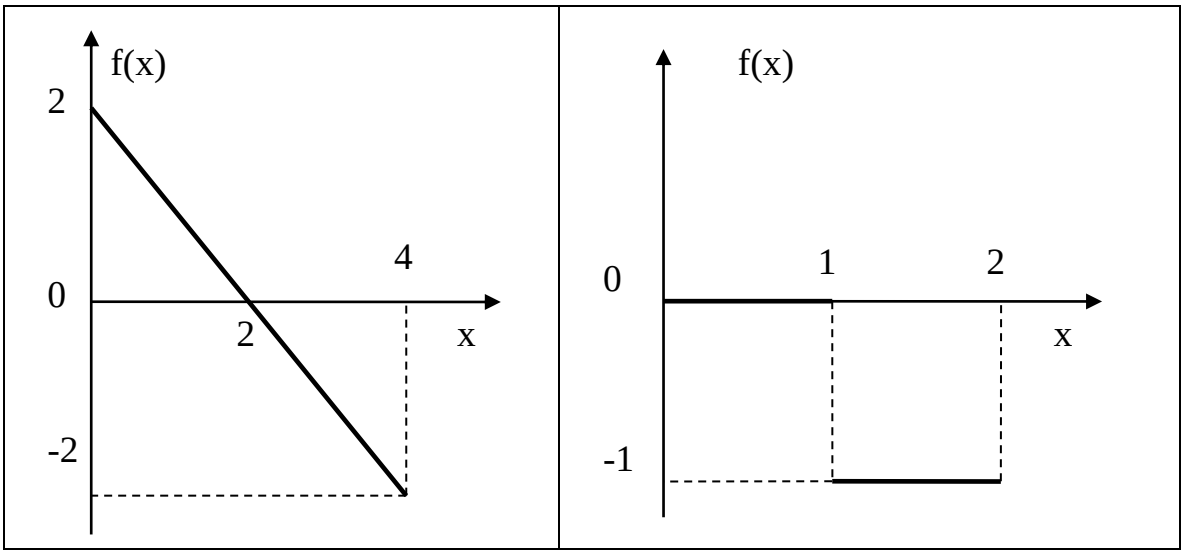


7.7. **7.8.**

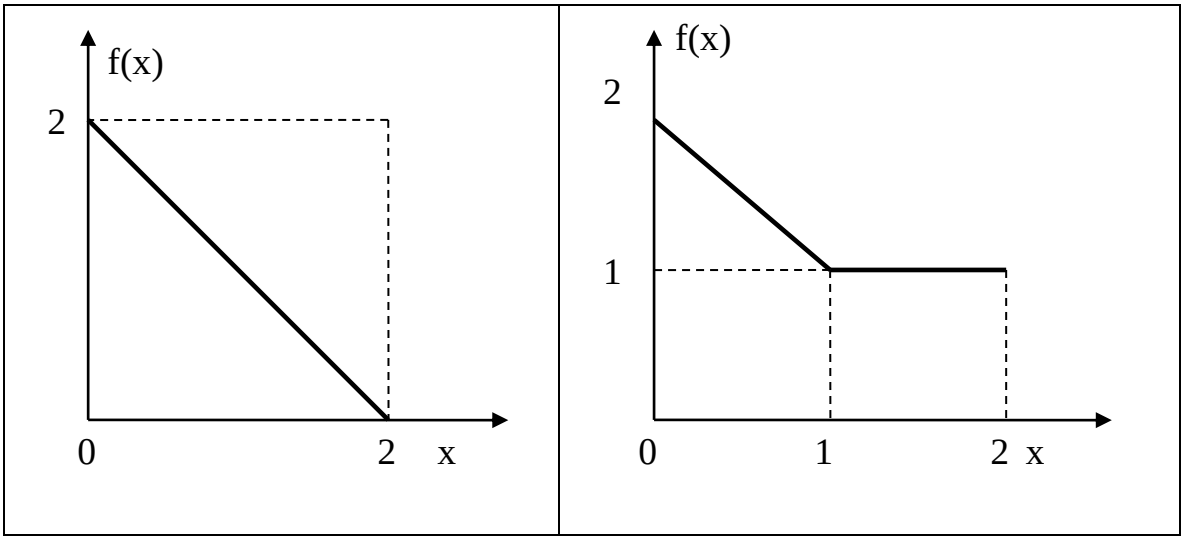




7.9. **7.10.**

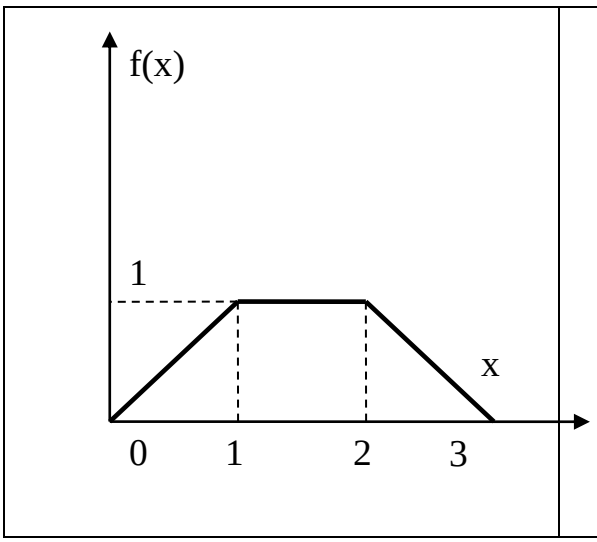


7.11.

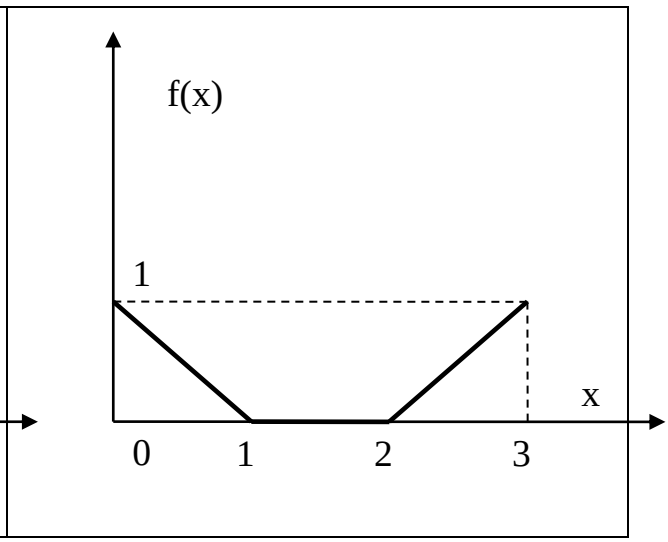


7.12

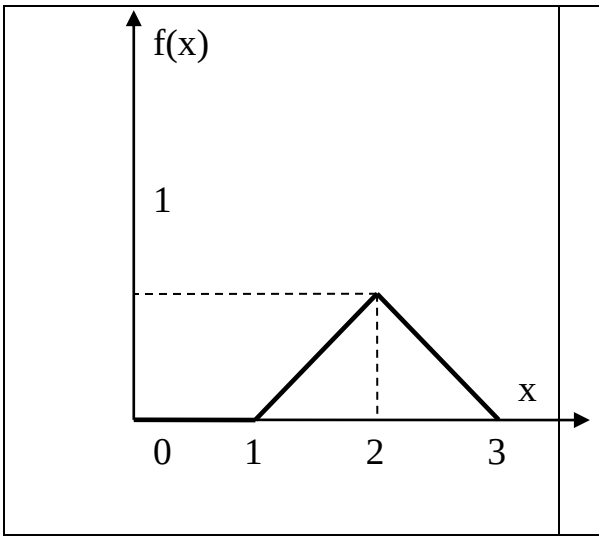
7.13.



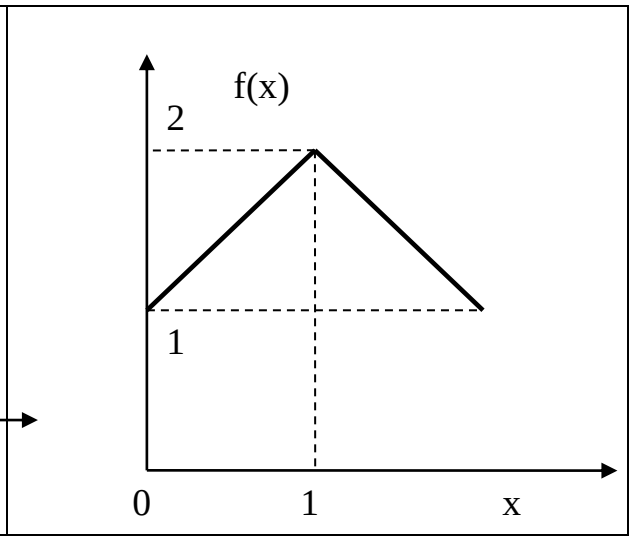
7.14.



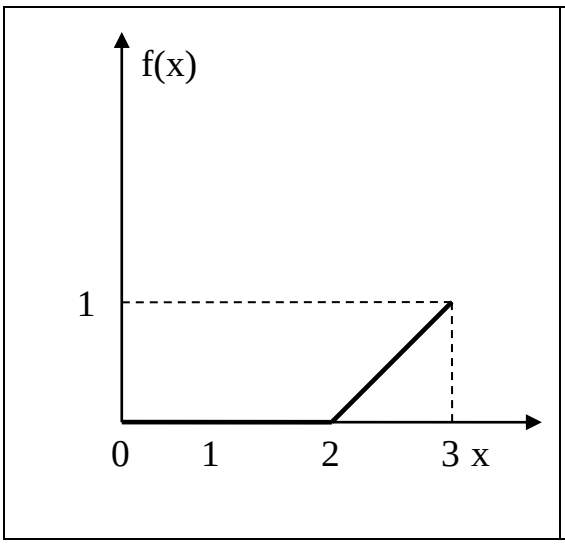
7.15.



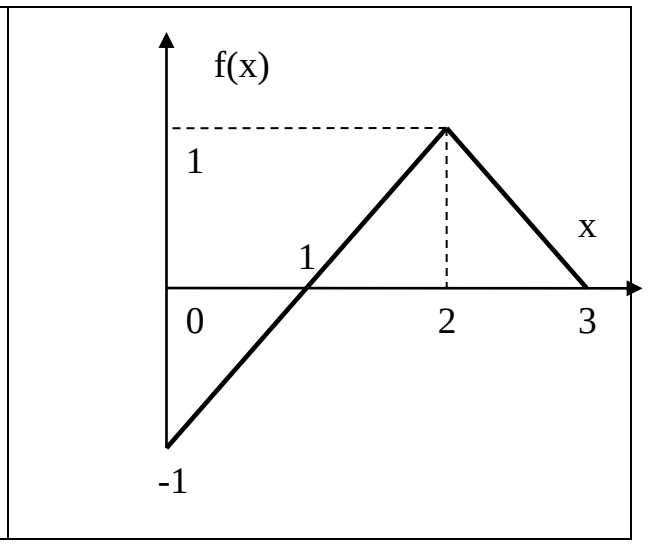
7.16.



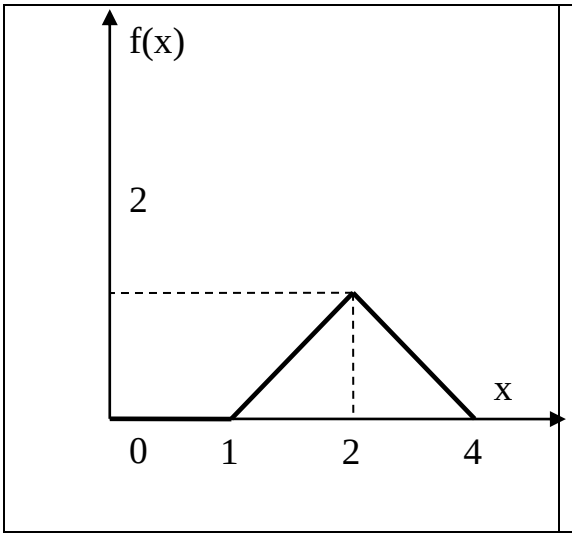
7.17.



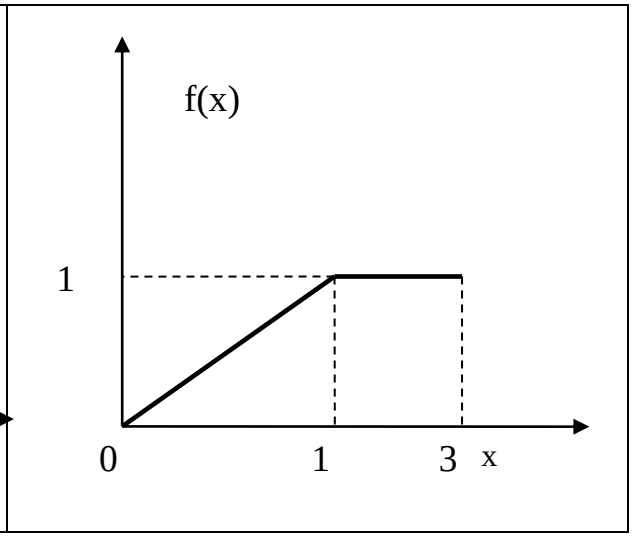
7.18.



