
Комплексний аналіз
в прикладах і задачах
Д. Д. Шека
Київ — 2019

Київський Національний університет імені Тараса Шевченка

Д. Д. Шека

Комплексний аналіз

в прикладах і задачах

Навчальний посібник
для студентів спеціальності
«Прикладна фізика та наноматеріали»

Київ — 2019

УДК 517.53/.55
ББК 22.165.5

Д. Д. Шека
Комплексний аналіз (в прикладах і задачах). Навчальний посібник для студентів спеціальності «Прикладна фізика та наноматеріали». — Київ: факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка,—130 с.

У посібнику розглянуто задачі з основних розділів комплексного аналізу. Для зручності користування матеріал поділено на дві частини відповідно до двох навчальних модулів. Кожна з частин містить декілька тем відповідно до тем практичних занять. На початку теми наводяться теоретичні відомості, далі подано приклади розв'язування задач, пропонуються задачі як для аудиторної, так і самостійної роботи студентів. В кінці кожної частини наводиться приклад завдань модульної контрольної роботи.

Всього посібник містить близько 600 задач різного рівня складності, серед яких докладно розібрано близько 60 прикладів.

Для студентів і викладачів спеціальності «Прикладна фізика та наноматеріали». Може бути корисним також студентам і викладачам інших навчальних закладів.

Рецензенти: докт. фіз.-мат. наук, проф. В. А. Львов
канд. фіз.-мат. наук, доц. В. М. Хотяїнцев

Ухвалено Вченою Радою
факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 4 від 11.11.2019)

© Д. Д. Шека, 2019

Зміст

I Основи теорії функцій комплексної змінної **9**

Тема 1. Комплексні числа **11**
§ 1. Теоретичні відомості 11
§ 2. Приклади розв'язування задач 14
§ 3. Завдання для аудиторної роботи 21
§ 4. Завдання для самостійної роботи 22

Тема 2. Елементарні функції комплексної змінної **25**
§ 5. Теоретичні відомості 25
§ 6. Приклади розв'язування задач 33
§ 7. Завдання для аудиторної роботи 36
§ 8. Завдання для самостійної роботи 36

Тема 3. Диференціювання функції комплексної змінної **39**
§ 9. Теоретичні відомості 39
§ 10. Приклади розв'язування задач 41
§ 11. Завдання для аудиторної роботи 46
§ 12. Завдання для самостійної роботи 46

Тема 4. Інтеґрування функції комплексної змінної **51**
§ 13. Теоретичні відомості 51
§ 14. Приклади розв'язування задач 54
§ 15. Завдання для аудиторної роботи 63
§ 16. Завдання для самостійної роботи 64

Тема 5. Ряди аналітичних функцій **71**
§ 17. Теоретичні відомості 71
§ 18. Приклади розв'язування задач 73
§ 19. Завдання для аудиторної роботи 83
§ 20. Завдання для самостійної роботи 83
§ 21. Приклади задач для модульної контрольної роботи (МКР-I) . 85

II Застосування теорії функцій комплексної змінної **87**

Тема 6. Лишки і методи їх обрахунку **89**
§ 22. Теоретичні відомості 89
§ 23. Приклади розв'язування задач 90
§ 24. Завдання для аудиторної роботи 93
§ 25. Завдання для самостійної роботи 93

Тема 7. Обчислення інтегралів по замкнених контурах за допомогою лишків **95**
§ 26. Теоретичні відомості 95

§ 27. Приклади розв'язування задач 95
§ 28. Завдання для аудиторної роботи 97
§ 29. Завдання для самостійної роботи 97

Тема 8. Обчислення визначених інтеґралів дійсного аналізу за допомогою теорії лишків **101**
§ 30. Теоретичні відомості 101
§ 31. Приклади розв'язування задач 103
§ 32. Завдання для аудиторної роботи 105
§ 33. Завдання для самостійної роботи 106

Тема 9. Конформні відображення елементарними функціями **111**
§ 34. Теоретичні відомості 111
§ 35. Приклади розв'язування задач 112
§ 36. Завдання для аудиторної роботи 117
§ 37. Завдання для самостійної роботи 117
§ 38. Приклади задач для модульної контрольної роботи (МКР-II) 118

Відповіді **121**

Рекомендована література **129**

Передмова

Навчальний посібник базується на двадцятирічному досвіді викладання комплексного аналізу на факультеті радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Відповідно до діючого навчального плану «Комплексний аналіз» є частиною курсу «Методи математичної фізики» і викладається протягом третього семестру для бакалаврів, що навчаються за спеціальністю «105. Прикладна фізика і наноматеріали». При цьому увага приділяється як основам комплексного аналізу, так і застосуванням. Курс розбито на дві частини (два модулі). В першому модулі розглянуто основи теорії функцій комплексної змінної, зокрема, комплексні числа, функції комплексної змінної, питання диференціювання, інтегрування і розвинення аналітичних функцій в степеневі ряди. Застосуванню комплексного аналізу присвячено другий модуль, в якому розглянуто теорію лишків, обчислення інтегралів за допомогою цієї теорії і задачі конформних відображень.

Відібраний матеріал і його розбиття на глави визначається дуже обмеженою кількістю практичних занять (всього 14 годин). Кожна глава складається з основних теоретичних відомостей, розв'язаних типових задач, задач для аудиторної та самостійної роботи студентів. Під час опрацювання матеріалу студенти мають виконати дві модульні контрольні роботи, в посібнику наведено типові приклади завдань для модульних контрольних робіт.

Навчальний посібник спрямовано, в першу чергу, на підготовку до практичних занять і занять самостійної роботи студентів з комплексного аналізу. При складанні завдань використано методичні розробки [**Bilokolos14**, **Bilokolos04**, **Volkovysky-tasks**, **Evgrafov-tasks**].

Д. Д. Шека Київ, 9 жовтня 2019 року

Частина I

Основи теорії функцій комплексної змінної

Тема 1

Комплексні числа

В цій темі розглядаються основні властивості комплексних чисел, способи їх зображення. Приділяється увагу операціям над комплексними числами: підсумовування, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня і добування кореня.

§ 1. Теоретичні відомості

Означення 1.1

Компле́ксним числом називають вираз $z = x + iy$, де x та y — дійсні числа, i — це символ, що називають уявною одиницею, оскільки квадрат його дорівнює -1, $i^2 := -1$.

Дійсні числа x та y називають відповідно *дійсною* та *уявною* частиною комплексного числа $z = x + iy$ та позначають, відповідно, $x = \operatorname{Re} z$, та $y = \operatorname{Im} z$. Комплексне число $x - iy$ називають *комплексно спряженим* до $z = x + iy$ і позначають як $\overline{z}$, тобто $\overline{x + iy} = x - iy$.

Поняття рівності та основні арифметичні операції на множині $\mathbb{C}$ визначаються таким чином:

1) Два комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ рівні тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2$ та $y_1 = y_2$.
2) Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
3) Добутком $z_1 z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число $z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$.
4) Часткою z_1/z_2 від ділення комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ на комплексне число $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ називається комплексне число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Зауважимо, що всі властивості операцій додавання і множення (комутативність, асоціативність і т.п.), притаманні $\mathbb{R}$, зберігаються і на множині $\mathbb{C}$. Модулем комплексного числа називають вираз

$$|z| := \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0. \tag{1.1}$$

Аргументом комплексного числа називають сукупність чисел

$$\operatorname{Arg} z := \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0,\ y > 0, \\ \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, & x = 0,\ y > 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

де $k \in \mathbb{Z}$. Через $\arg z$ позначатиме значення функції $\operatorname{Arg} z$ при $k = 0$, так зване головне значення аргументу. В багатьох застосуваннях зручними є інші форми комплексних чисел:

$$\begin{aligned} &z = x + iy && \text{— алгебраїчна форма,} \\ &z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) && \text{— тригонометрична форма,} \\ &z = \rho e^{i\varphi} && \text{— показникова форма.} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Зв'язок між тригонометричною та показниковою формами комплексних чисел встановлює *формулою Ейлера*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{1.4}$$

Показникова форма є найбільш зручною для операції множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня комплексних чисел. Нехай $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ і $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, тоді

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ \ \rho_2 \neq 0.$$

Для піднесення числа до цілого степеня зручно також використовувати *формулу Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,\ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

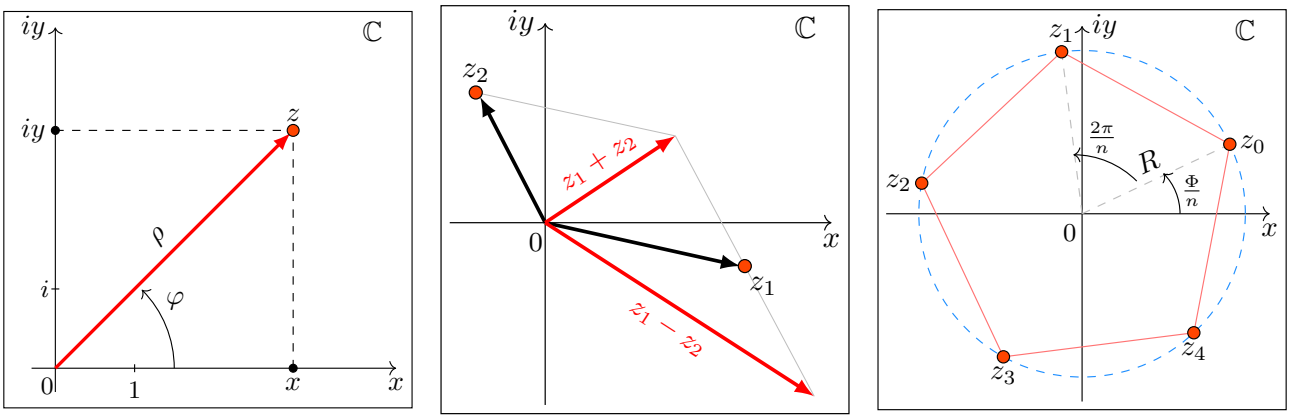
Тоді $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho^n e^{in\varphi}$.

Дійсні числа зображують точками прямої. Для *геометричної інтерпретації* комплексних чисел розглянемо декартову площину xOy та будемо зображати комплексне число $z = x + iy$ точкою з координатами (x, y). Саму площину при цьому називають *комплексною*. Вісь x будемо називати дійсною віссю, вісь iy — уявною. Зокрема, зображенням числа 1 буде точка $(1, 0)$ дійсної осі, а зображенням числа i — точка $(0, 1)$ уявної осі. Легко побачити, що кожній точці (x, y) комплексної площини також можливо співставити відповідне число $z = x + iy$, тобто відповідність між множиною $\mathbb{C}$ та комплексною площиною є взаємно однозначною. Тому далі ми не будемо розрізнювати терміни *комплексне число* та *точка комплексної площини*.

Виходячи з тригонометричної форму запису комплексного числа z, бачимо, що геометрично модуль ρ та аргументу φ є полярними координатами радіус-вектора точки z, див. рис. 1(а). Геометрічний зміст операцій додавання та віднімання полягає в тому, що комплексні числа додаються та віднімаються таким же чином, як і вектори, див. рис. 1(б). Виходячи з геометричної інтерпретації, для будь-яких двох комплексних чисел z_1 та z_2 випливає нерівність трикутника

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1.6}$$

Матрична інтерпретація комплексних чисел. При операціях множення та ділення комплексні числа мають властивість лінійних операторів. А саме, геометрично множення комплексного числа $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ на комплексне число $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ зводиться до повороту вектора z_1 на кут φ_2 та зміни його



(а) Модуль і аргумент (б) Додавання і віднімання (в) Добування корення

Рис. 1: Геометрична інтерпретація комплексних чисел.

довжини в ρ_2 разів, тобто можна розглядати z_1 як вектор, а z_2 як лінійний оператор, що діє на цей вектор (або навпаки). Таким чином, кожне комплексне число $z = x + iy$ може бути ототожнено з кососиметричною матрицею другого порядку такого вигляду

$$z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Для таким матриць виконуються алгебраїчні операції додавання, віднімання, множення та ділення так само, як і для комплексних чисел.