7.19



7.20



Самостійна робота №7.

10.Кратні інтеграли

Нехай $D \subset \mathrm{R}^2$ - замкнена область, яка може бути задана нерівностями: $a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)$, де $y_1(x), y_2(x)$ - неперервні на відрізку $[a,b]$ функції. Тоді *подвійний інтеграл* по області D від неперервної функції $\mathrm{f}(x,y)$ обчислюється за формулою:

$$\iint_D \mathrm{f}(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{f}(x,y)dy$$

Інтеграл $\iint_D dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy$ чисельно дорівнює *площі* області D.

Нехай $V \subset \mathrm{R}^3$ - область, яка може бути визначена нерівностями: $x_1 \le x \le x_2, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x), \; z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, де $y_1(x), y_2(x), z_1(x,y), z_2(x,y)$ - неперервні функції. Тоді *потрійний інтеграл* по області V від неперервної функції $\mathrm{f}(x,y,z)$ обчислюється за формулою:

$$\iiint_V \mathrm{f}(x,y,z)dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \mathrm{f}(x,y,z)dz.$$

Інтеграл $\iiint_V \mathrm{f}(x,y,z)dxdydz$ чисельно дорівнює *об'єму* області V.

Завдання 1. Обчислити подвійні інтеграли.

1.1. $\iint_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}} dxdy \qquad D: 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0, y \le 0.$

1.2. $\iint_D (x+y)dxdy \quad D: 3 \le x+y \le 5,\ 2 \le xy \le 4.$

1.3. $\iint_D e^{-x}\cos y dxdy \quad D: x \le y \le 2x,\ y \le \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$

1.4. $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$ D обмежена кривими $x^2+y^2 = 2x,$ $x^2+y^2 = 2x+2y.$

1.5. $\iint_D e^{-\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}} dxdy \quad D: 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0, y \le x.$

1.6. $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy \quad D: 3 \le x-y \le 5,\ 2 \le xy \le 4.$

1.7. $\iint\limits_D e^{-x}\sin(x-y)\,dxdy \quad D: x \le y \le 2x,\ y \le \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}.$

1.8. $\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}dxdy$ D обмежена кривими $x^2+y^2 = 4x+2y-4,$ $x^2+y^2 = 2x+2y.$

1.9. $\iint\limits_D \frac{x}{y}dxdy \qquad D: 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ 1 \le \frac{x}{y} \le 2.$

1.10. $\iint\limits_D dxdy$ D обмежена кривими $y = 1-x,\ y = x-1$ $y = \sqrt{1-x^2+2x}.$

1.11. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}}dxdy \qquad D: 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x \ge 0, y \le 0$

1.12. $\iint\limits_D 3dxdy \quad D: 1 \le x+y \le 3,\ 2 \le xy \le 5$

1.13. $\iint\limits_D e^{(y-x)}dxdy \qquad D: x \le y \le 4x,\ y \le x+3, x \le 4$

1.14. $\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)dxdy$ D обмежена кривими $x^2+y^2 = -2x,$ $x^2+y^2 = -1-2x-2y.$

1.15. $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{5}{2}}dxdy \qquad D: 4 \le x^2+y^2 \le 9, -x \le y \le x$

1.16. $\iint\limits_D dxdy \qquad D: 1 \le x-y \le 3,\ 2 \le xy \le 4$

1.17. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(y+x-1)^3} \qquad D: 2-x \le y \le 5-x,\ y = 0, 2 \le x \le 5$

1.18. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, D обмежена кривими $x^2+y^2 = -2x,$ $x^2+y^2 = -2x+4y-1.$

1.19. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{1+\left(x^2+y^2\right)^2} \qquad D: 4 \le x^2+y^2 \le 9,\ 1 \le \frac{x}{y} \le 2.$

1.20. $\iint\limits_D dxdy$ D обмежена кривими $y=-x,\ x=0$ $y=-\sqrt{1-x^2+2x}$.

Завдання 2. Обчислити потрійні інтеграли.

2.1. $\iiint\limits_V ydxdydz;$ $V: x=0; x=2; y=0; y=1; z=0; z=1-y.$

2.2. $\iiint\limits_V xdxdydz;$ $V: y=0; x=1; y=10x; y=1; z=0; z=xy.$

2.3. $\iiint\limits_V zdxdydz;$ $V: x=0; y=0; z=0; x^2+y^2+z^2=1.$

2.4. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^2};$ $V: x=0; y=0; z=0; x+y+z=1.$

2.5. $\iiint\limits_V \sqrt{2}zdxdydz;$ $V: y=2x^2; y+z=2; z=0.$

2.6. $\iiint\limits_V xdxdydz;$ $V: y=0; y=x; x=1; z=0; z=\sqrt{xy}.$

2.7. $\iiint\limits_V \left(\frac{9}{16}\sqrt{x}+\sqrt{z}\right)dxdydz;$ $V: x=4y^2; x=4; z=0; z=y^2.$

2.8. $\iiint\limits_V 6xdxdydz;$ $V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=x^2+y^2.$

2.9. $\iiint\limits_V (2x+3y)dxdydz;$ $V: x=0; y=0; x+3y=6; z=0; z=\frac{y}{3}.$

2.10. $\iiint\limits_V x^2ydxdydz;$ $V: x=0; y=1; y=\sqrt{x}; z=0; z=1-y^2.$

2.11. $\iiint\limits_V 2(x^2+2y^2)dxdydz;$ $V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=3y.$

2.12. $\iiint\limits_V y^2dxdydz;$ $V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=10(y+3x).$

2.13. $\iiint\limits_V xdxdydz;$ $V: y=\sqrt{x}; y=2\sqrt{x}; x+2z=4; z=0.$

2.14. $\iiint\limits_V xdxdydz;$ $V: x+6y=6; x=0; y=0; z=0; z=9-x^2\ (x\geq 0).$

2.15. $\iiint\limits_V 4zdxdydz;$ $V: x=0; y=0; 3x+y=6; z=0; z=\frac{1}{4}y^2.$

2.16 $\iiint\limits_V ydxdydz;$ $V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=x^2+y^2.$

2.17. $\iiint\limits_V x^2 dxdydz; \quad V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=3(y+4x).$

2.18. $\iiint\limits_V ydxdydz; \qquad V: y=0; y+x=1; z=0; z=\sqrt{xy}.$

2.19. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x-y+2z)^2}; \qquad V: x=0; y=0; z=0; x-y+2z=1.$

2.20. $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz; V: x=0; y=0; x+y=1; z=0; z=x^2+y^2.$

11.Векторний аналіз

Криволінійні інтеграли першого роду

Криволінійним інтегралом першого роду називається $\int\limits_L f(x,y)dl$, якщо $f(x,y,z)$ - функція, визначена і неперервна в точках гладенької кривої L.

Нехай $L: \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t); \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$ задається параметрично, тоді

криволінійний інтеграл першого роду зводиться до визначеного інтегралу

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

!!! Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку кривої L.

Механічне застосування криволінійного інтегралу першого роду:

Якщо $\gamma = \gamma(x,y,z)$ - лінійна густина в точці (x,y,z) кривої L, *то маса* кривої L дорівнює

$$M = \int\limits_L \gamma(x,y,z)dl.$$

Довжину l кривої L знаходять за формулою $l = \int\limits_L dl$.

Завдання 3.

Обчислити криволінійні інтеграли першого роду

3.1. $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$; L – відрізок, що з'єднує точки $A(0,0)$ та $B(1,2)$.

3.2. $\int\limits_L (x-y)dl; \quad L: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos t; \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

3.3. $\int\limits_L xyzdl; \qquad L: \begin{cases} x = t; \\ y = \dfrac{2}{3}\sqrt{2t^3}; \\ z = \dfrac{1}{2}t^2; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$

3.4. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)^n dl; \quad n \in N; \quad L: \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

3.5. $\int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl; \quad L: \begin{cases} x = 5\cos^3 t; \\ y = 5\sin^3 t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

3.6. $\int\limits_L zdl; \qquad L: \begin{cases} x = t\cos t; \\ y = t\sin t; \\ z = t; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$

3.7. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dl; \qquad L: \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \\ z = bt; \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

3.8. $\int\limits_L xyzdl;$ L – відрізок, що з'єднує точки $A(1,1,1)$ та $B(4,4,4)$.

3.9. $\int\limits_L xdl; \qquad L: \begin{cases} x = 3t; \\ y = 3t^2; \\ z = 2t^3; \end{cases} 0 \le t \le 1.$

3.10. $\int\limits_L x^2 ydl,$ де L – границя трикутника з вершинами в точках $O(0,0); \quad A(2,0); \quad B(1,2).$

3.11. $\int\limits_L \dfrac{dl}{\sqrt{1+4x^2}}$; **L :** $y = x^2, x \in [0;1]$ **.**

3.2. $\int\limits_L (x+y)dl; \quad L: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos t; \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi.$

3.13. $\int\limits_L \dfrac{x^2}{yz} dl; \qquad L: \begin{cases} x = \dfrac{4}{3}\sqrt{t^3}; \\ y = t; \\ z = \dfrac{1}{2}t^2; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$

3.14. $\int\limits_L \dfrac{dl}{\left(x^2+y^2\right)^4}; \qquad L: \begin{cases} x = 4\cos t; \\ y = 4\sin t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

3.15. $\int\limits_L xydl; \quad L: \begin{cases} x = 1 - \cos 2t; \\ y = 1 + \cos 2t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}.$

3.16. $\int\limits_L \left(x-y\right)dl; \qquad L: \begin{cases} x = t + \cos^2 t; \\ y = t + \sin^2 t; \\ z = t; \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}.$

3.17. $\int\limits_L z\sin\left(x^2+y^2-z^2\right)dl; \qquad L: \begin{cases} x = a\cos t; \\ y = a\sin t; \\ z = bt; \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$

3.18. $\int\limits_L zdl;$ L – відрізок, що з'єднує точки $A(1,-2,3)$ та $B(3,-3,6)$.

3.19. $\int\limits_L \dfrac{xy}{z} dl; \qquad L: \begin{cases} x = 2t; \\ y = t^2; \\ z = \dfrac{1}{3}t^3; \end{cases} \quad -2 \le t \le 0.$

3.20. $\int\limits_L \dfrac{x^2}{yz} dl,$ де $L: \begin{cases} x = e^t \cos t; \\ y = e^t \sin t; \\ z = e^t \end{cases} \quad -1 \le t \le 1.$

Криволінійні інтеграли другого роду.

Криволінійним інтегралом другого роду називається інтеграл $\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$,де функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні в точках гладенької кривої L.

Якщо крива задана параметрично $L: \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \\ z = z(t); \end{cases} \alpha \le t \le \beta,$

що проходиться в напрямку зростання параметру t, то криволінійний інтеграл другого роду обчислюється за формулою

$$\int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right)dt.$$

!!!При зміні напрямку обходу кривої L цей інтеграл змінює свій знак на обернений.

У випадку плоскої кривої :

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt$$

Механічне застосування криволінійного інтегралу другого роду.

Роботу сили $\overline{F} = \{P,Q,R\}$ вздовж кривої L можна обчислити за допомогою формули

$$A = \int\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Незалежність інтегралу від шляху інтегрування.Нехай контур інтегрування L цілком лежить у деякій однозв'язній області D, в якій функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми похідними першого порядку.

Інтеграл $\int\limits_L Pdx + Qdy$ не залежить від шляху інтегрування тоді і тільки тоді, коли в усіх точках D

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Формула Гріна. Нехай L - замкнений простий кусково-гладенький контур, що обмежує однозв'язну область D, функції $P(x,y), Q(x,y)$ неперервні разом зі своїми похідними першого порядку в області D і на її границі. Тоді має місце формула Гріна

$$\boxed{\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.}$$

Завдання 4.

4.1. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по просторовій кривій L, що задана параметрично

$$\int_L xydx + x^2zdy + xyzdz; \qquad L: \begin{cases} x = e^t; \\ y = e^{-t}; \\ z = t^2; \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

4.2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду по просторовій кривій L, що задана параметрично

$$\int_L \frac{yz}{x}dx + e^y dy + \sin zdz; \qquad L: \begin{cases} x = t^3; \\ y = t; \\ z = t^2; \end{cases} \quad 2 \le t \le 3.$$

4.3. Обчислити $\int_L \cos xdx + e^{-y}dy + z^2dz$, де L - відрізок прямої від точки $(-1,2,4)$ до точки $(6,0,-2)$.

4.4. Обчислити $\int_L (x^2 - y^2)dx + (x^2 + 2y^2)dy$, де L – частина кола $x^2 + y^2 = 9$ від точки $A(0,-3)$ до точки $B(3,0)$.

4.5. Обчислити $\int_L 2xyz^3dx + (x^2z^2 + 2y)dy + 3x^2yz^2dz$, де L – відрізок прямої від точки $(0,0,0)$ до точки $(1,2,3)$.

4.6. Знайти роботу сили $\bar{F} = (2xy + y)\bar{i} + (x^2 + xy)\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y = 4 - 2x^2$ від точки $A(\sqrt{2},0)$ до точки $B(-\sqrt{2},0)$.

4.7. Знайти роботу сили $\bar{F} = 2y\bar{i} - 3x\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ від точки $A(-2,0)$ до точки $B(0,2)$.

4.8. Знайти роботу сили $\bar{F} = 4xy\bar{i} + 2y\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y = \sin x$ від точки $A(\pi,0)$ до точки $B(0,0)$.

4.9. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L (x + y)dx - (x - y)dy$ по еліпсу $L: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, застосовуючи формулу Гріна.

4.10. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L (xy + x + y)dx - (xy + x - y)dy$ по колу $L: x^2 + y^2 = 2x$, застосовуючи формулу Гріна.

4.11. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2\,dy$, де L – контур трикутника з вершинами в точках $A(1,1);B(2,2);C(1,3)$, застосовуючи формулу Гріна.

4.12. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L y^2dx-x^2dy$ по колу $L: x^2+y^2=2y$, застосовуючи формулу Гріна.

4.13. Знайти роботу сили $\overline{F}=2y\bar{i}-\left(x^3+2x^2\right)\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y=\ln x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

4.14. Знайти роботу сили $\overline{F}=e^{y-x}\bar{i}-e^{x-y}\,\bar{j}$ при переміщенні вздовж прямої від точки $A(1,1)$ до точки $B(3,2)$.

4.15. Знайти роботу сили $\overline{F}=\left(x+\sqrt{2y}\right)\bar{i}-(y+2x)\bar{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y=\dfrac{x^2}{2}$ від точки $A(2,2)$ до точки $B\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

4.16. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} yxdx+\dfrac{x^2-y^2}{2}dy$ не залежить від шляху і обчислити його.

4.17. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(1,-1)}^{(1,1)}-(x-y)dx+(x-y)dy$ не залежить від шляху і обчислити його.

4.18. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)}\left(x^4+4xy^3\right)dx+\left(6x^2y^2-5y^4\right)dy$ не залежить від шляху і обчислити його.

4.19. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(2,4)}\left(x^2+y^2\right)xdx-\left(x^2+y^2\right)ydy$ не залежить від шляху і обчислити його.

4.20. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(-1,1)}^{(2,2)}\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{y}{x^2}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$ не залежить від шляху і обчислити його. (Шлях інтегрування не проходить через початок координат.)

Поверхневі інтеграли першого роду.

Поверхневим інтегралом першого роду від функції $f(x,y,z)$ по кусково-гладенькій поверхні σ називається $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma$.

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна на гладкій поверхні σ, що задається рівнянням $z=z(x,y)$ і однозначно проектується на площину OXY в область D_{XY}, то поверхневий інтеграл першого роду можна обчислити за формулою

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{D_{XY}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Справедливі аналогічні формули у випадку, коли поверхня σ однозначно проектується на площину OYZ чи OXZ.

Площу S поверхні σ можна знайти таким чином:

$$S=\iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{D_{XY}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Випадок параметричного задання поверхні

Якщо σ - кусково-гладенька двостороння поверхня , задана параметрично

$$\sigma:\begin{cases} x=x(u,v); \\ y=y(u,v); \quad (u,v)\in\Omega, \\ z=z(u,v); \end{cases}$$

$f(x,y,z)$ - функція, неперервна в точках поверхні σ, то

$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint\limits_{\Omega} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$, де

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Відповідно площа S поверхні σ знаходиться так:

$$S=\iint\limits_{\sigma} d\sigma = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Завдання 5.

5.1. Обчислити $\iint\limits_{S}(x^2+z)d\sigma$, де S - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2;\quad z\ge 0$.

5.2. Обчислити $\iint\limits_S (6x+4y+3z)d\sigma$, де S - частина площини $x+y+2z=1$, що лежить в першому октанті.

5.2. Обчислити $\iint\limits_S yd\sigma$, де S - частина поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2$, що лежить в першому октанті.

5.3. Обчислити $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{(1+x+z)^3}$, де S - частина площини $x+y+z=1$, що лежить в першому октанті.

5.4. Обчислити $\iint\limits_S x^2 d\sigma$, де S - бічна поверхня конуса $z=\sqrt{x^2+y^2};\quad 0\le z\le 2$.

5.5. Знайти площу частини поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, розташованої всередині циліндра $2y=x^2+y^2$.

5.6. Знайти площу частини поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вирізаної з неї поверхнею $2x=x^2+y^2$.

5.7. Обчислити $\iint\limits_S (x^2+y^2)d\sigma$ де S - частина поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2};\quad 0\le z\le 1$.

5.8. Знайти площу частини площини $z=4+2x+3y$, вирізаної з неї поверхнями $x^2+y^2=4;\quad y=0;\quad y=2x$ (I октант).

5.9. Обчислити $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{x^2+y^2+z^2}$ де S - частина циліндричної поверхні $x^2+y^2=R^2$, обмежена площинами $z=0$ і $z=h$.

5.10. Обчислити $\iint\limits_S x^2yzd\sigma$, де S - частина площини $x+y+z=1$, розташована в першому октанті.

5.11. Знайти площу поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z=\sqrt{x^2+y^2}, z=0, z=3$.

5.12. Обчислити $\iint\limits_S yd\sigma$, де S - півсфера $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

5.13. Обчислити площу поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z=x, x+y=1, y=0, x=0$.

5.14. Знайти площу частини параболічного циліндру $y^2=6x$, що задовольняє умовам $0\le z\le 2; 0\le x\le 2$. (Спроектувати поверхню на площину OYZ.)

5.15. Обчислити $\iint\limits_S y d\sigma$, де S - частина параболічного циліндру $y^2 = 6x$, що задовольняє умовам $0 \le z \le 2; 0 \le x \le 2$.

5.16. Обчислити $\iint\limits_S \frac{\partial \sigma}{\sqrt{1-x^2}}$, де S - частина циліндру $x^2 + y^2 = 1$, що задовольняє умовам $-2 \le z \le 2; y \ge 0$.

5.17. Обчислити $\int\limits_S \frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, де S - границя тетраедра $x + y + z \le 1; x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0$.

5.18. Знайти площу частини площини $z = 4 + 2x + 3y$, вирізаної з неї поверхнями $x^2 + y^2 = 4; \quad y = x; \quad y = 2x$ (I октант).

5.19. Обчислити $\iint\limits_S \frac{d\sigma}{x^2 + y^2}$ де S - частина циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = 4$, обмежена площинами $z = 0$ і $z = 5$.

5.20. Обчислити $\iint\limits_S (x + y + z) d\sigma$, де S - частина площини $x + y + z = 2$, розташована в першому октанті.

Поверхневі інтеграли другого роду.

Нехай σ - кусково-гладенька двостороння поверхня, σ^+ - її сторона, що характеризується напрямком нормалі $\bar{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. На поверхні σ задана і неперервна векторна функція $\bar{F}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$. Поверхневим інтегралом другого роду по зовнішній стороні поверхні σ від функції $\bar{F}$ називається $\iint\limits_{\sigma_+} P dydz + Q dzdx + R dxdy$. Поверхневий інтеграл другого роду так виражається через поверхневий інтеграл першого роду:

$$\iint\limits_{\sigma^+} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iint\limits_{\sigma} \bar{F} \cdot \bar{n} d\sigma = \iint\limits_{\sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma$$

При переході до поверхні σ^- інтеграл змінює свій знак на обернений.

Якщо поверхня σ задана в параметричному вигляді, то направляючі косінуси нормалі до поверхні визначаються за формулами

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \text{де}$$

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}; \qquad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Поверхневий інтеграл другого роду можна також звести до суми трьох подвійних. Нехай σ однозначно проектується на координатні площини OXY, OXZ та OYZ відповідно в області D_{XY}, D_{XZ}, D_{YZ}, тобто може бути задана рівнянням $z = z(x,y), y = y(x,z), x = x(y,z)$. Тоді

$$\iint\limits_{\sigma^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{YZ}} f\big(x(y,z),y,z\big)dydz \pm$$

$$\pm\iint\limits_{D_{XZ}} Q\big(x,y(x,z),z\big)dxdz \pm \iint\limits_{D_{XY}} R\big(x,y,z(x,y)\big)dxdy,$$

де знаки перед подвійним інтегралом беруться відповідно ті самі, що й у $\cos\alpha, \cos\beta$ і $\cos\gamma$ відповідно.

Зауваження. Якщо поверхня задана у вигляді $z = f(x,y)$, де $f(x,y)$-диференційовна функція, то одна з нормалей до неї може бути знайдена так: $\bar{n} = \left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right\}$.

Фізичний зміст поверхневого інтегралу

Поверхневий інтеграл другого роду також називають **потоком вектора** $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ **через поверхню** σ**.** Його можна розглядати як кількість рідини чи газу, що протікає через задану поверхню σ за одиницю часу зі швидкістю $\bar{V}$.

Завдання 6.

6.1. Обчислити $\iint\limits_S (y-z)dydz + (z-x)dxdz + (x-y)dxdy$, де S - зовнішня сторона бічної поверхні конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$; $0 \le z \le H$.

6.2. Обчислити $\iint\limits_S 2xdydz + ydxdz + zdxdy$, де S - трикутник, утворений перетином площини $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ з координатними площинами (нормаль зовнішня).

6.3. Обчислити $\iint\limits_S zdxdy$, де S - верхня сторона поверхні $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9};\quad 0\le z\le 1$, що лежить у першому октанті.

6.4. Обчислити $\iint\limits_S xdydz$, де S - верхня сторона поверхні півсфери $x^2+y^2+z^2=a^2\quad (z\ge 0)$.

6.5. Обчислити $\iint\limits_S xdydz+4ydxdz+5zdxdy$, де S - верхня сторона поверхні $x+2y+\frac{z}{2}=1$, що лежить у першому октанті.

6.6. Обчислити $\iint\limits_S z^2dxdy$, де S - верхня частина поверхні параболоїда $z=\frac{3}{4}\left(x^2+y^2\right);\quad z\le 3.$

6.7. Знайти потік векторного поля $\overline{F}=\{2z-x,x-y,3x+z\}$ через замкнену поверхню $S: x+y+2z=2; x=0; y=0; z=0$.

6.8. Обчислити $\iint\limits_S xydxdy$, де S - нижня сторона трикутника $x+2y+z=1;\quad x=0;\quad y=0;\quad z=0.$

6.9.Обчислити $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+(z-2)dxdy$, де S - нижня частина поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що вирізається площиною $z=1.$

6.10. Обчислити $\iint\limits_S xz^2dxdy$, де S - зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=1$, розміщеної в першому октанті.

6.11. Обчислити $\iint\limits_S xdydz+5ydxdz+5zdxdy$, де S - нижня частина площини $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1$, розташована в першому октанті.

6.12. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

$$\vec{a}=(x+xy)\vec{i}+(y-yx)\vec{j}+(z-1)\vec{k}\quad S: z=\sqrt{x^2+y^2}\quad P: z=2.$$

6.13. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

$$\vec{a}=xy\vec{i}-3x^2\vec{j}+4\vec{k}\quad S: z=-\sqrt{x^2+y^2}\quad P: z=-1.$$

6.14. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями). $\vec{a} = 2xyz\,\vec{i} - x^2 z\vec{j} + 2\vec{k}$ $S: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $P: z = 0$

6.15. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

$$\vec{a} = (x + yz)\vec{i} + y\vec{j} + (z - xy)\vec{k} \quad S: z = -2\sqrt{x^2 + y^2} \quad P: z = -2.$$

6.16. Обчислити $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, де S - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

6.17. Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ через частину поверхні S, що вирізається площиною P (нормаль зовнішня до замкненої поверхні, утвореної даними поверхнями).

$$\vec{a} = x\vec{i} - y\vec{j} + 4\vec{k} \quad S: z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad P: z = 0.$$

6.18. Обчислити $\iint\limits_S xydzdx$, де S - нижня сторона трикутника $x + 2y + 3z = 1; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0$.

6.19. Обчислити $\iint\limits_S xz^2 dxdy$, де S - зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \le 0, y \le 0, z \ge 0$.

6.20. Знайти потік векторного поля $\overline{F} = \{2z, x + y, 3x\}$ через замкнену поверхню $S: x + 2y + 2z = 2; x = 0; y = 0; z = 0$.

Формули Стокса і Остроградського. Елементи векторного поля.

Нехай $u(x, y, z)$--скалярне поле є функцією, неперервно – диференційовною в розглядуваній області. **Градієнт функції** $u(x, y, z)$ позначатимемо $\boxed{\nabla u = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},}$ де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ („набла”).

Нехай $\overline{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ - неперервно – диференційовне векторне поле.