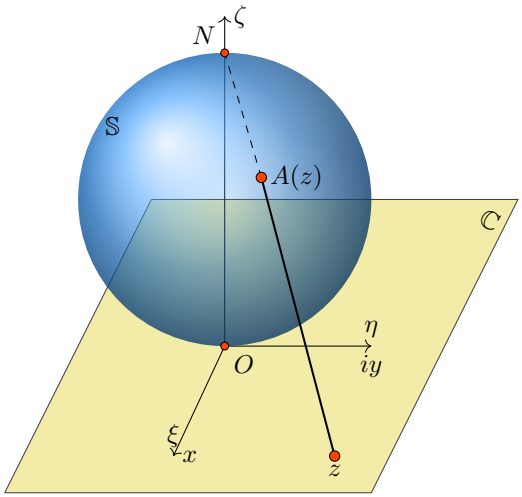


Рис. 2: Сфера Рімана.

Стереографічна проекція. Розглянемо сферу одиничного діаметра $\mathbb{S}$, яка дотична до комплексної площини $\mathbb{C}$ в точці $z = 0$, південному полюсі сфери, див. рис. 2. З'єднаємо протилежний північний полюс сфери N з точкою z на комплексній площині і позначимо через $A(z)$ точку перетину цієї прямої зі сферою. Стереографічна проекція утворює взаємооднозначну відповідність між комплексною площиною $\mathbb{C}$ та сферою S з виколотим північним полюсом, тобто кожному комплексному числу $z \in \mathbb{C}$ відповідає точка $A(z)$ на сфері: $z \leftrightarrow A(z)$. Виберемо систему координат ξ, η, ζ таким чином, щоб осі $O\xi$ і $O\eta$ збігалися з осями Ox і Oy комплексної площини, а вісь $O\zeta$ була би спрямована вздовж діаметра сфери Рімана, див. рис. 2. Координати точки на сфері зв'язані рівнянням $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = 1/4$. Зв'язок між координатами точки на площині x, y та координатами точки на сфері ξ, η, ζ задається такими формулами

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta},\ y = \frac{\eta}{1-\zeta}, \quad \xi = \frac{x}{1+|z|^2},\ \eta = \frac{y}{1+|z|^2},\ \zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \tag{1.7}$$

Комплексне число z називається коренем n-го степеня комплексного числа w, якщо $z^n = w$. При цьому алгебраїчне рівняння $z^n = w$, де $w \equiv$

$Re^{i\Phi} \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ має при $w \neq 0$ рівно n різних коренів, що визначаються за формулою

$$z_k = \sqrt[n]{R}e^{i(\Phi+2\pi k)/n}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{1.8}$$

На комплексній площині корені рівняння $z^n = w$ зображуються точками, розташованими у вершинах правильного n-кутника, вписаного у коло радіуса $\sqrt[n]{R}$ з центром у початку координат, див. рис. 1(в). Надалі ми позначатимемо через $z^{1/n}$ множину всіх значень кореня n-го степеня з комплексного числа z, через $\sqrt[n]{R}$ — арифметичні (дійсні невід'ємні) значення кореня з дійсного числа $R \geq 0$.

§ 2. Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1

Знайти дійсну і уявну частини комплексного числа

$$z = \frac{2-i}{(3+2i)(1-i)}.$$

◀

$$z = \frac{2-i}{(3+2i)(1-i)} = \frac{2-i}{3+2i-3i+2} = \frac{2-i}{5-i} = \frac{(2-i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} =$$
$$= \frac{10-5i+2i+1}{25+1} = \frac{11-3i}{26} = \frac{11}{26} - i\frac{3}{26}.$$

Таким чином, $\operatorname{Re} z = \frac{11}{26}, \operatorname{Im} z = -\frac{3}{26}$. ▶

Приклад 2.2

Знайти модуль і аргумент комплексного числа $z = \dfrac{(-\sqrt{3}+i)^6}{(3-2i)^4}$. Подати це число у показниковій формі.

◀Позначимо $z_1 = -\sqrt{3}+i$, $z_2 = 3-2i$. Знайдемо модуль та аргумент z_1 та z_2:

$$\rho_1 = |z_1| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = 2,$$
$$\rho_2 = |z_2| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13},$$
$$\varphi_1 = \operatorname{Arg} z_1 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + (2k_1+1)\pi = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k_1, \quad k_1 \in \mathbb{Z}$$
$$\varphi_1 = \operatorname{Arg} z_2 = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Запишемо числа z_1 і z_2 у показниковій формі: $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, і $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$.

Тоді шукане комплексно число

$$z = \frac{z_1^6}{z_2^4} = \frac{\rho_1^6 e^{6i\varphi_1}}{\rho_2^4 e^{4i\varphi_2}} = \rho e^{i\varphi},$$

де модуль ρ і аргумент φ комплексного числа z дорівнюють

$$\rho = \frac{\rho_1^6}{\rho_2^4} = \frac{2^6}{(\sqrt{13})^4} = \frac{64}{169},$$
$$\varphi = 6\varphi_1 - 4\varphi_2 + 2k\pi = 5\pi + 12k_1\pi + 4\operatorname{arctg}\frac{2}{3} - 4k_2\pi + 2k\pi =$$
$$= 4\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + (2n+1)\pi,$$
$$n = k + 2\pi + 6k_1 - 2k_2, \quad k_2, n \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, $|z| = \frac{64}{169}$, $Arg z = 4\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + (2n+1)\pi$, де $n \in \mathbb{Z}$. Показникова форма має вигляд $z = |z|e^{i\operatorname{Arg} z}$. ▶

Приклад 2.3

Використовуючи формулу Муавра, виразити $\cos 4\varphi$ через степені $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$.

◀Представимо шуканий вираз у формі $\cos 4\varphi = \operatorname{Re} w$, де $w = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi$. Згідно з формулою Муавра (1.5),

$$w = \cos 4\varphi + i\sin 4\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 =$$
$$= \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi.$$

Тоді шуканий вираз

$$\cos 4\varphi = \operatorname{Re} w = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi.$$

▶

Приклад 2.4

Знайти дійсну та уявну частини числа $w = (\overline{z}+1)^2 + \dfrac{i}{z+i}$.

◀Нехай $z = x + iy$. Тоді $\overline{z} = x - iy$ і

$$w = (x+1-iy)^2 + \frac{i}{x+i(y+1)} = (x+1)^2 - 2iy(x+1) - y^2 + \frac{i\,(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2} =$$
$$= (x+1)^2 - y^2 - 2iy(x+1) + \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} + i\frac{x}{x^2+(y+1)^2} =$$
$$= (x+1)^2 - y^2 + \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} + i\left(\frac{x}{x^2+(y+1)^2} - 2y(x+1)\right).$$

Таким чином,

$$\operatorname{Re} w = (x+1)^2 - y^2 + \frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}; \quad \operatorname{Im} w = \frac{x}{x^2+(y+1)^2} - 2y(x+1).$$

▶

Приклад 2.5

Довести, що для довільних $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \varphi \in \mathbb{R}$ виконуються наступні співвідношення:

$$\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = z_1 + z_2, \quad e^{i\varphi}\overline{e^{i\varphi}} = 1.$$

◀Доведемо першу рівність. Нехай $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2,\ x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\overline{\overline{z_1} + \overline{z_2}} = \overline{\overline{x_1 + iy_1} + \overline{x_2 + iy_2}} = \overline{x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2} = \overline{x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2)} =$$
$$= x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2) = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = z_1 + z_2.$$

Розглянемо другу рівність. Для довільного $\varphi \in \mathbb{R}$ скористаємось означенням $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тоді

$$e^{i\varphi}\overline{e^{i\varphi}} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,\overline{\cos\varphi + i\sin\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,(\cos\varphi - i\sin\varphi) =$$
$$= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

▶

Приклад 2.6

Зобразити на комплексній площині множину точок

$$\mathscr{M} = \left\{ z \ :\ \operatorname{Re}\frac{z-3}{z+4i} \geq -\frac{1}{2} \right\}.$$

◀Знайдемо множину точок z, яка задовольняє рівняння

$$\operatorname{Re}\frac{z-3}{z+4i} = -\frac{1}{2},$$

це буде межа множини $\mathscr{M}$. Нехай $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що $z \neq -4i$. Підставимо в шукане рівняння: $\operatorname{Re}\dfrac{x+iy-3}{x+iy+4i} = -\dfrac{1}{2}$, або $\operatorname{Re}\dfrac{x-3+iy}{x+i(y+4)} = -\dfrac{1}{2}$. Знайдемо частку від ділення двох комплексних чисел, а потім її дійсну частину:

$$\operatorname{Re}\frac{(x-3+iy)(x-i(y+4))}{x^2+(y+4)^2} = \operatorname{Re}\frac{(x-3)x + y(y+4) + i\,(yx - (x-3)(y+4))}{x^2+(y+4)^2} =$$
$$= \frac{(x-3)x + y(y+4)}{x^2+(y+4)^2} = -\frac{1}{2}.$$

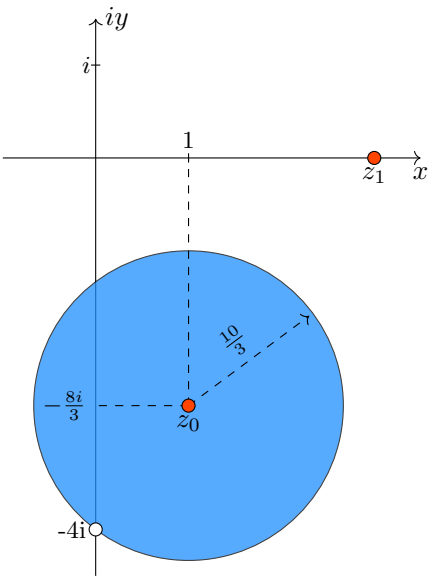


Рис. 3: До прикладу 2.6

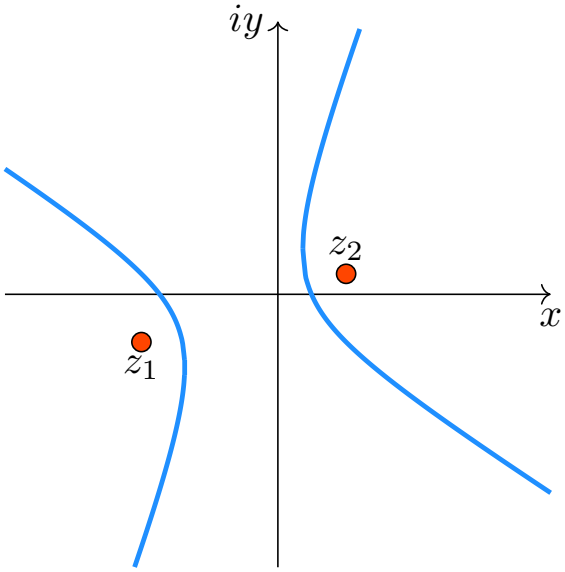


Рис. 4: До прикладу 2.7

Розв'яжемо звичайне рівняння для двох дійсних змінних x, y:

$$\frac{(x-3)x+y(y+4)}{x^2+(y+4)^2}=-\frac{1}{2},$$

звідки $2x^2-6x+2y^2+8y=-x^2-(y+4)^2$, тому $3x^2-6x+3y^2+16y+16=0$. Отримали рівняння другого порядку. Виділимо повні квадрати:

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{8}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2, \quad \text{або} \quad |z-z_0|=\frac{5}{3}, \quad \text{де } z_0=1-\frac{8i}{3}.$$

Це рівняння описує коло з центром в точці $z_0=1-\frac{8i}{3}$ радіуса $\frac{5}{3}$. Межею множини $\mathscr{M}$ буде коло з виколотою точкою $-4i$. Залишилось визначити, множина $\mathscr{M}$ — це внутрішність або зовнішність побудованого кола. Для цього візьмемо довільну точку комплексної площини, наприклад, точку $z_1=3$. З одного боку, точка z_1 не належить множині $\mathscr{M}$, оскільки $\operatorname{Re}\dfrac{z_1-3}{z_1+4i}=0$, тобто її координати не задовольняють нерівність, що визначає $\mathscr{M}$. З іншого боку, точка z_1 лежить зовні кола, оскільки $|z_1-z_0|=\frac{10}{3}$. Це означає, що $\mathscr{M}$ — це внутрішня частина побудованого кола (разом з межею, але з виколотою точкою $-4i$, див. рис. 3).

Таким чином, $\mathscr{M}=\left\{z:\left|z-1+\frac{8i}{3}\right|\le\frac{5}{3}\right\}\setminus\{-4i\}$. ▶

Приклад 2.7

Для заданих $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ зобразити на комплексній площині множину точок $\mathscr{M}=\{z \ : \ ||z-z_1|-|z-z_2||=1\}$.

◀На відміну від попереднього прикладу, тут для розв'язку задачі зручно використати не аналітичний підхід, а геометричну інтерпретацію комплексного числа. Дійсно, рівняння $||z-z_1|-|z-z_2||=1$ задає множину то-

чок комплексної площини, різниця відстаней від яких до двох фіксованих точок z_1 і z_2 є величина стала і дорівнює 1 або -1. З курсу аналітичної геометрії відомо, що таку властивість має крива другого порядку — гіпербола, а точки z_1 і z_2 — це фокуси даної гіперболи (див. рис. 4). ▶

Приклад 2.8

Який образ на сфері Рімана має точка i? Точка $\dfrac{1}{z}$?

◀Точка i має координати $(0,1)$, $|i|=1$. Для знаходження координат точки $M(i)$ скористаємось формулами (1.7):

$$\xi=\frac{0}{1+1}=0,\quad \eta=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2},\quad \zeta=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $M(i)=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

Нехай $z=x+iy, z\neq 0$. Тоді точка $\dfrac{1}{z}$ має координати $\left(\dfrac{x}{|z|^2},-\dfrac{y}{|z|^2}\right)$, $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$. З формул (1.7) випливає, що точка $M\left(\frac{1}{z}\right)$ має такі координати:

$$\xi_{\frac{1}{z}}=\frac{x/|z|^2}{1+(1/|z|)^2}=\frac{x}{1+|z|^2}=\xi_z,\quad \eta_{\frac{1}{z}}=-\frac{y/|z|^2}{1+(1/|z|)^2}=-\frac{y}{1+|z|^2}=-\eta_z,$$

$$\zeta_{\frac{1}{z}}=\frac{(1/|z|)^2}{1+(1/|z|)^2}=\frac{1}{1+|z|^2}=1-\zeta_z.$$

Таким чином, $M\left(\frac{1}{z}\right)=(\xi,-\eta,1-\zeta)$. Якщо $z=0$, тоді $\frac{1}{z}=\infty$, $M(\infty)=N$ (північний полюс сфери). ▶

Приклад 2.9

При якому значенні параметра a колу $|z-i|=a$, $a>0$ комплексної площини відповідає велике коло на сфері Рімана?

◀Спочатку зауважимо, що $|z-i|=a$ тоді і тільки тоді, коли $z-i=a(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi\in(-\pi,\pi]$, або $z=a\cos\varphi+i(a\sin\varphi+1)$. Крім того, $|z|^2=1+a^2+2a\sin\varphi$. Тоді образ точки z (яка лежить на колі $|z-i|=a$) на сфері Рімана має такі координати

$$\xi=\frac{a\cos\varphi}{2+a^2+2a\sin\varphi},\quad \eta=\frac{a\sin\varphi+1}{2+a^2+2a\sin\varphi},\quad \zeta=\frac{1+a^2+2a\sin\varphi}{2+a^2+2a\sin\varphi}.$$

Множині точок сфери відповідає велике коло тоді і тільки тоді, коли ця множина належить деякій площині, яка проходить через центр сфери. У випадку сфери Рімана така площина задовольняє рівняння $A\xi+B\eta+C(\zeta-1/2)=0$, де A,B,C — це деякі константи, які одночасно

не дорівнюють 0 (тобто для кожного набору параметрів A, B, C площина, яка задовольняє вказане рівняння, проходить через точку $(0, 0, 1/2)$ — центр сфери Рімана). Таким чином, потрібно знайти, при якому значенні параметра a знайдуться константи A, B, C такі, що рівність $A\xi + B\eta + C(\zeta - \frac{1}{2}) = 0$ виконується для всіх точок z, які лежать на колі $|z - i| = a$. Підставимо в цю рівність знайдені вирази для ξ, η, ζ :

$$\frac{Aa\cos\varphi + B(a\sin\varphi + 1) + C(1 + a^2 + 2a\sin\varphi)}{2 + a^2 + 2a\sin\varphi} \equiv 0$$

для всіх $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Знаменник завжди більше 0 при довільних $a > 0, \varphi \in (-\pi, \pi]$. Чисельник тотожно дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ і вільний член дорівнюють 0 одночасно. Запишемо цю умову

$$\begin{cases} Aa = 0, \\ aB + aC = 0, \\ 2B + a^2C = 0. \end{cases}$$

Оскільки $a > 0$, то $A = 0, C = -B$ і, з третього рівняння, $B(2 - a^2) = 0$. $B \neq 0$ (тоді $A = B = C = 0$) і $a = \sqrt{2}$.

Таким чином, колу $|z - i| = \sqrt{2}$ комплексної площини відповідає велике коло на сфері Рімана. ►

Приклад 2.10

Знайти матричне зображення числа $\frac{1}{z}$.

◄Нехай $z = x + iy$. Даному числу відповідає така матриця

$$z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

Оскільки при такому ототожненні всі алгебраїчні операції виконуються за звичайними правилами матричної алгебри, то

$$\frac{1}{z} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

►

Приклад 2.11

Розв'язати рівняння $z^2 + 1 = 0$ на множині комплексних чисел та зобразити розв'язки на комплексній площині.

◄Зауважимо, що на множині дійсних чисел рівняння не має жодного

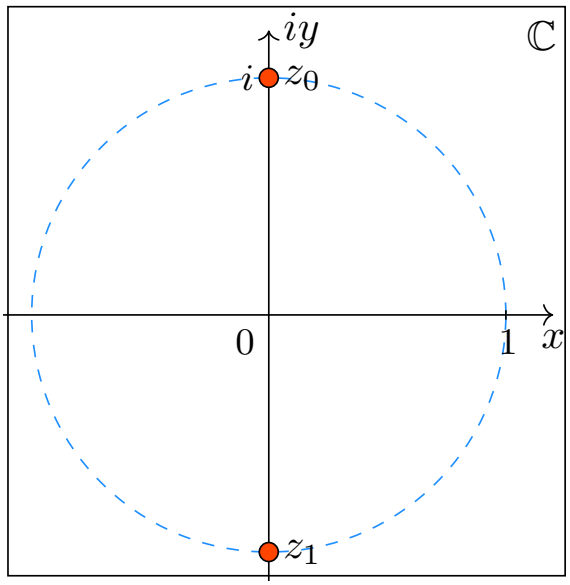


Рис. 5: До прикладу 2.11

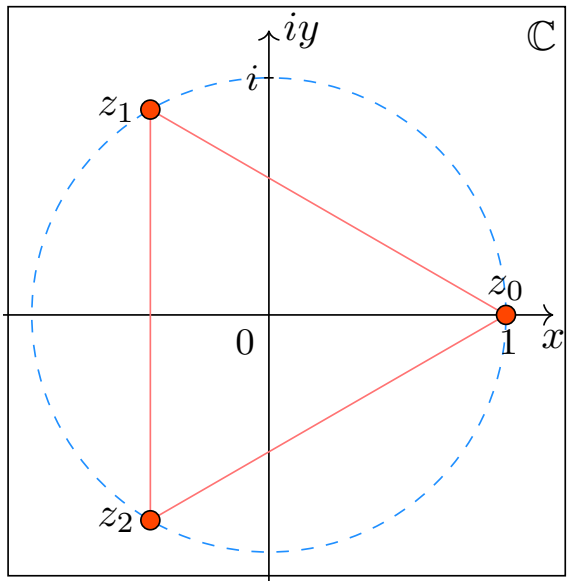


Рис. 6: До прикладу 2.12

кореня. На множині комплексних чисел рівняння має два різних кореня:

$$z_k = (-1)^{1/2} = e^{i(\pi+2\pi k)/2},\ k = 0, 1. \quad z_0 = e^{i\pi/2} = i,\ z_1 = e^{i3\pi/2} = -i.$$

Графічно, розв'язки знаходяться на уявній осі, див. рис. 5. ▶

Приклад 2.12

Розв'язати рівняння $z^3 + 1 = 0$ на множині комплексних чисел та зобразити розв'язки на комплексній площині.

◀Зауважимо, що на множині дійсних чисел рівняння має рівно один корінь $z = -1$. На множині комплексних чисел рівняння має три різних кореня:

$$z_k = (-1)^{1/3} = e^{i(\pi+2\pi k)/3},\ k = 0, 1, 2,$$
$$z_0 = e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2},\ z_1 = e^{i\pi} = -1,\ z_2 = e^{i5\pi/3} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Графічно, розв'язки знаходяться у вершинах правильного трикутника, який вписаний в одиничне коло, див. рис. 6. ▶

Приклад 2.13

Обчислити всі значення $(4 - 3i)^{1/5}$ на множині комплексних чисел.

◀Знайдемо модуль R і аргумент Φ комплексного числа $w = 4 - 3i$:

$$R = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5, \qquad \Phi = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Згідно з формулою добування коренів, див. (1.8),

$$z_k = w^{1/5} = \sqrt[5]{R}e^{\frac{i}{5}(\Phi+2\pi k)/5} = \sqrt[5]{5}e^{\frac{i}{5}\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+2k\pi\right)}, \quad k = \overline{0, 4}.$$

Таким чином, вираз $(4-3i)^{1/5}$ має п'ять різних значень:

$$z_0 = \sqrt[5]{5}e^{-\frac{i}{5}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}}, \quad z_1 = \sqrt[5]{5}e^{\frac{i}{5}(-\operatorname{arctg}4/3+2\pi)}, \quad z_2 = \sqrt[5]{5}e^{\frac{i}{5}(-\operatorname{arctg}4/3+4\pi)},$$
$$z_3 = \sqrt[5]{5}e^{\frac{i}{5}(-\operatorname{arctg}4/3+4\pi)}, \quad z_4 = \sqrt[5]{5}e^{\frac{i}{5}(-\operatorname{arctg}4/3+4\pi)}.$$

▶

§ 3. Завдання для аудиторної роботи

1. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа $z = \dfrac{3i-5}{(2+i)^2}$.

2. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа $w = \dfrac{1}{z}$, де $z = x+iy$ та $z \neq 0$.

3. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа

$$z = \frac{(i^{31}-2)^3 - (4i^{33}+3)^2}{(1-2i)(5+i)}.$$

4. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $z = -3$. Подати це число у показниковій формі.

5. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $z = i$. Подати це число у показниковій формі.

6. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $z = -1-i$. Подати це число у показниковій формі.

7. Знайти модуль і аргумент комплексного числа $z = \dfrac{(1+i)^{16}}{(-1+3i)^{15}}$. Подати це число у показниковій формі.

8. Використовуючи формулу Муавра, виразити $\cos 3\varphi$ через степені $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$.

У прикладах 9–13 визначити геометричний смисл вказаних співвідношень.

9. Зобразити на комплексній площині множину точок

$$\mathscr{M} = \{z \ : \ |z-z_0| = R, \quad z_0 \in \mathbb{C}, R > 0\}.$$

10. Зобразити на комплексній площині множину точок

$$\mathscr{M} = \{z \ : \ |z-z_0| < R, \quad z_0 \in \mathbb{C}, R > 0\}.$$

11. Зобразити на комплексній площині множину точок

$$\mathscr{M} = \{z \ : \ \alpha < \arg z < \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta\}.$$

12. Зобразити на комплексній площині множину точок

$$\mathscr{M} = \{z \ : \ |z-z_1| = |z-z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}.$$

13. Зобразити на комплексній площині множину точок

$$\mathscr{M} = \left\{ z \ : \ \operatorname{Re} \frac{z-3+i}{z-i} > 0 \right\}.$$

14. Обчислити всі значення кореня $(3-4i)^{1/7}$ і зобразити графічно на комплексній площині.

15. Довести, що для будь-якого комплексного числа $z = x+iy$ справедливо:

$$(x+iy)^{1/2} = \pm \left(\sqrt{\frac{\rho+x}{2}} + i \ \operatorname{sign}(y) \sqrt{\frac{\rho-x}{2}} \right), \quad \text{де } \rho = \sqrt{x^2+y^2}. \qquad (3.1)$$

16. Використовуючи формулу (3.1), знайти всі значення кореня $(-3+2i)^{1/2}$.