Дивергенцією векторного поля $\overline{F}$ називається вираз

$$\boxed{\operatorname{div}\overline{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\overline{F}, \nabla).}$$

Ротором векторного поля називається вектор

$$\operatorname{rot}\overline{F} = \left[\nabla, \overline{F}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Векторне поле $\overline{F}$ є *потенціальним*, якщо $rot\,\overline{F} = 0$. Векторне поле $\overline{F}$ є *соленоїдним*(в полі немає ні джерела, ні стоку), якщо $div\,\overline{F} = 0$. Якщо $rot\,\overline{F} = 0$, то векторне поле $\overline{F}$ безвихрове.

Теорема Остроградського.Якщо замкнена поверхня S є кусково-гладенькою і обмежує об'єм V, $\vec{n}$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до S, $\overline{F}$ - неперервно – диференційовне векторне поле в області V і на поверхні S, то має місце формула

$$\iint\limits_S P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint\limits_V \operatorname{div}\overline{F} dxdydz$$

Теорема Стокса.Якщо замкнена крива L, що обмежує поверхню S, обходиться в додатньому напрямку, а векторне поле $\overline{F}$ - неперервно-диференційовне, то має місце формула Стокса:

$$\oint\limits_L P dx + Q dy + R dz = \iint\limits_S \left(\operatorname{rot}\overline{F} \cdot \overline{n}\right) dS = \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,$$

де $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні S. векторне поле.

Завдання 7.

7.1. $\iint\limits_S xzdydz + xydxdz + yzdxdy$, де S - зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + 2y + 4z = 12$.

7.2. $\iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy$, де S - зовнішня сторона поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2};\quad 0 \le z \le H$.

7.3. $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$, де S - зовнішня поверхня кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

7.4. $\iint\limits_S \left(z^n - y^n\right)dydz + \left(x^n - z^n\right)dxdz + \left(y^n - x^n\right)dxdy$, де S - зовнішня поверхня кулі $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

7.5. Знайти потік вектора $\bar{a} = 2x\bar{i} - y\bar{j}$ через циліндричну поверхню $x^2 + y^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq H \leq z$ у напрямку зовнішньої нормалі.

7.6. Знайти потік вектора $\bar{a} = x^2\bar{i} + x\bar{j} + xz\bar{k}$ через поверхню тіла, обмеженого параболоїдом $y = x^2 + z^2$ і площинами $x = 0, y = 1, z = 0$, орієнтовану в напрямку зовнішньої нормалі.

7.7. Знайти потік вектора $\bar{a} = y\bar{i} + z^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через усю поверхню тіла $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$, орієнтовану в напрямку зовнішньої нормалі.

7.8. Функція $u = u(x, y, z)$, для якої виконується $\Delta u = 0$, називається *гармонічною.* Довести, що для гармонічної функції трьох змінних виконується

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial x} dydz + \frac{\partial u}{\partial y} dzdx + \frac{\partial u}{\partial x} dxdy = 0,$$

де S - деяка замкнена гладенька поверхня.

7.9. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{F} = xy\bar{i} + x\bar{j} + y^2\bar{k}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ z = y. \end{cases}$.

7.10. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{F} = x\bar{i} + z^2\bar{j} + y\bar{k}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1; \\ z = 2x - y - 1. \end{cases}$

7.11. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{F} = 7x\bar{i} - x\bar{j} + yz\bar{k}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 6; \\ z = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

7.12. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{F} = (x - 2z)\bar{i} + (x + 3y + z)\bar{j} + (5x + y)\bar{k}$ вздовж замкненого контуру $L: \begin{cases} x + y + z = 1; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$

7.13. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\bar{F} = (x^2 - yz)\bar{i} + (y^2 - xz)\bar{j} + (z^2 - xy)\bar{k}$ вздовж замкненого контуру

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

7.14. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F} = \left(y + xz\right)\vec{\mathrm{i}} + 2x\vec{j} + \left(z^2 - xy\right)\vec{k}$ вздовж замкненого контуру

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ z = 3. \end{cases}$$

7.15. За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\overline{F} = \left(y - \sin z\right)\vec{\mathrm{i}} + \left(2x - y^2\right)\vec{j} + \left(x - 2z\right)\vec{k}$ вздовж замкненого контуру

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

7.16. За допомогою формули Стокса обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L \left(y + z\right)dx + \left(z + x\right)dy + \left(x + y\right)dz$, де L - еліпс, заданий параметрично: $x = a\sin^2 t,\ y = 2a\sin t\cos t,\quad z = a\cos^2 t,\ 0 \le t \le \pi$.

7.17. Перевірити потенціальність векторного поля $\overline{F} = \left\{2xy + z, x^2 + z, x + y\right\}$ та знайти його потенціал.

7.18. Перевірити потенціальність векторного поля $\overline{F} = \left\{\dfrac{2x}{x^2 + z^2}, 2z, \dfrac{2z}{x^2 + y^2} + 2y\right\}$ та знайти його потенціал.

7.19. Перевірити потенціальність векторного поля $\overline{F} = \left\{x^2 - \dfrac{y}{x}, 2ye^z - \ln x, y^2e^z - \cos z\right\}$ та знайти його потенціал.

7.20. Перевірити потенціальність векторного поля $\overline{F} = \left\{\dfrac{zy^2}{x} - \cos\left(x - z\right), 2zy\ln x, y^2\ln x + \cos\left(x - z\right)\right\}$ та знайти його потенціал.

Приклади розв'язання задач.

Самостійна робота 1. Комплексні числа.

1. Виконати дії $\dfrac{\left(7-5i^{207}\right)^3\left(-2+3i\right)^7}{\left(3i^{16}+3i^{21}\right)^{200}}$.

Розглянемо кожну дужку окремо. Отже, $z_1 = 7-5i^{207} = 7-5ii^{206} =$

$= \begin{vmatrix} 206 \not\vdots 4 \\ i^{206} = -1 \end{vmatrix} = 7+5i$. Знайдемо модуль і головне значення аргументу цього

комплексного числа: $x_1 = 7 > 0,\ y_1 = 5,\ \ |z_1| = \sqrt{84},\ \ \arg z_1 = arctg\,\dfrac{5}{7}.$

Знайдемо модуль і аргумент другого комплексного числа $z_2 = -2+3i$:

$x_2 = -2 < 0,\ y_2 = 3,\ \ |z_2| = \sqrt{13},\ \ \arg z_2 = \pi - arctg\,\dfrac{3}{2}.$

Третя дужка містить комплексне число $z_3 = 3i^{16}+3i^{21} = 3i^{16}+3ii^{20} =$

$= \begin{vmatrix} 20 \div 4 \\ 16 \div 4 \\ i^{20} = 1 \end{vmatrix} = 3+3i.$

$x_3 = 3 > 0,\ y_2 = 3,\ \ |z_3| = 3\sqrt{2},\ \ \arg z_3 = arctg1 = \dfrac{\pi}{4}.$

Отже, як відповідь ми отримаємо комплексне число в показниковій формі, а саме

$$\frac{\left(7-5i^{207}\right)^3\left(-2+3i\right)^7}{\left(3i^{16}+3i^{21}\right)^{200}} =$$

$$= \frac{\sqrt{84^3}\sqrt{13^7}}{3^{200}2^{100}}\exp\left\{i\left(3arctg\,\frac{5}{7}+7\pi-7arctg\,\frac{3}{2}-\frac{200\pi}{4}\right)\right\} =$$

$$\begin{vmatrix} 7\pi-50\pi = -43\pi \\ \exp\{-43\pi i\} = \exp\{\pi i\} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{21^3}\sqrt{13^7}}{3^{200}2^{97}}\exp\left\{i\left(3arctg\,\frac{5}{7}-7arctg\,\frac{3}{2}+\pi\right)\right\}.$$

2. Знайти всі значення кореня: $z = \sqrt[5]{-1+\sqrt{3}i}$.

Розглянемо комплексне число $\varsigma = -1+\sqrt{3}i$ і випишемо його в показниковій формі: $x = -1 < 0,\ y = \sqrt{3},\ \ |\varsigma| = 2,$

$\mathrm{Arg}\,z = \pi - arctg\sqrt{3} + 2\pi k = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$. Отже,

$\zeta = 2\exp\left\{i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)\right\}$. Наше завдання можна переписати як

$$z=\zeta^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{5}}\exp\left\{i\frac{\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)}{5}\right\},\ \text{k=0,1,2,3,4.}$$

3. Понизити степінь у функції $\sin^3\varphi$ за допомогою формул Ейлера:

$$\sin^3\varphi=$$

$$=\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^3=\left|\frac{1}{i^3}=-\frac{1}{i}\right|=-\frac{e^{3i\varphi}-3e^{2i\varphi}e^{-i\varphi}+3e^{i\varphi}e^{-2i\varphi}-e^{-3i\varphi}}{8i}=$$

$$-\frac{e^{3i\varphi}-e^{-3i\varphi}-3\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)}{8i}=-\frac{2i\sin 3\varphi-3\left(2i\sin\varphi\right)}{8i}=\frac{3\sin\varphi-\sin 3\varphi}{4}$$

Самостійна робота 2. Границі.

1. Обчислити наступні границі

а)

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{1-1/n^2}+\sqrt{1+1/n^2}}\right)=-1.$$

б)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\right)==$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\right)=0.$$

в)

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{\left(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{1/n^2-1/n^4}+\sqrt{1/n^2+1/n^4}}\right)=0.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-2x-1}{2x^2-x-1}.$

Спосіб 1.

Виконаємо заміну $x-1=t$ у виразі

$$\lim_{t\to 0}\frac{3(t+1)^3-2(t+1)-1}{2(t+1)^2-(t+1)-1}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^3+9t^2+9t+3-2t-2-1}{2t^2+4t+2-t-1-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3t^3+9t^2+7t}{2t^2+3t}=\lim_{t\to 0}\frac{3t^2+9t+7}{2t+3}=\frac{7}{3}$$

Спосіб 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-2x-1}{2x^2-x-1}=\left|\frac{0}{0}\right|^{\text{лапіталь}}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(3x^3-2x-1\right)'}{\left(2x^2-x-1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{9x^2-2}{4x-1}=\frac{9-2}{4-1}=\frac{7}{3}$$

Спосіб 3.

Оскільки? при підстановці у вираз $x=1$ в чисельнику і в знаменнику отримуємо 0, це означає, що $x=1$--корінь многочленів з чисельника і знаменника, отже можна поділити ці многочлени на $x-1.$

Маємо, $3x^3-2x-1=(x-1)(3x^2+3x+1)$, а $2x^2-x-1=$

$=(x-1)(2x+1).$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-2x-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(3x^2+3x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+3x+1}{2x+1}=\frac{7}{3}.$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2 2x\right)}{e^{-x^2}-\cos 2x}.$$

При безпосередній підстановці $x=0$ отримуємо $\frac{0}{0}$. Застосуємо табличку еквівалентних функцій, коли $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sin^2 2x\right)}{e^{-x^2}-\cos 2x}=\left|\begin{array}{l} e^{-x^2}-1\sim -x^2 \\ \cos 2x-1\sim -\left(2x\right)^2/2 \\ \sin 2x\sim 2x \end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\left(2x\right)^2\right)}{-x^2+2x^2}=$$

$$=\left|\ln\left(1+4x^2\right)\sim 4x^2\right|=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=4.$$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)^{3x^3-1}$.

Спосіб 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)^{3x^3-1}=\left|(1)^{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}-1\right)\right)^{3x^3-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}\right)^{\frac{x^4+2x+3}{-2x-4}}\right)^{\left(3x^3-1\right)\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}}=e^{-6}.$$

Степінь -6 отримали як ділення коефіцієнтів біля старших степенів чисельника і знаменника (ці степені мають бути однаковими, в даному випадку вони рівні 4).

Спосіб 2.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)^{3x^3-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\ln\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\ln\left(\frac{x^4-1}{x^4+2x+3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\ln\left(1+\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}\right)=$$

$$=\left|\ln\left(1+\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}\right)\sim\frac{-2x-4}{x^4+2x+3},x\to 0\right|=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(3x^3-1\right)\frac{-2x-4}{x^4+2x+3}=-6.$$

Самостійна робота №3. Похідна функціїї одніє змінної.

1. Обчислити першу похідну y' для наступних функцій, у випадку г), д) обчислити y', y''.

а) $y(x)=\arcsin\left(2x^2-3\right)\ln\left(4x-1\right)$; **б)** $y(x)=\dfrac{tg\sqrt{8x-5}}{e^{-2x+4}-5}$;

в) $y(x)=\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)^{arctg\frac{1}{x}}$; **г)** $\sin\left(xy\right)-e^{\frac{y}{x}}=\ln\left(y^2-x^2\right)$

д) $\begin{cases}x(t)=\sqrt{1-t^2},\\ y(t)=\sqrt{1+t^2}\end{cases}$.