17. Знайти всі розв'язки рівняння $z^4 - 1 = 0$ на множині комплексних чисел.

§ 4. Завдання для самостійної роботи

У прикладах 18–21 знайти дійсну та уявну частини комплексних чисел.

18. $\dfrac{-i+4}{(-3+i)^2}$

19. $\dfrac{(4i+3)^2+(3i-5)^2}{(3+2i)(2-i)}$

20. $\dfrac{(2i^{53}+1)^3}{(2-3i)(3+i)}$

21. $\dfrac{(i+1)^3}{(-1-3i^{35})(-2+i)}$

У прикладах 22–25 знайти модуль та аргумент комплексних чисел та подати у показниковій формі.

22. 2.

23. $-\dfrac{i}{2}$.

24. $(-8+6i)^{100}$.

25. $\dfrac{(1+2i)^{16}}{(-1-7i)^{11}}$.

У прикладах 26–29, використовуючи формулу Муавра, виразити через степені $\cos\varphi$ та $\sin\varphi$ наступні функції.

26. $\sin 2\varphi$.

27. $\cos 2\varphi$.

28. $\sin 3\varphi$.

29. $\sin 4\varphi$.

У прикладах 30–33 знайти дійсну та уявну частини числа w, якщо $z = x+iy$.

30. $w = \dfrac{1}{z^2}$, де $z \neq 0$.

31. $w = z^2 + z$.

32. $w = \dfrac{z^2}{z+1}$, $z \neq -1$.

33. $w = z^2 - 4iz + 1$.

У прикладах 34–37 довести, що

34. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

35. $\dfrac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R}$.

36. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n,\ z \in \mathbb{C}$.

37. $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{i\varphi n},\ \varphi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

38. Довести, що для довільного многочлена $P(z)$ з дійсними коефіцієнтами і для довільного комплексного числа z має місце рівність $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

39. Довести, що функція $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ є взаємно однозначним відображенням на множині $D = \{(\rho, \varphi) : \rho > 0,\ \varphi \in (\alpha, \beta)\}$, якщо $|\beta - \alpha| \le \dfrac{2\pi}{n}$.

У прикладах 40–43 зобразити на комплексній площині множину точок $\mathscr{M}$.

40. $\mathscr{M} = \{z : \operatorname{Im} z < a, \quad a \in \mathbb{R}\}$.

41. $\mathscr{M} = \{z : |z - z_1| + |z - z_2| = 2a\}$, де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ і $a > \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$.

42. $\mathscr{M} = \left\{z : \operatorname{Im} \dfrac{z - 1 - 2i}{z + 3 - i} < 1\right\}$.

43. $\mathscr{M} = \left\{z : 0 < \arg \dfrac{i - z}{z + i} < \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

44. Знайти образ точки $z = -i$ на сфері Рімана.

45. Довести, що для довільних $A > 0$, $C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ таких, що $AC < |B|^2$ рівняння

$$A|z|^2 + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$$

є рівнянням кола. Знайти радіус і центр цього кола.

46. Для довільного $a \in \mathbb{C}$ такого, що $\operatorname{Im} a < 0$ довести, що величина $\left|\dfrac{z - a}{z - \overline{a}}\right|$ більша за 1 у верхній півплощині, менша за 1 у нижній півплощині, дорівнює 1 на дійсній осі.

47. Нехай точки z_1, z_2, z_3 лежать на колі з центром в початку координат. Довести, що трикутник з вершинами в цих точках є рівностороннім тоді і лише тоді, коли $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

48. Нехай точки z_1, z_2, z_3 — три вершини паралелограма (точки занумеровані в порядку обходу кола). Довести, що точка ζ є внутрішньою точкою цього паралелограма тоді і лише тоді, коли існують числа $a, b, c \in (0, 1)$ такі, що $a + b + c = 1$ і $\zeta = az_1 + bz_2 + cz_3$. Показати, що для кожної внутрішньої точки ζ числа a, b, c визначаються єдиним чином.

49. Довести співвідношення 2.1, які дають взаємозв'язок між координатами точки на комплексній площині і на сфері Рімана.

50. Для заданого $\alpha \in \mathbb{R}$ визначити, при якому значенні параметра R колу $|z - \alpha| = R$ відповідає велике коло на на сфері Рімана.

51. Довести, що колу на сфері Рімана відповідає коло або пряма на комплексній площині, причому пряма відповідає в тому і лише в тому випадку, коли коло на сфері Рімана проходить через точку N (північний полюс).

У прикладах 52–54 знайти матричне зображення комплексного числа.

52. $\overline{z}$.

53. $|z|^2$.

54. $\dfrac{i}{z+1}$.

У прикладах 55–57 обчислити всі значення кореня на множині комплексних чисел і зобразити графічно на комплексній площині.

55. $(-1)^{1/3}$.

56. $i^{1/4}$.

57. $(-3+5i)^{2/3}$.

У прикладах 58–60, використовуючи формулу (3.1), знайти всі значення кореня на множині комплексних чисел:

58. $(11-3i)^{1/2}$.

59. $(7+4i)^{1/2}$.

60. $(-8-5i)^{1/2}$.

У прикладах 61–63, знайти всі розв'язки рівнянь на множині комплексних чисел.

61. $z^5+1=i$.

62. $z^6-1=i\sqrt{3}$.

63. $(z+1)^4=4i-7$.

64. Скільки значень має вираз $z^{n/m}$, де $z\in\mathbb{C}$ та $n,m\in\mathbb{N}$?

65. За якої умови множини значень $\left(z^{1/m}\right)^n$ і $\left(z^n\right)^{1/m}$ збігаються?

66. Довести, що всі вершини довільного правильного n-кутника, який лежить в комплексній площині, задаються формулою $z_k=aw^k+b,\ k=\overline{0,n-1}$, де $w=e^{2\pi i/n},\ a,b\in\mathbb{C}$.

Тема 2

Елементарні функції комплексної змінної

Елементарні функції комплексної змінної являють собою природне продовження на комплексну площину добре відомих з дійсного аналізу елементарних функцій. Однак при цьому функції можуть набувати нові, під час незвичайні властивості. Так, наприклад, експонента стає періодичною функцією в комплексній площині, а тригонометричні функції $\sin z$ і $\cos z$ стають необмеженими. В цій темі вводяться деякі геометричні поняття комплекного аналізу, дано способи візуалізації функцій комплексної змінної і розглядаються основні елементарні функції.

§ 5. Теоретичні відомості

Означення 5.1

На множині M точок площини $\mathbb{C}$ задано *комплексну функцію комплексної змінної*

$$w = f(z), \tag{5.1}$$

якщо задано закон, за яким кожній точці $z \in M$ ставиться у відповідність задана точка $w \in N$.

При цьому множину M називають *множиною визначення*, а множину N — *множиною значень*.

Функція комплексної змінної ставить у відповідність комплексним числам комплексні:

$$f : z \mapsto w, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, w = u + iv \in \mathbb{C},$$

тобто маємо дві дійсні функції $u = u(x, y)$ та $v = v(x, y)$, що відображають комплексну площину на комплексну площину.

Якщо кожному значенню $z \in M$ відповідає одне значення $w \in N$, то функція є *однозначною*, а якщо декілька — *багатозначною*:

$$z_1 = z_2 \Longrightarrow f(z_1) = f(z_2). \tag{5.2а}$$

Для однозначної функції різним значенням функції відповідають різні значення аргументу:

$$f(z_1) \neq f(z_2) \Longrightarrow z_1 \neq z_2. \tag{5.2б}$$

Якщо кожному значенню функції $w \in N$ відповідає одне значення $z \in M$, то функція є *однолистою*, тобто

$$f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow z_1 = z_2. \tag{5.3а}$$

Для однолистої функції різним значенням аргументу відповідають різні значення функції:

$$z_1 \neq z_2 \Longrightarrow f(z_1) \neq f(z_2). \tag{5.3б}$$

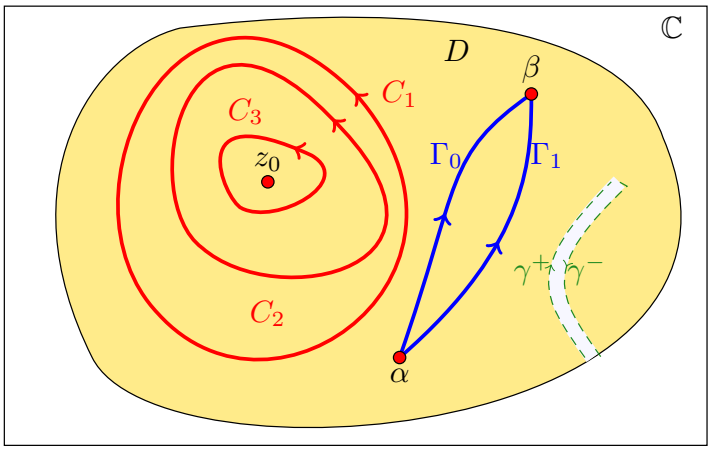


Рис. 7: Гомотопічно еквівалентні криві:
$C_1 \backsim C_2 \backsim C_3 \backsim 0$ rel D;
$\Gamma_0 \backsim \Gamma_1$ rel D.
γ^+ та γ^- — два береги розрізу.

Умову однолистості функції $f(z)$ на множині M позначають $f(z) \in \mathcal{U}(M)$. Якщо функція є однозначною і однолистою, то кажуть про *взаємно однозначну* функцію.

Комплекснозначна функція $z(t)$, де $t \in [\alpha, \beta]$ відображає відрізок $[\alpha, \beta]$ на деяку множину точок комплексної площини $\mathbb{C}$, яку можна розглядати як графічний образ цієї функції. Зокрема, якщо функція $z(t)$ є неперервною, то її графічним образом буде деяка *крива*; крива є впорядкованою множиною точок комплексної площини. Напрямок руху точки z, який відповідає напрямку збільшення t, називається *додатним*. Точка z кривої γ називається *точкою самоперетина кривої*, якщо $z(t_1) = z(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$. Виключенням є збіжність початку і кінця кривої: $z(\alpha) = z(\beta)$. Таку криву називають *замкненою*. Неперервна крива, що не містить точок самоперетину, називається *простою* або *жордановою кривою*. Довжина кусково-гладкої кривої дорівнює: $l(\gamma) = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Областю D на розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ називають відкриту зв'язну множину. Множина D називається відкритою, якщо кожна точка цієї множини належить до неї разом із деяким ε-околом. Множина D називається зв'язною, якщо будь-які дві точки області можливо з'єднати кривою, що належить до тієї ж області. *Межа* області D — це множина ∂D точок, які не належать області D, але в будь-якому околі яких є точки, що належать D. Додатнім *напрямком обходу* межі будемо вважати той, при якому область завжди залишається ліворуч. Об'єднання області D та її межі називається *замиканням* та позначається $\overline{D}$. При цьому множину $\overline{D}$ називають також *замкненою* областю. *Розріз* області $D \in \mathbb{C}$ вздовж розімкненої кривої $\gamma = \{z(t) \,:\, 0 \leq t \leq 1\}$ це видалення точок цієї кривої із множини, тобто це перехід до множини $D \setminus \gamma$. Кожній точці $z(t)$ розрізу γ відповідають два межових елемента області D, лівий та правий (або верхній та нижній). В сукупності, ці елементи утворюють два *береги розрізу* γ, див. рис. 7.