а) Скористаємося формулою для обчислення похідної добутку $y'(x)=\left(\arcsin\left(2x^2-3\right)\right)'\ln\left(4x-1\right)+\arcsin\left(2x^2-3\right)\left(\ln\left(4x-1\right)\right)'=$

$$=\ln\left(4x-1\right)\frac{\left(2x^2-3\right)'}{\sqrt{1-\left(2x^2-3\right)^2}}+\arcsin\left(2x^2-3\right)\frac{\left(4x-1\right)'}{4x-1}=$$

$$=\ln\left(4x-1\right)\frac{4x}{\sqrt{1-\left(2x^2-3\right)^2}}+\arcsin\left(2x^2-3\right)\frac{4}{4x-1}.$$

б) Скористаємось формулою для обчислення похідної частки

$$y'(x)=\frac{\left(e^{-2x+4}-5\right)\left(tg\sqrt{8x-5}\right)'-tg\sqrt{8x-5}\left(e^{-2x+4}-5\right)'}{\left(e^{-2x+4}-5\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(e^{-2x+4}-5\right)\dfrac{\left(\sqrt{8x-5}\right)'}{\cos^2\left(\sqrt{8x-5}\right)}-tg\sqrt{8x-5}\left(e^{-2x+4}\right)\left(-2x+4\right)'}{\left(e^{-2x+4}-5\right)^2}=$$

$$= \frac{\left(e^{-2x+4}-5\right)\dfrac{\left(8x-5\right)'}{2\sqrt{8x-5}\cos^2\left(\sqrt{8x-5}\right)} - tg\sqrt{8x-5}\left(e^{-2x+4}\right)(-2)}{\left(e^{-2x+4}-5\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(e^{-2x+4}-5\right)\dfrac{4}{\sqrt{8x-5}\cos^2\left(\sqrt{8x-5}\right)} + 2tg\sqrt{8x-5}\left(e^{-2x+4}\right)}{\left(e^{-2x+4}-5\right)^2}.$$

в) Скористаємось формулою для обчислення похідної показниково-степеневої функції

$$y'(x) =$$

$$= \left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)^{arctg\frac{1}{x}}\left(\ln\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)\left(arctg\frac{1}{x}\right)' + arctg\frac{1}{x}\frac{\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)'}{\cos\left(8x^2-3\right)}\right) =$$

$$= \left(\ln\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)\frac{\left(1/x\right)'}{1+\left(1/x\right)^2} - arctg\frac{1}{x}\frac{\sin\left(8x^2-3\right)\left(8x^2-3\right)'}{\cos\left(8x^2-3\right)}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)^{arctg\frac{1}{x}} =$$

$$= \left(\ln\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)\frac{\left(-1/x^2\right)}{1+\left(1/x\right)^2} - arctg\frac{1}{x}tg\left(8x^2-3\right)16x\right)\left(\cos\left(8x^2-3\right)\right)^{arctg\frac{1}{x}}.$$

г) Замінимо в рівності $y = y(x)$ і візьмемо похідну лівої і правої частини

$$\left(\sin\left(xy(x)\right) - e^{\frac{y(x)}{x}}\right)' = \left(\ln\left(y(x)^2 - x^2\right)\right)' \Rightarrow$$

$$\left(\left(xy(x)\right)'\cos\left(xy(x)\right) - \left(\frac{y(x)}{x}\right)'e^{\frac{y(x)}{x}}\right) = \frac{\left(y^2(x)-x^2\right)'}{y^2(x)-x^2} \Rightarrow$$

$$\left(\left(x'y(x)+xy'(x)\right)\cos\left(xy(x)\right) - \left(\frac{xy'(x)-x'y(x)}{x^2}\right)e^{\frac{y(x)}{x}}\right) = \frac{\left(2y(x)y'(x)-2x\right)}{y^2(x)-x^2} \Rightarrow \left|x'=1\right.$$

$$\left(\left(y+xy'\right)\cos\left(xy\right) - \left(\frac{xy'-y}{x^2}\right)e^{\frac{y}{x}}\right) = \frac{\left(2yy'-2x\right)}{y^2-x^2}.$$ Виражаємо з цього

рівняння y'.

$$y' = \left(y\cos(xy) + \frac{y}{x^2}e^{y/x} + \frac{2x}{y^2 - x^2} \right) \Big/ \left(-x\cos(xy) + \frac{e^{y/x}}{x} + \frac{2y}{y^2 - x^2} \right).$$

д)

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{1-t^2}, \\ y(t) = \sqrt{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow x'(t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, y'(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}.$$

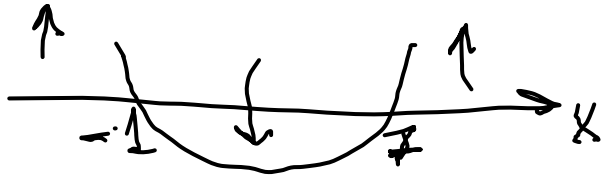
Обчислимо другу похідну $y''(x) = \dfrac{\dfrac{d(y'(x))}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{\left(-\sqrt{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \right)'_t}{-t \Big/ \sqrt{1-t^2}} =$

$$= \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)' \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}\frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}\frac{1}{2} = \frac{-2}{\left(1+t^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. Дослідити функцію $y(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 7x + 5$ за допомогою похідних першого, другого (де треба) порядків і намалювати ескізи графіків в околі точок екстремума.

Обчислимо першу похідну: $y'(x) = x^2 - 6x - 7$. Знайдемо критичні та стаціонарні точки $x^2 - 6x - 7 = 0,\ x_1 = 7,\ x_2 = -1$. В цих точках функція набуває значень

$$y_1 = y(7) = \frac{1}{3}7^3 - 3\cdot 49 - 7\cdot 7 + 5 = -76\frac{2}{3},\ y_2 = y(-1) = 8\frac{2}{3}.$$



спадання $(-1;7)$. Точка $\left(-1;8\frac{2}{3}\right)$ є точкою максимума, точка $\left(7;-76\frac{2}{3}\right)$ – мінімума.

Розглянемо другу похідну : $y''(x)=2x-6$. Для всіх $x\in(-\infty;3)$ $y''(x)<0$, на цьому інтервалі графік функції опуклий вгору, і $y''(x)>0, \forall x\in(3;+\infty)$ -- графік опуклий вниз.

3. Провести повне дослідження функції $y(x)=\frac{x^2+1}{2x+1}$.

1) $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) Точки перетину з віссю $0y$: $x=0,\ y=1$.

3) $y(-x)=\frac{x^2+1}{-2x+1}$ -- не є парною, не є непарною (функція загального виду).

4) Функція неперіодична.

5) Обчислимо першу похідну, її стаціонарні та критичні точки:

$y'(x)=\frac{2\left(x^2+x-1\right)}{(2x+1)^2}$ похідна невизначена при $x=-\frac{1}{2}$ -- критична точка,

$\frac{2\left(x^2+x-1\right)}{(2x+1)^2}=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ -- стаціонарні точки (окремо підраховуємо значення функції в цих точках $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$).

6) Запишемо інтервали зростання і спадання функції:

$y'(x)>0, x\in\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ -- інтервали зростання функції, і відповідно $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ -- інтервал спадання

функції. Отже точка $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ -- локальний максимум, а $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$-- локальний мінімум.

7) Знайдемо точки перегину. Для цього обчислимо другу похідну: $y''(x)=\frac{10}{(2x+1)^3}$. Є критична точка $x=-\frac{1}{2}$ -- точка перегину.

$y''(x)<0,\ x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, тому функція опукла вгору, а для $x\in\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ $y''(x)>0$ функція опукла вниз.

8) Залишається розглянути питання асимптот і поведінку функції на нескінченності і в точках розриву.

Якщо $x\to\pm\infty$, то $y\to\pm\infty$.

Розглянемо поведінку функції в точці розриву $y\left(-\frac{1}{2}\pm 0\right)=\pm\infty$, це точка розриву другого роду.

Отже. маємо вертикальну асимптоту $x=-\frac{1}{2}$, горизонтальної немає.

Похила асимптота: $a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$,

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x)-ax\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x+1}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+2-2x^2-x}{4x+2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

Похила асимптота $y=ax+b=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

Функцію досліджено.

Самостійна робота № 4. Інтегрування функції однієї змінної.

1. Обчислити інтеграл $\int\frac{\ln x}{x^7}dx$.

Обчислювати даний інтеграл будемо за допомогою інтегрування частинами $\int udv=uv-\int vdu$.

$$\int \frac{\ln x}{x^7}dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = \dfrac{dx}{x^7} \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^{-6}}{6} \end{vmatrix} = \frac{x^{-6}}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^7} = \frac{x^{-6}}{6}\ln x - \frac{x^{-6}}{36} + c.$$

2. Обчислити інтеграл $\int \frac{2x-3}{3x^2+2x+4}dx.$

В тричлені у знаменнику виділимо повний квадрат:

$$3x^2+2x+4 = \left(\sqrt{3}x\right)^2 + 2\sqrt{3}x\frac{1}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 4 - \frac{1}{3} = \left(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{11}{3}$$

Тепер зробимо заміну в інтегралі $t = \sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}},\ x = \frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3},\ dx = \frac{dt}{\sqrt{3}}$

$$\int \frac{2x-3}{3x^2+2x+4}dx = \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{11}{3}}{t^2+\frac{11}{3}}dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{t}{t^2+\frac{11}{3}}dt - \frac{11}{3}\int \frac{1}{t^2+\frac{11}{3}}dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(t^2+\frac{11}{3}\right)}{t^2+\frac{11}{3}} - \frac{11}{3}\int \frac{1}{t^2+\frac{11}{3}}dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t^2+\frac{11}{3}\right| - \sqrt{\frac{11}{3}}arctg\sqrt{\frac{3}{11}}t + c =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|3x^2+2x+4\right| - \sqrt{\frac{11}{3}}arctg\frac{3x+1}{\sqrt{11}} + c.$$

3. Обчислити інтеграл $\int \frac{\left(2x^2-1\right)dx}{x^4-1}.$

В чисельнику степінь многочлена 2, а в знаменнику 4, виділяти цілу частину не треба. За допомогою МНК розкладемо підінтегральний дріб на суму простих дробів. Знаменник $x^4-1 = (x-1)(x+1)\left(x^2+1\right).$

$\frac{2x^2-1}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$. Якщо многочлен першого порядку у знаменнику, то в чисельнику нульового (стала),

якщо другого у знаменнику, то в чисельнику першого(лінійна функція з невідомими коефіцієнтами). Праву сторону зведемо до спільного знаменника і отриманий чисельник прирівняємо до чисельника лівої сторони:

$$2x^2-1=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+Cx(x^2-1)+D(x^2-1)$$

$$2x^2-1=A(x^3+x^2+x+1)+B(x^3-x^2+x-1)+C(x^3-x)+D(x^2-1)$$

Два многочлени рівні, якщо рівні всі коефіцієнти біля відповідних степенів, тому

$$x^3:0=A+B+C;$$

$$x^2:2=A-B+D;$$

$$x:0=A+B-C;$$

$$x^0:-1=A-B-D.$$

$$(1)+(3):A+B=0$$

Розв'яжемо дану систему: $(2)+(4):A-B=\frac{1}{2}$, тому $A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{4}.$

$$C=-A-B=0,$$

$$D=A-B+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

Отже,

$$\frac{2x^2-1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x^2+1}.$$

$$\int\frac{(2x^2-1)dx}{x^4-1}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{3}{2}arctgx+c.$$

Самостійна №5. Диференціювання ФВА.

1. Чи є функція $z(x,y)=\sin xy-\cos xy$ розв'язком рівняння $x^2z''_{xx}-y^2z''_{yy}=0.$

Обчислимо перші частинні похідні $z'_x=y\cos xy+y\sin xy,$

$z'_y = x\cos xy + x\sin xy$. А тепер випишемо другі частинні похідні

$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = y^2\left(-\sin xy + \cos xy\right)$ і аналогічно

$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = x^2\left(-\sin xy + \cos xy\right)$. Тепер порахуємо ліву частину рівняння

$x^2 z''_{xx} - y^2 z''_{yy} = x^2y^2\left(-\sin xy + \cos xy\right) - y^2x^2\left(-\sin xy + \cos xy\right) = 0.$

Отже, дана функція є розв'язком заданого рівняння.

2. Обчислити значення виразу $\arccos\left(0{,}99 \cdot 0{,}02\right)$, замінивши приріст відповідної функції диференціалом.

Формула малих приростів, яку ми застосуємо виглядає наступним чином $f\left(x,y\right) \approx f\left(x_0,y_0\right) + \dfrac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f\left(x_0,y_0\right)}{\partial y}\Delta y$. Функція у нас $f\left(x,y\right) = \arccos\left(xy\right)$, точки з відомим точним значенням функції $x_0 = 1,\ y_0 = 0$, тоді $\Delta x = -0.01$, а $\Delta y = 0.02$ і $f\left(x,y\right) = \arccos\left(0\right) = \dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57$. Обчислимо перші частинні похідні в точці $\left(1;0\right)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(1;0\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(xy\right)^2}}\,y\,|_{(1;0)} = 0$;

$\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(1;0\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(xy\right)^2}}\,x\,|_{(1;0)} = -1$. Отже,

$\arccos\left(0{,}99 \cdot 0{,}02\right) \approx 1{,}57 + 0 * 0{,}01 - 1 * 0{,}02 = 1{,}55.$

За допомогою калькулятора отримаємо

$\arccos\left(0{,}0198\right) = 1.5509950328.$

3. Задана функція $u = \ln\left(z - \dfrac{x}{y}\right)$, точка $A\left(1,-2,3\right)$ та вектор $\bar{s}$.

Знайти:

а)градієнт функції u в точці A;

б)похідну функції u в точці A за напрямком вектора $\overline{s} = grad\,u\left(A\right)$.

Обчислюємо перші частинні похідні:

$u'_x = -\dfrac{y}{zy-x}\dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{zy-x}\,|_{A(1,-2,3)} = -\dfrac{1}{7},$

$$u'_y = \frac{y}{zy-x}\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{y(zy-x)}\Big|_{A(1,-2,3)} = \frac{-1}{14},\ u'_z = \frac{y}{zy-x}\Big|_{A(1,-2,3)} = \frac{2}{7}.$$

Отже

$$grad\,u(1;-2;3) = \left(-\frac{1}{7};-\frac{1}{14};\frac{2}{7}\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{(gradu)^2}{|gradu|} = |gradu| = \sqrt{\left(-\frac{1}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{14}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{1}{14}\sqrt{21}.$$

4. Знайти локальні екстремуми функції

$u(x,y) = x^2 - 2xy + y^3 - 3y - 7$.

Спершу для заданої функції знайдемо критичні точки, тобто, точки в яких перші частинні похідні дорівнюють 0 або не існують.

$$\begin{cases} u'_x = 2x - 2y = 0, \\ u'_y = -2x + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y, \\ 3y^2 - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3}.$$

Отже, маємо дві наступні критичні точки: $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3};\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$ та $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3};\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$. Щоб перевірити чи це точки екстремуму та визначити які, треба обчислити другий диференціал: $\begin{cases} u''_{xx} = 2, \\ u''_{xy} = -2, \\ u''_{yy} = 6y \end{cases}$

$d^2u = 2dx^2 - 4dxdy + 6ydy^2$, нас цікавить наступна матриця $\begin{pmatrix} u''_{xx} & u''_{xy} \\ u''_{xy} & u''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}$. ЇЇ визначник дорівнює $12y - 4$.

Підставляємо наші точки і маємо для $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3};\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$ $u''_{xx} = 2 > 0$,

$12\frac{1-\sqrt{10}}{3} - 4 = -4\sqrt{10} < 0$, за критерієм Сильвестра другий диференціал не є додатньо чи від'ємно визначеним, отже точка не є екстремумом. Перевіремо точку $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3};\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$ $u''_{xx} = 2 > 0$,

$12\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}-4=4\sqrt{10}>0$, за критерієм Сильвестра другий диференціал додатньовизначений, отже, в точці досягається мінімум функції.

5. Знайти умовний екстремум функції $u=2x^2-10xy-3y^2+$ $+5x-y-7$, якщо рівняння зв'язку $x+2y=9$**.**

1спосіб. Рівняння зв'язку лінійне, одну змінну можна легко виразити через іншу, скористаємося цим $x=9-2y$. І підставимо цей х в функцію

$u(9-2y,y)=2(9-2y)^2-10y(9-2y)-3y^2+5(9-2y)-y-7=$

$=25y^2-173y+200$. Це парабола, вітки якої напрямлені вгору, тому критична точка буде мінімумом. Критичну точку нової функції шукаємо з $u'_y=0\Rightarrow 50y-173=0\Rightarrow y=\dfrac{173}{50}$. Тоді $x=9-2y=\dfrac{52}{25}$.

Точка $\left(\dfrac{52}{25};\dfrac{173}{50}\right)$ є точкою умовного мінімуму.

2 спосіб. У більшості випадків умова така, що важко виразити яку-небудь змінну однозначно через інші змінні, тоді на допомогу приходить метод множників Лагранжа. Спершу випишемо функцію Лагранжа для заданої задачі: $L(x,y,\lambda)=u(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=$

$=2x^2-10xy-3y^2+5x-y-7+\lambda(x+2y-9)$. Зауважимо, що умову потрібно переписувати у вигляді $\varphi(x,y)=0$, тому λ домножається саме на $x+2y-9$. Для цієї функції шукаємо критичні точки з системи

$$\begin{cases} L'_x=0, \\ L'_y=0, \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}.\begin{cases} 4x-10y+5+\lambda=0, \\ -10x-6y-1+2\lambda=0\Rightarrow \\ x+2y-9=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{46+18\lambda}{124}=\dfrac{23+9\lambda}{62}, \\ x=\dfrac{1}{4}\left(-5-\lambda+\dfrac{115+45\lambda}{31}\right), \\ \dfrac{-155-31\lambda+115+45\lambda+92+36\lambda}{124}=9 \end{cases} \Rightarrow \lambda=\frac{1064}{50}$$

$\Rightarrow y = \frac{23\cdot 25 + 9\cdot 532}{31\cdot 50} = \frac{173}{50}$, аналогічно попередньому методу знаходимо $x = 9 - 2y = \frac{52}{25}$. Ми знайшли критичну точку, тепер треба дослідити, чи вона екстремум і який вона екстремум. Виписуємо другий диференціал для функції Лагранжа $d^2L = 4dx^2 - 20dxdy - 6dy^2$ і продиференціювавши умову маємо $dx = -2dy$, підставляємо цей результат в $d^2L|_{dx=-2dy} = 16dy^2 + 40dy^2 - 6dy^2 > 0$. Отже дана точка умовний мінімум заданої функції.

6. Перевірити, чи є функція $u = \varphi(xy - z, xz)$ розв'язком диференціального рівняння $xzu'_z - x^2u'_x + (xy + z)u'_y = 0$ (φ - довільна, достатню кількість разів диференційовна функція).

Обчислимо потрібні нам в рівнянні похідні. $u'_x = \varphi'_1\cdot y + \varphi'_2\cdot z$, $u'_y = \varphi'_1\cdot x$, $u'_z = -\varphi'_1 + \varphi'_2\cdot x$. Тепер підставимо отримане в рівняння. $-xz\varphi'_1 + xz\varphi'_2\cdot x - x^2\varphi'_1\cdot y - x^2\varphi'_2\cdot z + xy\varphi'_1\cdot x + z\varphi'_1\cdot x = 0$. Отже, дана функція є розв'язком даного диференціального рівняння.

Самостійна робота № 6. Числові та функціональні ряди.

1. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{25n-34}{2n^3-5n+6}}{\ln\left(\frac{n^3+n-1}{n^3+1}\right)}$ на збіжність.

Розглянемо, якій функції еквівалентний загальний член цього ряду на нескінченності $a_n = \frac{\sin^2 \frac{25n-34}{2n^3-5n+6}}{\ln\left(\frac{n^3+n-1}{n^3+1}\right)}$. Дріб $\frac{25n-34}{2n^3-5n+6} \to 0$,

$n \to \infty$, отже, $\sin^2 \frac{25n-34}{2n^3-5n+6} \sim \left(\frac{25n-34}{2n^3-5n+6}\right)^2 \sim \left(\frac{25n}{2n^3}\right)^2 = \frac{25^2}{4n^4}$,

$n \to \infty$. Дріб $\frac{n^3+n-1}{n^3+1} = 1 + \frac{n-2}{n^3+1} \to 1$, $n \to \infty$, отже

$\ln\left(1+\frac{n-2}{n^3+1}\right) \sim \frac{n-2}{n^3+1} \sim \frac{1}{n^2}$, $n \to \infty$. Тепер маємо,

$a_n \sim \frac{25^2}{4n^4 \frac{1}{n^2}} = \frac{25^2}{4n^2}$, за асимптотично степеневою ознакою заданий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{25n-34}{2n^3-5n+6}}{\ln\left(\frac{n^3+n-1}{n^3+1}\right)}$ збігається, оскільки збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{25^2}{4n^2}$.

2. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ на абсолютну та умовну збіжність.

Для абсолютної збіжності досліджується ряд з модулями, отже розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Загальний член $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, n \to \infty$,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ розбіжний (степінь менше 1). Отже, абсолютної збіжності немає. Дослідимо умовну збіжність. Це ряд типу $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Можна використати ознаку Лейбніца. Для цього треба довести, що $\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ монотонна нескінченно мала величина при $n \to \infty$.

$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0, n \to \infty$, для доведення монотонності розглянемо функцію $y(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, похідна $y'(x) = -\frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{(2x+1)^3}} < 0$ зберігає знак для всіх $x \geq 1$, отже послідовність монотонна. За ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$ збіжний.

3. Знайти радіус та інтервал збіжності узагальнено-степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^2} e^{-nx}$.

Виконаємо заміну $e^{-x}=t\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^2}t^n$. Знайдемо радіус збіжності

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^3}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^2}=(1)^{\infty}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(1+\frac{-2}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{-2}3n^2\frac{-2}{n^2+1}}=$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}e^{-\frac{6n^2}{n^2+1}}=e^{-6}.$$ Отже $R=e^6$. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{3n^2}e^{-nx}$ збігається для всіх x таких, що виконується $e^{-x}<e^6\Rightarrow x>-6.$

4. Розкласти функцію $f(x)=\frac{2x^4}{x^2+2x-3}$ в ряд Маклорена і вказати радіус збіжності.

Щоб розкласти функцію $f(x)=\frac{2x^4}{x^2+2x-3}$ в ряд Маклорена розглянемо частину цієї функції, а саме $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}=\frac{1}{(x+3)(x-1)}$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)}\right)\underline{\underline{(6)}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(-1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^n$$, для двох дробів використовували формулу (6) рядів Маклорена. Для нього радіус збіжності дорівнює 1. Отже для першого ряду радіус 1 і $|x|<1$, для другого $\left|\frac{x}{3}\right|<1\Rightarrow|x|<3$ радіус 3. Отже обидва ряди збігаються, коли $|x|<1.$ Тепер згадаємо про нашу задану функцію

$$f(x)=\frac{2x^4}{x^2+2x-3}=2x^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left(-1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(-1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)x^{n+4}$$ і радіус збіжності $R=1.$

5. Розкласти $\mathrm{f}(x)=\ln\left(\frac{6-x}{x+2}\right)$ у ряд Тейлора за степенями $(x-1).$

Виконаємо спершу заміну змінної $t = x-1,\ \mathrm{f}\left(t\right) = \ln\left(\dfrac{5-t}{t+3}\right)$ цю функцію будемо розкладати в ряд Маклорена відносно нової змінної.

$$\mathrm{f}\left(t\right) = \ln\left(\frac{5-t}{t+3}\right) = \ln\left(5-t\right) - \ln\left(t+3\right) = \ln 5 + \ln\left(1-\frac{t}{5}\right) - \ln 3 - \ln\left(1+\frac{t}{3}\right) \underline{\underline{(5)}}$$

=

$$\ln\frac{5}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}\left(-\frac{t}{5}\right)^{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}\left(\frac{t}{3}\right)^{n} = \ln\frac{5}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\left(\frac{1}{5}\right)^{n} + \left(-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)t^{n}$$

Ми застосували до функції логариф натуральний формулу (5) з радіусом збіжності 1. Тому перший який ми отримали збігається для $\left|\dfrac{t}{5}\right| < 1 \Rightarrow \left|t\right| < 5$, а другий ряд -- $\left|\dfrac{t}{3}\right| < 1 \Rightarrow \left|t\right| < 3$. Обидва ряди збігаються для $\left|t\right| < 3$. Радіус збіжності 3. Виконуючи обернену заміну отримаємо

$$\mathrm{f}\left(x\right) = \ln\left(\frac{6-x}{x+2}\right) = \ln\frac{5}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\left(\frac{1}{5}\right)^{n} + \left(-1\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)\left(x-1\right)^{n}.$$

6. Розкласти в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію

$$f\left(x\right) = \begin{cases} 2x-1, -\pi < x < 0, \\ x, 0 \le x < \pi \end{cases}.$$

Щоб виписати ряд Фур'є треба обчислити коефіцієнти. Отже,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(2x-1\right)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx dx\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix} u = 2x-1 & dv = \cos nx dx \\ du = 2dx & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} u = x & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left(2x-1\right)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{0}\mathrm{s}innx dx + x\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{n^2}\left(\cos 0 - \cos n\pi\right) + \frac{1}{n^2}\left(\cos n\pi - \cos 0\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\left(1-\left(-1\right)^{n}\right)\right).$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(2x-1\right)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} x\,\mathrm{s}innx dx\right) =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 2x-1 & dv = \sin nxdx \\ du = 2dx & v = \dfrac{-\cos nx}{n} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} u = x & dv = \sin nxdx \\ du = dx & v = \dfrac{-\cos nx}{n} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-(2x-1)\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx - x\frac{\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nxdx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\left(\cos 0 + (-2\pi - 1)\cos n\pi\right) - \frac{1}{n}\left(\pi\cos n\pi\right) \right) = \frac{1}{\pi n}\left(1 - (\pi+1)(-1)^n\right).$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(2x-1)dx + \int_{0}^{\pi}xdx \right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(2x-1)^2}{4}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-2\pi-1)^2}{4} + \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{-\pi-2}{2}$$

В точках неперервності ряд Фур'є $F(x)$ збігається до функції

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, -\pi < x < 0, \\ x, 0 \le x < \pi \end{cases} =$$

$$= \frac{-\pi-2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx + \frac{1}{\pi n}\left(1-(\pi+1)(-1)^n\right)\sin nx \right).$$

$$F(0+2\pi k) = \frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$F(\pi+2\pi k) = \frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2} = \frac{2\pi-1+\pi}{2} = \frac{3\pi-1}{2}.$$

$$F(-\pi+2\pi k) = \frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2} = \frac{-2\pi-1-\pi}{2} = -\frac{3\pi+1}{2}.$$

7. Функцію $f(x) = x,\ \ x \in (0;2)$ розкласти в ряд Фур'є: а) з періодом 1; б) за косинусами; в) за синусами.