Область D на повній комплексній площині називається *однозв'язною*, якщо будь-яку замкнену жорданову криву, що належить D, можна неперервною деформацією стягнути в точку, залишаючись в області D. В інших випадках область є *багатозв'язною*. Прикладом однозв'язної області є круг

$$\mathbb{D}_R(a) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a| < R\}\,.$$

Межею круга $\mathbb{D}_R(a)$ є коло

$$\mathbb{T}_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = R\}.$$

Одиничний круг $\mathbb{D}_1(0)$ позначають $\mathbb{D}$, одиничне коло $\mathbb{T}_1(0)$ позначають $\mathbb{T}$. Прикладом двозв'язної області є проколотий ε-окіл точки

$$\dot{\mathbb{D}}_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < \varepsilon\}.$$

Проколотий одиничний круг $\dot{\mathbb{D}}_1(0)$ позначають $\dot{\mathbb{D}}$. Прикладом двозв'язної області є кільце

$$\mathscr{R}(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}.$$

Неперервну деформацію кривої називають перетворенням *гомотопії*, а криві, що можуть бути зведени неперервною деформацією одна до одної називають *гомотопічно еквівалентними*, див. рис. 7. Якщо криві γ_0 і γ_1 гомотопічно еквівалентни в області D, позначатиме це як:

$$\gamma_1 \backsim \gamma_2 \text{ rel } D. \tag{5.4}$$

Будь-яка замкнена крива, що належить однозв'язній області гомотопічно еквивалентна нулю (позначення: $\gamma \backsim 0$ rel D). Для областей з кусково-гладкими межами має місце наступна властивість: межа однозв'язної області на повній комплексній площині або складається лише з однієї замкненої жорданової кривої, або з однієї точки, або не містить жодної точки (уся $\overline{\mathbb{C}}$-площина).

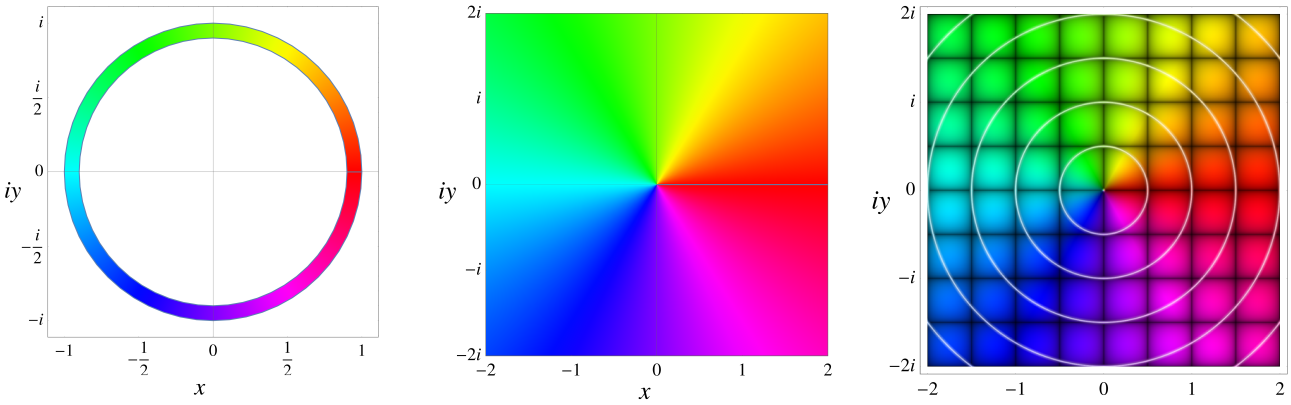
Область D називається *обмеженою*, якщо існує круг $U(0; R < \infty)$, що містить у собі D.

Обмежена область завжди компактна, тобто з будь-якої послідовності точок області завджи існує підпослідовність, що збігається до внутрішньої точки цієї області. Будемо казати, що область G *компактно належить* D, якщо її замикання $\bar{G}$ (в топології $\bar{\mathbb{C}}$, тобто з урахуванням ∞) належить D. Компактну належність позначають символом $\Subset$, отже $\bar{G} \subset D \Longrightarrow G \Subset D$.

На відміну від дійсної функції дійсної змінної, для якої можливо побудувати графік на площині, зобразити комплексну функцію комплексної змінної можна лише в чотирьохвимірному просторі. Тому виникає питання: як графічно візуалізувати функції комплексного змінного? Одна із можливостей 3D візуалізації — зображення аргументу як функції двох дійсних змінних. Однак аргумент комплексного числа $\operatorname{Arg} z$ визначений неоднозначно. Якщо обмежитись лише головною частиною аргументу $\varphi = \arg z$, проблема не знімається, при обході по контуру ми не повертаємось до того самого значення — аргумент має приріст 2π. Тому візуалізація аргументу має свої вади. Щоб позбавитись від неоднозначності аргументу, розглянемо *унімодулярне комплексне число* (тобто, модуль якого рівен одиниці), яке визначається однозначною функцією

$$\psi(z) := \frac{z}{|z|} = e^{i\varphi}. \tag{5.5}$$

Оскільки $|\psi| = 1$, кожному комплексному числу z співставлятиме точку одиничного кола. Тому для геометричного зображення кожній точці кола



(а) Кольорове кодування фази комплексного числа на одиничному колі.

(б) Кольорове кодування фази комплексного числа на $\mathbb{C}$–площині.

(в) Фазовий портрет функції $f(z) = z$

Рис. 8: Побудова фазового портрету

поставимо у відповідність певний колір, використовуючи *кольорове кодування*, див. рис. 8(а).

Будь-якій точці комплексної площини z відповідає певне значення $\psi(z)$, яке зображатиме відповідним кольором, див. рис. 8(б). Звернемо увагу, що в околі точки $z = 0$ зустрічаються всі кольори. Причина полягає в тому, що ця точка — нуль функції. Побудоване за наведеними правилами графічне зображення називають *фазовий портрет*, оскільки він графічно визначає аргумент (фазу) комплексного числа.

Розглянемо тепер функцію $w = f(z) = u + iv = w = Re^{i\Phi}$. Фазовий портрет визначається кольоровим кодуванням унімодулярної функції

$$\psi(w) = \frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\Phi}. \tag{5.6}$$

При цьому будемо зображати також декартову сітку $u = \text{const}$ і $u = \text{const}$ (для цього використовуватиме темні лінії), а також полярну сітку $R = \text{const}$ і $\Phi = \text{const}$ (світлі лінії). Фазовий портрет для тотожного відображення $f(z) = z$ зображено на рис. 8(в). Зазначимо, що точки, де зустрічаються всі кольори, визначають нулі функції. Через нуль функції проходять декілька ізоліній декартової сітки. В околі нуля полярна сітка має вигляд концентричних кіл.

Деякі питання візуалізації функцій комплексної змінної за допомогою фазового портрету буде розглянуто надалі. Докладніше див. в [**Wegert12**].

Перейдемо до розгляду елементарних функцій комплексної змінної.

Степенева функція $w = z^n$ при $n \in \mathbb{N}$ визначена в усій комплексній площині. При відображенні за допомогою степеневої функції $w = z^n$ комплексна площина $\mathbb{C}$ покриває себе n разів, тобто відображення є n-листим. Областю однолистості є, наприклад сектори однолистості

$$\frac{2\pi k}{n} < \varphi < \frac{2\pi(k+1)}{n}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 5.1

Побудувати фазовий портрет функції $w = z^2$.

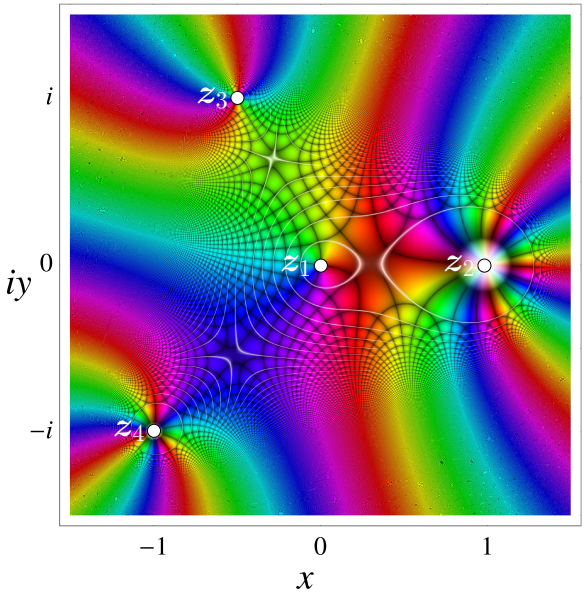


Рис. 9: Ілюстрація до прикладу 5.2: фазовий портрет функції (5.7).

◀Використовуючи показникову форму, матимемо $\Phi = 2\varphi$, звідки $\psi = e^{2i\varphi}$. Фазовий портрет цієї функції зображено на рис. 10(a). Можна побачити, що в околі точки $z = 0$ знов зустрічаються всі кольори. Однак, при обході по деякому замкнено контуру навколо $z = 0$ кольори повторюються двічі. Це пов'язано з тим, що $z = 0$ — є двократним нулем функції $w = z^2$. Про двократність нуля також свідчить кількість ізоліній, що перетинаються в нулі — їх вдвічі більше ніж порядок нуля. ▶

Узагальненням степеневої функції є поліноми

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}, \qquad k = \overline{0,n},\ a_k \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0.$$

Приклад 5.2

Дослідити поведінку функції

$$f(z) = z(z-1)^4 \left(z + \frac{1}{2} - i\right)^2 (z+1+i)^3, \tag{5.7}$$

в околі її нулів.

◀

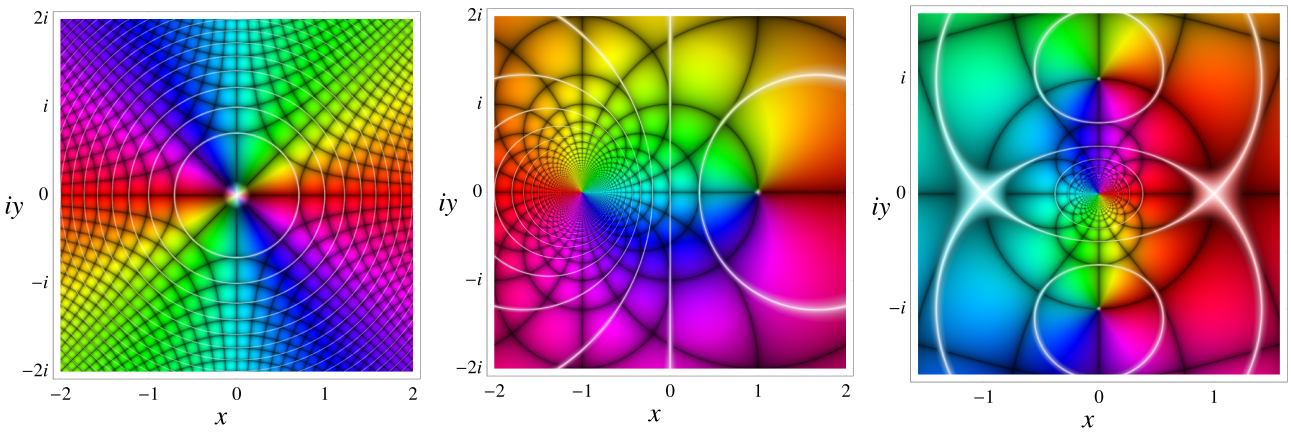
Функція має простий нуль в точці $z_1 = 0$. Навколо цієї точки фаза неперервно змінюється. Якщо побудувати фазовий портрет, див. рис. 9, то в околі цієї точки кольори пробігають всі можливі значення відповідно до кодування.

Наступний нуль функції — точка $z_2 = 1$. Це нуль 4-го порядку, відповідно кольори навколо цієї точки змінюються 4 рази.

В околі точки $z_3 = i - 0.5$ — двократного нуля кольори двічі змінюються.

Нарешті, точка $z_4 = -1 - i$ — нуль 3-го порядку. На фазовому портреті усі кольори тричі змінюються при обході z_3 по замкненому контуру.

▶



(а) $f(z) = z^2$. (б) $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. (в) Функція Жуковського.

Рис. 10: Фазові портрети поліномів і раціональних функцій

Раціональною називають функцію, що є відношенням двох поліномів,

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо два важливих приклади раціональних функцій.

Дробово-лінійною функцією називають відношення двох лінійних функцій

$$w = \sigma(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C},\ c \neq 0. \tag{5.8}$$

Дробово-лінійна функція здійснює перетворення комплексної площина, яке прийнято називати *перетворенням Мебіуса* або *дробово-лінійним відображенням*. За умови невиродженості $\det \sigma = \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc \neq 0$, перетворення Мебіуса здійснює однолисте відображення $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Фазовий портрет функції $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ зображено на рис. 10(б).

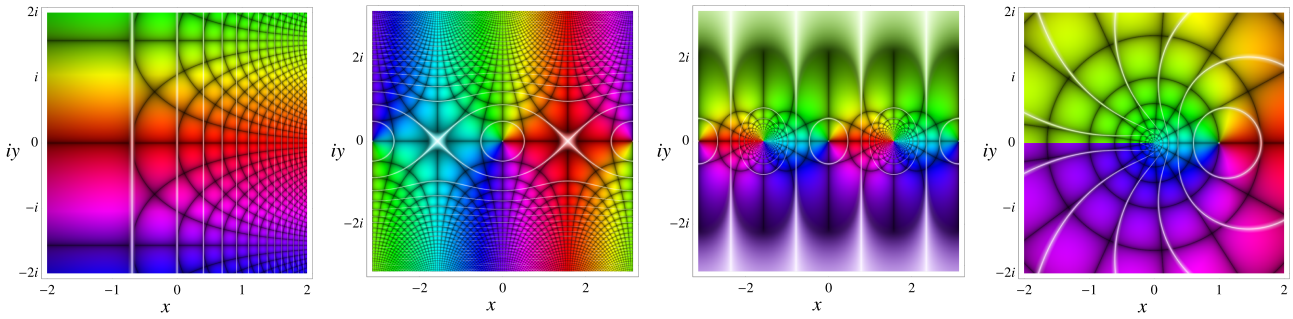
Іншим важливим прикладом раціональної функції є так звана функція *Жуковського*, що задається як $w = j(z)$, де:

$$j(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{5.9}$$

Вона визначена і однозначна на всій комплексній площині за виключенням точки $z = 0$. Ця функція здійснює перетворення комплексної площини, яке прийнято називати *перетворенням Жуковського*. Для однолистості функції Жуковського необхідно та достатньо, щоб область не мала точок z_1 і z_2, зв'язаних співвідношенням $z_1 z_2 = 1$. Цьому співвідношенню задовольняють, наприклад, наступні області: внутрішні точки одиничного кола $|z| < 1$, зовнішні точки одиничного кола $|z| > 1$, півплощина $\operatorname{Im} z > 0$, півплощина $\operatorname{Re} z > 0$.

Приклад 5.3

Побудувати фазовий портрет функції Жуковського.



(а) $f(z) = e^z$. (б) $f(z) = \sin z$. (в) $f(z) = \operatorname{tg} z$. (г) $f(z) = \ln z$.

Рис. 11: Фазовий портрет деяких елементарних функцій

◀Для того, щоб дослідити картину відображення (5.9), представимо z в показниковій формі $z = \rho e^{i\varphi}$ та знайдемо явний вигляд функцій u та v: $w = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}\right) = u + iv$, звідки $u = a\cos\varphi$ і $v = b\sin\varphi$, де $a = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ і $b = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)$. Отже, кожне коло радіуса ρ перетворюється на еліпс з півосями a та b. Якщо $\rho \to 1$, цей еліпс вироджується на відрізок $[-1, +1]$ осі u. Таким чином, середина одиничного кола відображається на площину з розрізом уздовж відрізку $[-1, +1]$. Відповідний фазовий портрет функції Жуковського зображено на рис. 10(в). ▶

Показникова функція (експонента) e^z комплексної змінної $z \in \mathbb{C}$ визначається наступним співвідношенням

$$\exp z = e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right). \tag{5.10}$$

Функція e^z є неперервною в усій відкритій комплексній площині. Вона є періодичною з періодом $2\pi i$. Експонента здійснює однолисте відображення смуги

$$S_d = \{z \in \mathbb{C} :\ d \le \operatorname{Im} z < d + 2\pi, \quad d > 0\} \tag{5.11}$$

розширеної комплексної площини на розширену площину з розрізом вздовж додатної напівосі. Фазовий портрет див. на рис. 11(а).

Тригонометричні функції комплексного аргументу $\sin z$, $\cos z$ визначаються за формулами Ейлера:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{5.12}$$

Функції $\sin z$ і $\cos z$ є неперервними в усій відкритій комплексній площині, приймаючи усі можливі комплексні значення, тобто тобто рівняння $\sin z = A$ має розв'язок для будь-якого комплексного A. Функції $\sin z$ і $\cos z$ є періодичними з періодом 2π; Областями однолистості є смуги:

$$S_1 = \left\{z \in \mathbb{C} :\ \pi k - \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \pi k + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}, \tag{5.13}$$

а також верхні півсмуги

$$S_2 = \{z \in \mathbb{C} :\ (2k-1)\pi < \operatorname{Re} z < (2k+1)\pi, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad k \in \mathbb{Z}\}, \tag{5.14}$$

та нижні півсмуги

$$S_3 = \{z \in \mathbb{C} : \ (2k-1)\pi < \operatorname{Re} z < (2k+1)\pi, \quad \operatorname{Im} z < 0, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \quad (5.15)$$

Фазовий портрет див. на рис. 11(б).

Тригонометричні функції $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z$ визначаються за допомогою рівностей:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (5.16)$$

Функція $\operatorname{tg} z$ визначена на множині $\mathbb{C}\backslash\{z : \cos z = 0\} = \mathbb{C}\backslash\{\pi/2+\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$, функція $\operatorname{ctg} z$ — на множині $\mathbb{C}\backslash\{z : \sin z = 0\} = \mathbb{C}\backslash\{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$. Функції $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$ є періодичними з дійсним періодом π. Фазовий портрет див. на рис. 11(в).

Усі формули елементарної тригонометрії, які виконуються для дійсних x, залишаються коректними і для комплексних значень аргументу z.

Гіперболічні функції комплексного аргументу визначаються за допомогою рівностей:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \quad (5.17)$$

Функція $\operatorname{th} z$ визначена на множині $\mathbb{C}\backslash\{z : \operatorname{ch} z = 0\} = \mathbb{C}\backslash\{i\pi/2 + \pi n i, n \in \mathbb{Z}\}$, функція $\operatorname{cth} z$ — на множині $\mathbb{C}\backslash\{z : \operatorname{sh} z = 0\} = \mathbb{C}\backslash\{\pi n i, n \in \mathbb{Z}\}$. Функції $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$ є періодичними з уявним періодом $2\pi i$, функції $\operatorname{th} z$ і $\operatorname{cth} z$ є періодичними з уявним періодом $i\pi$.

Логарифм визначається як функція, обернена до експоненти. Число $w \in \mathbb{C}$ називається логарифмом числа z і позначається $w = \operatorname{Ln} z$, якщо $e^w = z$. Якщо $z = |z|e^{i(\arg z + 2\pi n)} = e^{\ln|z| + i(\arg z + 2\pi n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, тоді

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi n) = \ln\rho + i(\varphi + 2\pi n), \ n \in \mathbb{Z}. \quad (5.18)$$

Функція $\operatorname{Ln} z$ визначена на множині $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Зауважимо, що на множині комплексних чисел функція $\operatorname{Ln} z$, де $z \in \mathbb{C}$ є *нескінченозначною* функцією (уявна частина визначена з точністю до числа, що є кратним до 2π). Через $\ln z, z \in \mathbb{C}$ позначається будь-яке із значень функції $\operatorname{Ln} z$. Фазовий портрет див. на рис. 11(г).

Узагальнена степенева функція визначається співвідношенням

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}, \quad z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}. \quad (5.19)$$

Нехай $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $z = \rho e^{i(\varphi + 2\pi n)}, n \in \mathbb{Z}$, тоді:

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = e^{(\alpha+i\beta)(\ln\rho + i(\varphi+2\pi n))} = e^{\alpha\ln\rho - \beta(\varphi+2\pi n) + i(\beta\ln\rho + \alpha(\varphi+2\pi n))} =$$
$$= e^{\alpha\ln\rho - \beta(\varphi+2\pi n)}\Big[\cos\left[\beta\ln\rho + \alpha(\varphi+2\pi n)\right) + i\sin(\beta\ln\rho + \alpha(\varphi+2\pi n))\Big].$$

Узагальнена степенева функція є багатозначною на множині комплексних чисел, якщо $a \notin \mathbb{Z}$.

Аналогічно визначається *узагальнена показникова* функція:

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}, \quad z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}. \quad (5.20)$$

Нехай $a = |a|e^{i(\alpha+2\pi n)}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\rho \neq 0$, $z = x + iy$, тоді:

$$w = a^z = e^{z\operatorname{Ln} a} = e^{(x+iy)(\ln|a|+i(\alpha+2\pi n))} = e^{x\ln|a|-y(\alpha+2\pi n)+i(y\ln|a|+x(\alpha+2\pi n))} =$$
$$= e^{x\ln|a|-y(\alpha+2\pi n)}\left(\cos(y\ln|a| + x(\alpha+2\pi n)) + i\sin(y\ln|a| + x(\alpha+2\pi n))\right).$$

Обернені тригонометричні і гіперболічні функції $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$ визначаються як функції обернені до функцій $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $\operatorname{ctg} w$, $\operatorname{sh} w$, $\operatorname{ch} w$, $\operatorname{th} w$, $\operatorname{cth} w$, відповідно. Наприклад, число $w \in \mathbb{C}$ називається арксінусом числа z і позначається $w = \operatorname{Arcsin} z$, якщо $z = \sin w$. Всі обернені тригонометричні функції є багатозначними і виражаються через логарифмічну функцію:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(iz + (1-z^2)^{1/2}\right), \quad \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}\left(z + (z^2-1)^{1/2}\right),$$
$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+i}{z-i},$$
$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + (z^2+1)^{1/2}\right), \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + (z^2-1)^{1/2}\right),$$
$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+z}{1-z}, \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}.$$

Через $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arcctg} z$, $\operatorname{arsh} z$, $\operatorname{arch} z$, $\operatorname{arth} z$, $\operatorname{arcth} z$, $z \in \mathbb{C}$ позначається будь-яке із значень функцій $\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$, $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$, $\operatorname{Arcth} z$, відповідно.

§ 6. Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1

Обчислити суму $\sin z + \sin 2z + \ldots + \sin nz$, $n \geq 1$, $z \in \mathbb{C}$.

◀Скористаємось означенням функції $\sin z$ для кожного доданка:

$$\sin z + \sin 2z + \ldots + \sin nz = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz} + e^{2iz} - e^{-2iz} + \ldots + e^{inz} - e^{-inz}\right) =$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\left(e^{iz} + e^{2iz} + \ldots + e^{inz}\right) - \left(e^{-iz} + e^{-2iz} + \ldots + e^{-inz}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{iz} - e^{i(n+1)z}}{1-e^{iz}} - \frac{e^{-iz} - e^{-i(n+1)z}}{1-e^{-iz}}\right) =$$
$$= \frac{e^{iz} - e^{i(n+1)z} - 1 + e^{inz} - e^{-iz} + e^{-i(n+1)z} + 1 - e^{-inz}}{2i\left(1 - e^{iz} - e^{-iz} + 1\right)} =$$
$$= \frac{2i\sin z + 2i\sin nz - 2i\sin(n+1)z}{2i\left(2 - 2\cos z\right)} = \frac{\sin z + \sin nz - \sin(n+1)z}{2(1-\cos z)}.$$

В третій рівності ми скористалися відомою формулою для обчислення суми геометричної прогресії, в п'ятій — означеннями тригонометричних функцій. ▶

Приклад 6.2

Знайти всі точки z, в яких функція $\operatorname{th} z$ приймає дійсні значення.

◀I спосіб. Потрібно знайти всі $z \in \mathbb{C}$ такі, що $\operatorname{Im}\operatorname{th} z = 0$. Нехай $z = x + iy$, тоді

$$\operatorname{th} z = \operatorname{th}(x+iy) = \frac{e^{x+iy} - e^{-x-iy}}{e^{x+iy} + e^{-x-iy}} = \frac{e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y)}{e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i\sin y)} =$$
$$= \frac{\cos y(e^x - e^{-x}) + i\sin y(e^x + e^{-x})}{\cos y(e^x + e^{-x}) + i\sin y(e^x - e^{-x})} = \frac{\cos y \operatorname{sh} x + i\sin y \operatorname{ch} x}{\cos y \operatorname{ch} x + i\sin y \operatorname{sh} x} =$$
$$= \frac{\cos^2 y \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x - \sin^2 y \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x + i\left(\operatorname{ch}^2 x \sin y \cos y - \operatorname{sh}^2 x \sin y \cos y\right)}{\sqrt{\cos^2 y \operatorname{ch}^2 x + \sin^2 y \operatorname{sh}^2 x}} =$$
$$= \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \cos 2y + i \sin y \cos y}{\sqrt{\cos^2 y \operatorname{ch}^2 x + \sin^2 y \operatorname{sh}^2 x}},$$

звідки $\operatorname{Im}\operatorname{th} z = \dfrac{\sin y \cos y}{\sqrt{\cos^2 y \operatorname{ch}^2 x + \sin^2 y \operatorname{sh}^2 x}}$. Таким чином, $\operatorname{Im}\operatorname{th} z = 0$ тоді і лише тоді, коли $\sin y \cos y = 0$, тобто $y = \pi n/2,\ n \in \mathbb{Z}$.