а) Щоб розкласти функцію $f(x) = x, x \in (0;2)$ з періодом 1, шукаємо коефіцієнти наступним чином, у формулах $l = 1.$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx == \int_{0}^{2} x\cos n\pi xdx = x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{0}^{2} + \frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_{0}^{2} = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx = \int_0^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2.$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \int_0^2 x\sin n\pi x dx = -x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^2 + \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^2 = \frac{-2}{n\pi}$$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2}{n\pi}\sin n\pi x,\ x \in (0,2).$$

Б) Щоб розкласти дану функцію за косинусами, треба її парно продовжити вліво і розглянути парну функцію $f(x) = \begin{cases} x, x \in (0,2); \\ -x, x \in (-2;0) \end{cases}$.

Одразу випишемо $b_n = 0$.

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \left(x\frac{2\sin\frac{n\pi x}{2}}{n\pi} + \frac{4\cos\frac{n\pi x}{2}}{(n\pi)^2} \right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{4(\cos n\pi - \cos 0)}{(n\pi)^2} = \frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{(n\pi)^2}.$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2.$$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left((-1)^n - 1\right)}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2},\ x \in (0,2)$$

В) Щоб розкласти дану функцію за синусами, треба її непарно продовжити вліво і розглянути непарну функцію $f(x) = x,\ x \in (-2;2)$.

Одразу випишемо $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \left(-x\frac{2\cos\frac{n\pi x}{2}}{n\pi} + \frac{4\sin\frac{n\pi x}{2}}{(n\pi)^2} \right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{-4(\cos n\pi)}{n\pi} = \frac{-4\left((-1)^n\right)}{n\pi}.$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2},\ x \in (0,2).$$

12. Відомості з елементарної математики

Арифметична прогресія:

$$a_1, a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, \ldots, a_n = a_1 + (n-1)d,$$

d – **різниця** арифметичної прогресії.

Формула n–го члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Формула суми n *перших членів* арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Характеристична властивість арифметичної прогресії:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрична прогресія:

$$b_1, b_2 = b_1 q, b_3 = b_1 q^2, \ldots, b_n = b_1 q^{n-1},$$

q – **знаменник** геометричної прогресії.

Формула n–го члена геометричної прогресії:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суми n *перших членів* геометричної прогресії:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Формула суми нескінченої кількості членів геометричної прогресії:

$$S_{\infty} = \frac{b_1}{1-q}, |q| < 1.$$

Характеристична властивість геометричної прогресії:

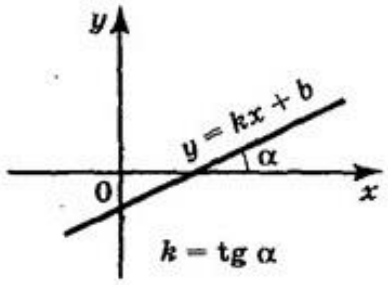
$$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}.$$

Формули скороченого множення:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

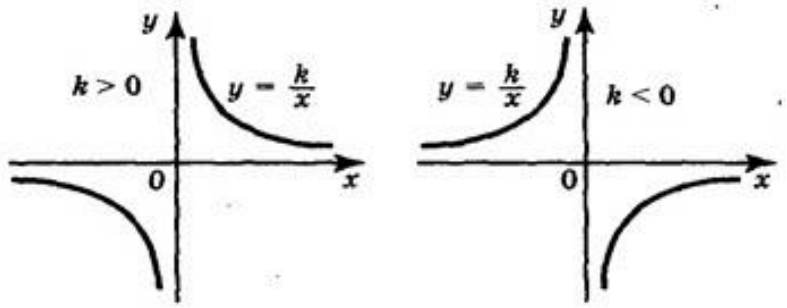
Графіки елементарних функцій

Лінійна функція: $y = kx + b$



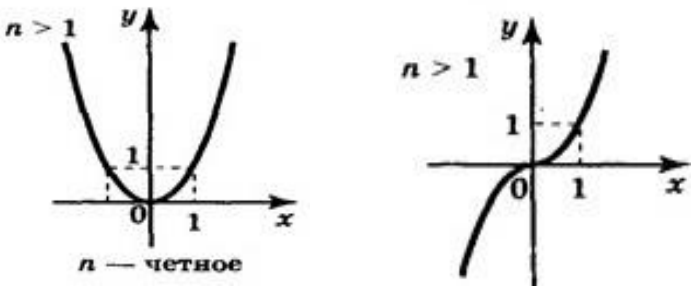
Функція $y = kx + b$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Вона зростає при $k > 0$, спадає – при $k < 0$. Функція є неперервною на множині визначення. Графік лінійної функції можна побудувати по двом точкам.

Функція оберненої пропорційності: $y = \frac{k}{x}$



Функція $y = \frac{k}{x}$ визначена на $(-\infty;0) \cup (0;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Вона спадає при $k > 0$, зростає – при $k < 0$ на $(-\infty;0)$ та $(0;\infty)$. Ця функція є непарною. Функція є неперервною на множині визначення, має розрив в точці 0.

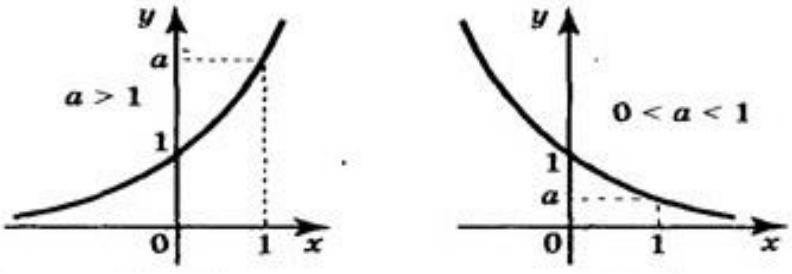
Степенева функція: $y = x^k, k \in \mathbb{R}$



Функція $y = x^{2n}, n \in \mathbb{N}$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $[0;\infty)$. Вона зростає при $x > 0$, спадає – при $x < 0$. Ця функція є парною $(-x)^{2n} = x^{2n}$. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція $y = x^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Вона зростає при всіх x. Ця функція є непарною $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$. Функція є неперервною на множині визначення.

Показникова функція: $y = a^x$



Функція $y = a^x$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $(0;\infty)$. Ця функція зростає при $a > 1$, спадає – при $0 < a < 1$. Функція є неперервною на множині визначення.

Властивості степенів:

$1. a^0 = 1.$ $2. a^1 = 1.$

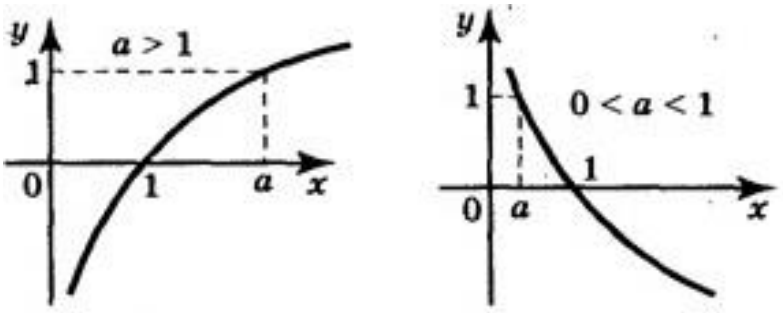
$3. a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$ $4. \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$

$5. \left(a^n\right)^m = a^{nm}.$ $6. a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$

$7. \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$ $8. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$

Означення **логарифма**: $b = a^{\log_a b}$, $b > 0, a > 0, a \neq 1$.

Логарифмічна функція: $y = \log_a x$



Функція $y = \log_a x, x > 0$ визначена на $(0;\infty)$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Ця функція зростає при $a > 1$, спадає при $0 < a < 1$. Функція є неперервною на множині визначення.

Зауважимо, що логарифмічна функція $y = \log_a x$ є оберненою до степеневої функції $y = a^x$, тобто мають місце наступні тотожності $a^{\log_a x} = x, \quad \log_a (a^x) = x, \quad x > 0$ при допустимих значеннях a.

Властивості логарифмів при $b > 0, a > 0, a \neq 1$:

$1. \log_a 1 = 0.$ $2. \log_a a = 1.$

$3. \log_a b + \log_a c = \log_a (bc).$ $4. \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}.$.

$5. \log_a b^n = n \log_a b.$ $6. \log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b.$

$7. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$ $8. \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

Рівняння

1. $x^2 = a,\ a > 0$
   $x = \pm\sqrt{a}.$

2. $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,$
   $D = b^2 - 4ac : x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$

   !!!! Квадратичний тричлен можна розкласти на множники за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$

4. $\sqrt{x} = a,\ a > 0$
   $x = a^2.$

5. $a^x = b,\ b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1$
   $x = \log_a b.$

6. $x^n = a,\ a > 0$
   $x = \sqrt[n]{a}.$

7. $|x| = a,\ a > 0$
$x = \pm a.$

Нерівності

1. $|x| \geq a,\ a > 0$ $\qquad$ $|x| < a,\ a > 0$
$x \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty).$ $\qquad$ $x \in (-a; a).$

2. $a^x \leq b,\ b > 0,\ a > 1$ $\qquad$ $a^x > b,\ b > 0,\ 0 < a < 1$
$x \leq \log_a b.$ $\qquad$ $x < \log_a b.$

3. $\log_a x \geq \log_a y,\ a > 1$ $\qquad$ $\log_a x < \log_a y,\ 0 < a < 1$
$x \geq y > 0.$ $\qquad$ $x > y > 0.$

4. $a^x \geq a^y,\ a > 1$ $\qquad$ $a^x < a^y,\ 0 < a < 1$
$x \geq y;$ $\qquad$ $x > y.$

5. $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}.$

6. $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right.$

Метод інтервалів

* Розв'язуючи нерівність $(x-a_1)^{\alpha_1} \cdot (x-a_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x-a_n)^{\alpha_n} \wedge 0,$ $a_i \neq a_j,\ i \neq j,$ розставимо числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на числовій прямій. Ці числа розбивають дійсну вісь на $n+1$ інтервали, на кожному з яких вираз у лівій частині нерівності зберігає знак. Підставляючи по одному значенню з кожного інтервалу, визначаємо чи даний інтервал задовільняє нашу нерівність.

* Розв'язуючи нерівність $\frac{P(x)}{Q(x)} \wedge 0,$ де $P(x), Q(x)$ – многочлени, заміняємо на еквівалентну $P(x)Q(x) \wedge 0$, знаходимо всі дійсні корені многочленів $P(x), Q(x)$ і впорядкуємо їх за зростанням $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Розставимо знайдені корені на числовій осі. Ці числа розбивають дійсну вісь на $n+1$ інтервали, на кожному з яких дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ зберігає знак. Підставляючи по одному значенню з кожного інтервалу, визначаємо, які з інтервалів задовольняють даній нерівності. Не забуваємо відкинути ті точки де $Q(x) = 0$.

Теорема Безу

Теорема. Залишок від ділення $P(x)$ на лінійний двучлен $x - a$ дорівнює значенню многочленна в точці a , числу $P(a)$.

Наслідок. Для того щоб многочлен $P(x)$ ділився націло на лінійний двучлен $x - a$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність $P(a) = 0$, тобто щоб число a було коренем многочленна $P(x)$.