II спосіб. Усову дійснозначності можна записати наступним чином: $\operatorname{th} z = \overline{\operatorname{th} z}$. Отже, різниця $\operatorname{th} z - \operatorname{th} \overline{z}$ має дорівнювати нулеві. Нехай $z = x + iy$. Обчислимо цю різницю, скориставшись формулою різниці гіперболічних тангенсів:

$$\operatorname{th} z - \operatorname{th} \overline{z} = \frac{\operatorname{sh}(z - \overline{z})}{\operatorname{ch} z \operatorname{ch} \overline{z}} = 0,$$

звідки $\operatorname{sh}(z - \overline{z}) = \operatorname{sh}(2iy) = i\sin 2y = 0$, тобто $y = \pi n/2,\ n \in \mathbb{Z}$. ▶

Приклад 6.3

Знайти всі розв'язки рівняння $\sin z + \cos z = i$ на множині $\mathbb{C}$.

◀Скористаємось означенням тригонометричних функцій:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = i.$$

Покладемо $e^{iz} = w$, де $w \in \mathbb{C}$. Маємо

$$w - \frac{1}{w} + iw + \frac{i}{w} = -2 \ \Rightarrow\ (1+i)w^2 + 2w - 1 + i = 0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ w = \frac{-1 + 3^{1/2}}{1+i} = e^{iz} \ \Rightarrow\ z = -i \operatorname{Ln} \frac{-1 + 3^{1/2}}{1+i}.$$

Тут вираз $3^{1/2} = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Розглянемо перше значення кореня:

$$z = -i\left(\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}-1\right) - \operatorname{Ln}(1+i)\right) = -i\left(\ln\left(\sqrt{3}-1\right) - \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} + 2\pi n i\right) =$$
$$= -\frac{i}{2}\ln\left(2-\sqrt{3}\right) - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогічно, для другого значення кореня отримаємо

$$z = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n - \frac{i}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$$

▶

Приклад 6.4

Знайти всі значення $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln}(-1+i)$ на множині $\mathbb{C}$.

◀Маємо

$$\operatorname{Ln}\operatorname{Ln}(-1+i) = \operatorname{Ln}\operatorname{Ln}\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}+2\pi n)} = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}\ln 2 + i\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]\right) =$$
$$= \operatorname{Ln}\sqrt{\frac{1}{4}\ln^2 2 + \left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]^2}\exp\left[i\left(\operatorname{arctg}\frac{2\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)}{\ln 2} + 2\pi k\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\ln^2 2 + \left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]^2\right) + i\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi(8n+3)}{2\ln 2} + 2\pi k\right)$$

для всіх $n, k \in \mathbb{Z}$. В другій рівності ми врахували, що при всіх $n \in \mathbb{Z}$ число $\frac{1}{2}\ln 2 + i(\frac{3\pi}{4}+2\pi n)$ знаходиться в I або в IV квадранті. ▶

Приклад 6.5

Знайти всі значення $(-1-3i)^{\sqrt{2}-i}$ на множині $\mathbb{C}$.

◀Маємо $(-1-3i)^{\sqrt{2}-i} = e^{(\sqrt{2}-i)\operatorname{Ln}(-1-3i)}$. Обчислимо спочатку показник експоненти:

$$(\sqrt{2}-i)\operatorname{Ln}(-1-3i) = (\sqrt{2}-i)\operatorname{Ln}\sqrt{10}e^{i(\pi-\operatorname{arctg}3+2\pi n)} =$$
$$= (\sqrt{2}-i)\left(\frac{\ln 10}{2} + i(\pi - \operatorname{arctg}3 + 2\pi n)\right) =$$
$$= \frac{\ln 10}{\sqrt{2}} + \pi - \operatorname{arctg}3 + 2\pi n + i\left(\sqrt{2}(\pi - \operatorname{arctg}3 + 2\pi n) - \frac{\ln 10}{2}\right).$$

Таким чином,

$$(-1-3i)^{2-i} = \exp\left(\frac{\ln 10}{\sqrt{2}} + \pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n\right)\left[\cos\left(\sqrt{2}(\pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{\ln 10}{2}\right) + i\sin\left(\sqrt{2}(\pi - \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n) - \frac{\ln 10}{2}\right)\right].$$

▶

Приклад 6.6

Знайти всі значення $\operatorname{Arcsin}(4i-1)$ на множині $\mathbb{C}$.

◀Скористаємось означенням функції $\operatorname{Arcsin} z$:

$$\operatorname{Arcsin}(4i-1) = -i\operatorname{Ln}\left(i(4i-1) + \sqrt{1-(4i-1)^2}\right) =$$
$$= -i\operatorname{Ln}\left(-4-i+\sqrt{16+8i}\right) = -i\operatorname{Ln}\left(-4-i\pm 2\left(\sqrt{\sqrt{5}+2} + i\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)\right),$$

при знаходженні кореня ми скористались формулою (3.1). Позначимо $a = 2\sqrt{\sqrt{5}+2}$, тоді $2\sqrt{\sqrt{5}-2} = a^{-1}$ і

$$\operatorname{Arcsin}(4i-1) = -i\operatorname{Ln}\left(-4 \pm a + i(\pm a^{-1} - 1)\right) =$$
$$= \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{a^{-1}-1}{a-4} + 2\pi n - \frac{i}{2}\ln\left((a-4)^2 + (a^{-1}-1)^2\right), \\ \operatorname{arctg}\dfrac{a^{-1}+1}{a+4} + \pi + 2\pi n - \frac{i}{2}\ln\left((a+4)^2 + (a^{-1}+1)^2\right). \end{cases}$$

▶

§ 7. Завдання для аудиторної роботи

67. Обчислити суму $S_n = \cos z + \cos(z+\theta) + \ldots + \cos(z+n\theta)$ для довільних $n \in \mathbb{N}$, де $z, \theta \in \mathbb{C}$.

68. Виразити через функції дійсного аргументу дійсні та уявні частини функції $f(z) = \sin z$, знайти також модуль функції.

69. Знайти всі значення $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln} i$ на множині $\mathbb{C}$.

70. Знайти всі значення $(-1)^{\sqrt{3}}$ на множині $\mathbb{C}$.

71. Знайти всі розв'язки рівняння $\sin z = 3$ на множині $\mathbb{C}$.

§ 8. Завдання для самостійної роботи

У прикладах 72–76 за допомогою означення тригонометричних та гіперболічних функцій, а також, формул Ейлера, довести, що для довільних $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливі такі тотожності:

72. $\cos iz = \operatorname{ch} z$.
73. $\sin iz = i \operatorname{sh} z$.
74. $\operatorname{th} iz = i \operatorname{tg} z$.
75. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
76. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

77. Обчислити суму $S_n = \sin z + \sin(z+\theta) + \ldots + \sin(z+n\theta)$ для довільних $n \in \mathbb{N}$, де $z, \theta \in \mathbb{C}$.

У прикладах 78–85 виразити через функції дійсного аргументу дійсні та уявні частини, а також, модуль функції.

78. $f(z) = e^z$.
79. $f(z) = \cos z$.
80. $f(z) = \operatorname{sh} z$.
81. $f(z) = \operatorname{ch} z$.
82. $f(z) = \operatorname{tg} z$.
83. $f(z) = \operatorname{ctg} z$.
84. $f(z) = \operatorname{th} z$.
85. $f(z) = \operatorname{cth} z$.

У прикладах 86–93 представити число в алгебраїчній формі.

86. $\sin 3i$.
87. $\cos(3+i)$.
88. $\operatorname{sh}(-i\sqrt{2})$.
89. $\operatorname{ch}(-i/2)$.
90. $\operatorname{tg}(3-i)$.
91. $\operatorname{ctg}(3i-1)$.
92. $\operatorname{th}(1-3i)$.
93. $\operatorname{cth}(i-3)$.

У прикладах 94–106 обчислити всі значення виразу на множині $\mathbb{C}$.

94. $\operatorname{Ln}(-1)$.
95. $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3}-i\right)$.
96. $\operatorname{Ln}\operatorname{Ln}(2i-1)$.
97. $1^{\sqrt{3}}$.
98. i^i.
99. $\left(-2+i\sqrt{5}\right)^i$.
100. $(3-4i)^{1+i}$.
101. $\operatorname{Arccos} 2$.
102. $\operatorname{Arcsin} i$.
103. $\operatorname{Arch} 2i$.
104. $\operatorname{Arsh}(1+i\sqrt{2})$.
105. $\operatorname{Arctg}(-1-i)$.
106. $\operatorname{Arth}(1-2i)$.

У прикладах 107–114 знайти всі розв'язки рівнянь на множині $\mathbb{C}$.

107. $\operatorname{ch} z = -1$.
108. $\operatorname{tg} z = 2i$.
109. $\operatorname{cth} z = 2i - 1$.
110. $\operatorname{sh} z - e^{-z} = \dfrac{i}{2}$.
111. $\cos z - 2e^{iz} = 1$.
112. $iz^i = 1$.
113. $z^{1/(1-i)} = i + 1$.
114. $(z+i)^{(i+1)/\sqrt{2}} = 1$.

115. Довести, що узагальнена степенева функція $f(z) = z^a, z \in \mathbb{C}$ має скінченну множину значень тоді і тільки тоді, коли a — раціональне число.

116. Чи збігаються множини значень z^{2a}, $(z^a)^2$, $\left(z^2\right)^a$, $z, a \in \mathbb{C}$?

117. Довести, що функція $f(z) = e^z$ є взаємно однозначним відображенням на множині $D = \{(x,y) : x \in \mathbb{R},\ y \in (a,b)\}$, якщо $|b-a| \le \pi$.

118. Знайти помилку у міркуваннях, які приводять до парадоксу І. Бернуллі, а саме, $(-z)^2 = z^2$, тому, $2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z$, звідки $\operatorname{Ln}(-z) = \operatorname{Ln} z$.

Тема 3

Диференціювання функції комплексної змінної

В цій темі вводиться поняття похідної в комплексному аналізі. Увагу приділяється одному з ключових понять комплексного аналізу, а саме поняття аналітичної функції. Розглядаються умови Коші—Рімана аналітичності функції. Наводиться геометрична інтерпретація аналітичності, яка полягає в конформності відображення, що здійснюється такою функцією.

§ 9. Теоретичні відомості

Означення 9.1

Функція $f(z)$ називається комплексно диференційовною в точці z_0, якщо існує границя

$$\lim_{\substack{h\in\mathbb{C}\\ h\to 0}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0), \tag{9.1}$$

і вона не залежить від способу наближення h до нуля.

Сама границя $f'(z_0)$ називається *похідною* функції f в точці z_0 та позначається $f'(z)$. Нехай $z = x + iy$, функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ визначена в деякому околі точки $z_0 \in \mathbb{C}$, та, крім того, в цій точці $u(x,y)$ та $v(x,y)$ диференційовні. Критерієм диференційовності функції f в z_0 в термінах її дійсної та уявної частини u і v є виконання *умов Коші—Рімана*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{9.2}$$

Означення 9.2

Функція $f(z)$ називається *аналітичною* (регулярною, голоморфною, моногенною) в області $D \subset \mathbb{C}$, якщо вона диференційовна в кожній точці області D.

Через $\mathcal{A}(D)$ будемо позначати множину всіх аналітичних в області D функцій.