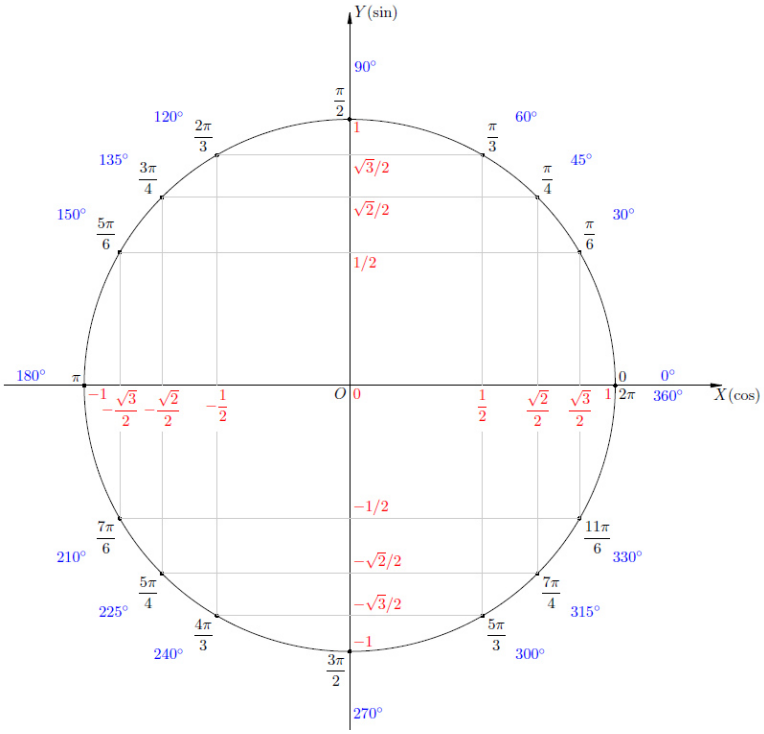
Тобто, розв'язуючи рівняння $P(x) = 0$, знаходимо корінь многочлена $P(x)$ – число a. Теорема Безу стверджує, що многочлен $P(x)$ ділиться на $x - a$. Тому вихідне рівняння переписується у вигляді $(x-a)Q(x) = 0$. Таким чином понижується степінь многочлена, корені якого потрібно знайти.

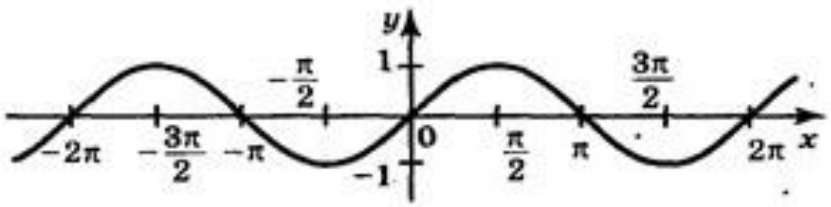
Наприклад, рівняння $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ переписується у вигляді $(x+1)(x^2 - 4) = 0$, корені якого $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = 2.$

Тригонометрія

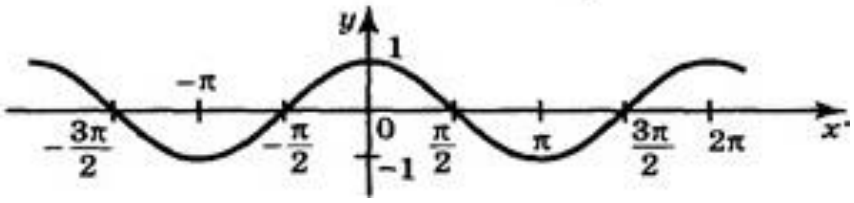
Поняття $\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ для всіх дійсних x визначаються за допомогою одиничного кола. Нехай одиничний радіус пересунувся на кут x проти руху годинникової стрілки (за рухом – у випадку від'ємного значення x), тоді $\sin x$ – проекція відповідної точки одиничного кола на вісь OY, $\cos x$ – проекція відповідної точки одиничного кола на вісь OX,

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x}, ctgx = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

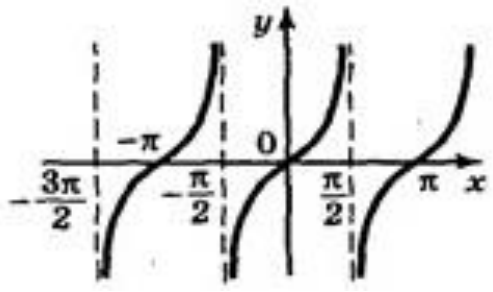


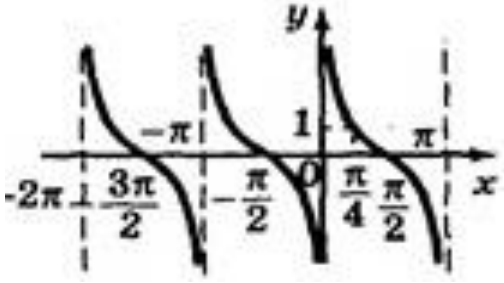


Функція $y = \sin x$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $[-1;1]$. Ця функція є непарною $(\sin(-x) = -\sin x)$, періодичною з періодом $T = 2\pi$. Функція є неперервною на множині визначення.



Функція $y = \cos x$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень є $[-1;1]$. Ця функція є парною $(\cos(-x) = \cos x)$, періодичною з періодом $T = 2\pi$. Функція є неперервною на множині визначення.





Функція $y = tgx$ визначена на інтервалах $(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Ця функція є непарною $(tg(-x) = -tgx)$, періодичною з періодом $T = \pi$. Функція є неперервною на кожному з інтервалів $(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$.

Функція $y = ctgx$ визначена на інтервалах $(\pi k;\pi+\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$, множиною значень є $(-\infty;\infty)$. Ця функція є непарною $(ctg(-x) = -ctgx)$, періодичною з періодом $T = \pi$. Функція є неперервною на кожному з інтервалів $(\pi k;\pi+\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$.

Формули зведення

Розглянемо співвідношення, за допомогою яких значення тригонометричних функцій аргументів $\frac{\pi}{2}\pm\alpha, \pi\pm\alpha, \frac{3\pi}{2}\pm\alpha, 2\pi\pm\alpha$ виражаються через значення $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

Формули зведення описуються наступними правилами:

1) якщо у формулах містяться кути π і 2π, то найменування функції не змінюється; якщо ж у формулах містяться кути $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$, тоді функція змінюється на ко-функцію (синус – на косинус, тангенс – на котангенс і навпаки);

2) щоб визначити знак у правій частині формули («+» або « –») досить, вважаючи кут α гострим, визначити знак вихідної функції кута вихідного аргументу $\frac{\pi}{2}\pm\alpha, \quad \pi\pm\alpha, \frac{3\pi}{2}\pm\alpha, 2\pi\pm\alpha$. Одержаний знак ставлять перед ко-функцією кута α у рівності.

Приклад. $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \ \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha.$

Основні тригонометричні тотожності:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1;\ tgx \cdot ctgx = 1.$

1. $\sin(-x) = -\sin x;\ \cos(-x) = \cos x;$
   $tg(-x) = -tgx;\ ctg(-x) = -ctgx.$

2. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x;\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x;$
   $tg(\frac{\pi}{2} - x) = ctgx;\ ctg(\frac{\pi}{2} - x) = tgx.$

3. $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x;\ \cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x;$
   $tg(\frac{\pi}{2} + x) = -ctgx;\ ctg(\frac{\pi}{2} + x) = -tgx.$

4. $\sin(\pi - x) = \sin x;\ \cos(\pi - x) = -\cos x;$
   $tg(\pi - x) = -tgx;\ ctg(\pi - x) = -ctgx.$

5. $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x;\ \cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x;$
   $tg(\frac{3\pi}{2} - x) = ctgx;\ ctg(\frac{3\pi}{2} - x) = tgx.$

6. $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x;\ \cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x;$
   $tg(\frac{3\pi}{2} + x) = -ctgx;\ ctg(\frac{3\pi}{2} + x) = tgx.$

7. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$
   $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$

8. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$
   $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

9. $tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta};$
   $ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}.$

10. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$

12. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

13. $tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$

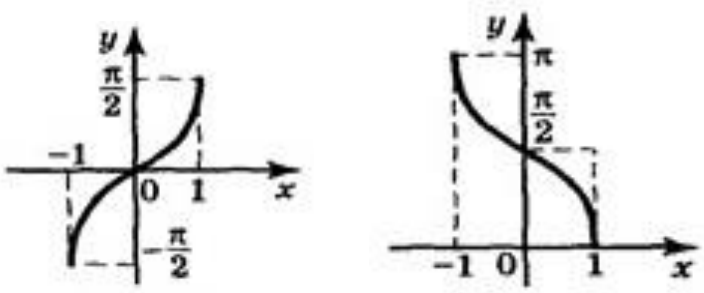
14. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right];$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right];$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right].$

Обернені тригонометричні функції

$y = \arcsin x$ $y = \arccos x$



Функція $y = \arcsin x,$ визначена на $[-1;1]$, множиною значень якої є $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ – обернена до функції $y = \sin x,$ тобто мають місце рівності:

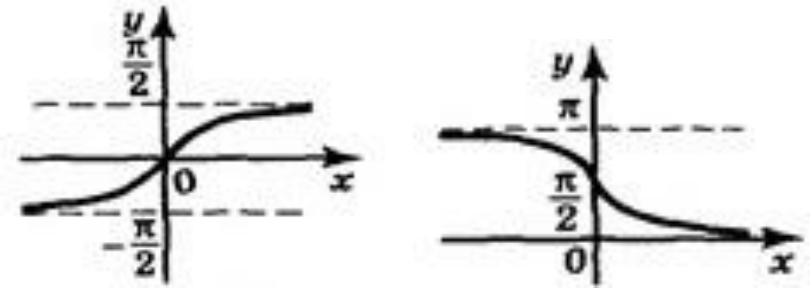
$\arcsin(\sin x) = x,\ x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}];\quad \sin(\arcsin x) = x,\ x \in [-1;1]$. Ця функція

є непарною ($\arcsin(-x) = -\arcsin x$), не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція $y = \arccos x,$ визначена на $[-1;1]$, множиною значень якої є $[0;\pi]$ – обернена до функції $y = \cos x,$ тобто мають місце рівності:

$\arccos(\cos x) = x,\ x \in [0;\pi];\quad \cos(\arccos x) = x,\ x \in [-1;1]$. Ця функція не є ні парною, ні непарною ($\arccos(-x) = \pi - \arccos x$), не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

$y = \operatorname{arc} tgx$ $y = \operatorname{arc} ctgx$



Функція $y = \operatorname{arc} tgx,$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень якої є $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ – обернена до функції $y = tgx,$ тобто мають місце рівності:

$arctg(tgx) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right);\quad tg(arctgx) = x,\ x \in (-\infty;\infty)$. Ця функція є непарною ($arctg(-x) = -arctgx$), не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

Функція $y = \operatorname{arc} ctgx,$ визначена на $(-\infty;\infty)$, множиною значень якої є $(0;\pi)$ – обернена до функції $y = tgx,$ тобто мають місце рівності:

$arcctg(ctgx) = x,\ x \in (0;\pi);\quad ctg(arcctgx) = x,\ x \in (-\infty;\infty)$. Ця функція не є ні парною, ні непарною ($arcctg(-x) = \pi - arcctgx$), не є періодичною. Функція є неперервною на множині визначення.

Тригонометричні рівняння

1. $\sin x = a,\ -1 \le a \le 1$

$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$

2. $\cos x = a,\ -1 \le a \le 1$

$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z.$

3. $tgx = a,\ a \in \square$

$x = \text{arc}tga + \pi n, n \in Z.$

4. $ctgx = a,\ a \in \square$

$x = arcctga + \pi n, n \in Z.$

Окремо наведемо розв'язки деяких стандартних тригонометричних рівнянь:

5. $\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

6. $\sin x = -1$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

7. $\sin x = 0$

$x = \pi n, n \in Z.$

8. $\cos x = 1$

$x = 2\pi n, n \in Z.$

9. $\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$

10. $\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

Література

1.Берман Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа. – М., 1977.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник. – М., 1987.

3.Гаврильченко Х.И., Кривой А.Ф., Кропивянский П.С. и др. Высшая математика: сборник задач. – К., 1991.

4.Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике. Т.2. – Л., 1949.

5.Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1973.

6.Дубовик В.П., Юрик І.І, Вовкодав І.П. та ін. Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник. – К., 2004.

7.Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т.1,2 – М., 2001.

8.Пискунов Н.Е. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1,2. - М., 1972.

9.Єфіменко С.В., Кривошея С.А. Контрольні завдання з математичного аналізу. – К.: „Київський університет”, 2002.

10.Єфіменко С.В., Кривошея С.А., Придатченко Ю.В., Янішевський А.Т. Комплексні числа. – К.: „Київський університет”, 1997.

11.Єфіменко С.В., Сугакова О.В., Індивідуальні завдання з математичного аналізу для самостійної роботи. – К.: „Київський університет”, 2006.

12.Клепко В.Ю. Методичні вказівки до вивчення розділу „Функції багатьох змінних”. – К.:ЕКОМЕН, 1998.

13.Кривошея С.А., Моторна О.В., Майко Н.В., Прощенко Т.М. Математичний аналіз. Завдання для самостійної роботи студентів ч.1,2 –К. Київський університет, 2013.

Зміст

1.Комплексні числа……..…3
2.Границі……7
3.Похідні та їх застосування……..12
4.Невизначений інтеграл……20
5.Визначений інтеграл……25
6. Невласні інтеграли ……....32
7.Функції багатьох змінних……35
8.Числові ряди ……43
9.Функціональні ряди …… 46
10.Кратні інтеграли……..55
11.Векторний аналіз…….58
12.Приклади розв’язання задач.....73
12.Відомості з елементарної математики……..……93
13.Література ……...106