Враховуючи умови Коші—Рімана, похідну аналітичної функції $f(z)$ можна представити в наступних рівносильних формах

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Оскільки звичайні властивості алгебраїчних операцій і граничного переходу зберігаються і при переході від дійсних функцій дійсних змінних

до функцій комплексної змінної, то зберігаються і звичайні правила диференціювання, наприклад:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \qquad (fg)' = f'g + fg',$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad (f[g(z)])' = f'[g(z)]g'(z).$$

Порівняємо поняття комплексної диференційовності та диференційовності як функції двох змінних. Довільну функцію двох дійсних змінних x, y можна розглядати як функцію двох незалежних змінних $z = x + iy$ і $\overline{z} = x - iy$ таким чином:

$$w = f(x, y) = f\left(\frac{z + \overline{z}}{2}, \frac{z - \overline{z}}{2i}\right) = w(z, \overline{z}).$$

Частинні похідні по змінних $z, \overline{z}$ називаються *формальними похідними Коші*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{9.3}$$

Умови Коші—Рімана (9.2) в термінах формальних похідних Коші мають вигляд

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{9.4}$$

Аналітичній функції можливо дати наглядну геометричну інтерпретацію. Нехай функція f аналітична в точці z_0 і $f'(z_0) \neq 0$. Модуль похідної $|f'(z_0)|$ дорівнює *коефіцієнту лінійного розтягу* в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$ площини z на площину w. Точніше, при $|f'(z_0)| > 1$ має місце розтягнення, при $|f'(z_0)| < 1$ — стиснення в точці z_0 при відображенні f. Аргумент похідної $\arg f'(z_0)$ дорівнює *куту повороту* в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$ площини w відносно площини z, тобто куту, на який потрібно повернути дотичну в точці z_0 до довільної гладкої кривої на площині z для того, щоб отримати напрямок дотичної в точці $w_0 = f(z_0)$ до образу цієї кривої на площині w при перетворенні $w = f(z)$. Якщо $\arg f'(z_0) > 0$, то поворот відбувається проти годинникової стрілки, якщо $\arg f'(z_0) < 0$ — за годинниковою стрілкою.

Нехай функція f є аналітичною в області D. Розглянемо довільну кусково гладку криву Γ, яка лежить в D. Якщо функція f взаємно однозначно відображає Γ на криву Γ^*, тоді довжина $l(\Gamma^*)$ кривої Γ^* дорівнює

$$l(\Gamma^*) = \int\limits_{\Gamma} |f'(z)| \ |\mathrm{d}z| = \int\limits_{a}^{b} |f'(z(t))| \ |z'(t)| \mathrm{d}t, \tag{9.5}$$

де $\Gamma = \{z = z(t) \ : \ t \in [a, b] \subset \mathbb{R}\}$ — параметризація кривої Γ. Зауважимо, що перший інтеграл є звичайним криволінійним інтегралом першого роду.

Якщо функція $w = f(z)$ є аналітичною в околі точки z_0 і $f'(z_0) \neq 0$, має місце властивість сталості коефіцієнта розтягу (незалежність масштабу від напрямку) та збереження кута повороту. В цьому випадку кажуть про конформність відображень.

Означення 9.3

Конформним відображенням в точці називається відображення, при якому має місце збереження кутів і сталість коефіцієнта розтягу.

Поняття конформності в точці узагальнюється на область. А саме, якщо функція $f(z)$ аналітична в області D, однолиста в ній та її похідна не рівна нулеві (умова невиродженості), то відображення $w = f(z)$ є конформним в D.

Нехай функція f є аналітичною в області D і взаємно однозначно відображає D на D^*. Тоді площа $S(D^*)$ області D^* дорівнює

$$S(D^*) = \iint\limits_D |f'(z)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{9.6}$$

Таким чином, $|f'(z_0)|^2$ дорівнює *коефіцієнту розтягу площі* в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$.

Питання взаємної однозначності відображення є суттєвим для використання наведених результатів. В прикладі 10.6 показано, що при багатозначному відображенні можна отримати декілька образів одного й того самого об'єкта (кривої, області тощо).

При дослідженні питання, чи є відображення $f : D \to D^*$ взаємно однозначним, в деяких прикладах зручно користуватися результатами прикладів 39, 117.

§ 10. Приклади розв'язування задач

Приклад 10.1

Довести, що функція $f(z) = e^z$ є аналітичною на множині $\mathbb{C}$. Крім того, показати, що $(e^z)' = e^z$, де $z \in \mathbb{C}$.

◀I спосіб. Нехай $z = x + iy$, тоді $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ і $u(x, y) = e^x \cos y, v(x, y) = e^x \sin y$. Зауважимо, що $u, v \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Перевіримо, що виконуються умови Коші—Рімана в кожній точці комплексної площини:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, $e^z \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$. Знайдемо похідну:

$$(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i\,(e^x \sin y)'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

II спосіб. Перевіримо, аналітичність функції $f(z) = e^z = e^{x+iy}$ в термінах формальних похідних за Коші:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} + i \cdot ie^{x+iy}\right) = 0.$$

▶

Приклад 10.2

Знайти множину точок, в якій функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною.

◀I спосіб. Нехай $z = x+iy$, тоді $z\overline{z} = x^2+y^2$ і $u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$. Зауважимо, що $u, v \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Обчислимо частинні похідні цих функцій:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Умови Коші—Рімана мають вигляд: $2x = 0$, $2y = 0$. Таким чином, функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною в одній точці $z = 0$.

II спосіб. Скористаємось умовами Коші—Рімана в термінах формальних похідних (9.4). Функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною тільки в тих точках, в яких $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, звідки $z = 0$.

III спосіб. Скориставшись означенням похідної, покажемо, що функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною в точці $z = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h\overline{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \overline{h} = 0.$$

Таким чином, функція $f(z) = z\overline{z}$ є диференційовною в точці $(0,0)$. ►

Приклад 10.3

Нехай $z = \rho e^{i\varphi}$ і $f(z) = u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$. Довести, що в цьому випадку виконуються так звані *умови Коші–Рімана в полярних координатах*:

$$\boxed{\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}}. \tag{10.1}$$

Крім того, показати, що похідна функції $f(z)$ може бути подана у наступному вигляді:

$$f'(z) = e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + i\frac{\partial v}{\partial \rho}\right). \tag{10.2}$$

◀Якщо $u(\rho,\varphi) = \widetilde{u}(x,y)$ і $v(\rho,\varphi) = \widetilde{v}(x,y)$, тоді для функцій $\widetilde{u}$ і $\widetilde{v}$ виконуються умови Коші—Рімана. Виразимо частинні похідні функцій u, v по

змінних ρ, φ через $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}, \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}, \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x}$, пригадавши, що $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}\rho\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y}\sin\varphi = -\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}\cos\varphi + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\sin\varphi =$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$
$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y}\rho\cos\varphi = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}\rho\sin\varphi + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}\rho\cos\varphi =$$
$$= \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}.$$

Тут ми скористались умовами Коші—Рімана для функцій $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ і першими двома рівностями. Доведемо формулу для похідної:

$$f'(z) = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + i\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\varphi + \rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\sin\varphi}{\rho} + i\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\cos\varphi - \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\sin\varphi}{\rho}\right) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial \rho}(\cos\varphi - i\sin\varphi) + \frac{\partial v}{\partial \rho}(\sin\varphi + i\cos\varphi) = \frac{\partial u}{\partial \rho}e^{-i\varphi} + i\frac{\partial v}{\partial \rho}e^{-i\varphi},$$

в передостанній рівності ми скористалися умовами Коші—Рімана і тим, що $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}$. ▶

Приклад 10.4

Нехай $f(z) = \frac{1}{z}$. Довести, що $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$. Крім того, $\left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$, $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

◀Нехай $z = \rho e^{i\varphi}$. Тоді $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ і

$$u(\rho,\varphi) = \frac{\cos\varphi}{\rho}, \qquad v(\rho,\varphi) = -\frac{\sin\varphi}{\rho}, \qquad \rho > 0,\ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що $u, v \in \mathscr{C}^\infty\Big((0,+\infty)\times\mathbb{R}\Big)$. Перевіримо, що виконуються

умови Коші—Рімана в полярних координатах, див. (10.1):

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}=-\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{\partial v}{\partial \varphi},\qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\sin\varphi}{\rho}=-\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

Знайдемо $f'(z), z\neq 0$, див. (10.2):

$$f'(z)=e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}+i\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)=e^{-i\varphi}\left(-\frac{\cos\varphi}{\rho^2}+i\frac{\sin\varphi}{\rho^2}\right)=$$
$$=-\frac{e^{-i\varphi}}{\rho^2}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=-\frac{e^{-2i\varphi}}{\rho^2}=-\frac{1}{z^2}.$$

►

Приклад 10.5

Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту комплексної площини в точці $z_0=1-i$ при відображеннях

$$w_1=i(z+1)^5,\qquad w_2=\sin^2 z.$$

◄Спочатку зауважимо, що кожне з відображень є аналітичним в точці $1-i$, див. задачу 139.

Знайдемо похідну першого відображення в точці $1-i$:

$$w_1'|_{z=1-i}=5i\,(z+1)^4\Big|_{z=1-i}=5i\,(2-i)^4.$$

Знайдемо модуль і аргумент числа $5i\,(2-i)^4$, скориставшись властивостями модуля і аргументу комплексного числа:

$$|5i\,(2-i)^4\,|=|5i|\,(|2-i|)^4=5\cdot 25=125,$$
$$\arg\left(5i\,(2-i)^4\right)=\arg 5i+4\arg(2-i)=\frac{\pi}{2}-4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}<0.$$

Таким чином, при відображенні $w_1=i(z+1)^5$ в точці $1-i$ комплексна площина розтягується в 125 разів і повертається на кут $\frac{\pi}{2}-4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Знайдемо похідну другого відображення в точці $1-i$:

$$w_2'|_{z=1-i}=2\sin z\cos z|_{z=1-i}=\sin 2z|_{z=1-i}=\sin(2-2i)=$$
$$=\sin 2\cos(-2i)+\cos 2\sin(-2i)=\sin 2\operatorname{ch}2-i\cos 2\operatorname{sh}2.$$

В останній рівності ми скористалися результатами прикладів 72 і 73.

Знайдемо модуль і аргумент числа $\sin 2\operatorname{ch}2-i\cos 2\operatorname{sh}2$, зауваживши, що це число лежить в першому квадранті:

$$|\sin 2\operatorname{ch}2-i\cos 2\operatorname{sh}2|=\sqrt{\sin^2 2\operatorname{ch}^2 2+\cos^2 2\operatorname{sh}^2 2}>1,$$
$$\arg(\sin 2\operatorname{ch}2-i\cos 2\operatorname{sh}2)=-\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}2\ \operatorname{th}2)>0.$$

Таким чином, при відображенні $w_2=\sin^2 z$ в точці $1-i$ комплексна площина розтягується в $\sqrt{\sin^2 2\operatorname{ch}^2 2+\cos^2 2\operatorname{sh}^2 2}$ разів і повертається на кут $-\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}2\ \operatorname{th}2)$. ►

Приклад 10.6

Обчислити довжини образів кривих

$$\Gamma_1 = \{z(t) \ : \ z(t) = (i+1)\,t, \ t \in [0,1]\}\,,$$
$$\Gamma_2 = \{z(t) \ : \ z(t) = (i+1)\,t, \ t \in [-1,1]\}$$

при відображенні $w = f(z) = z^2$.

◀Спочатку зауважимо, що $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, див. задачу 139. Відображення $f : \Gamma_1 \to \Gamma_1^*$ (образ кривої Γ_1) є взаємно однозначним. Дійсно, при кожному значенні параметра t образом точки $(i+1)\,t$ буде точка $(i+1)^2\,t^2 = 2it^2$. Образом Γ_1 буде $\Gamma_1^* = \left\{2it^2, \ t \in [0,1]\right\}$.

За допомогою (9.5) знайдемо довжину образу кривої Γ_1:

$$l(\Gamma_1^*) = \int\limits_{\Gamma_1} |2z| \ |\mathrm{d}z| = 2\int\limits_0^1 |(i+1)t| \ \ |i+1|\mathrm{d}t = 2|i+1|^2 \int\limits_0^t t\mathrm{d}t = 2.$$

Розглянемо відображення $f : \Gamma_2 \to \Gamma_2^*$ (образ кривої Γ_2). Це відображення не є однозначним, оскільки образами точок $z_1 = z(t_1) = (i+1)t_1$ і $z_2 = z(-t_1) = -(i+1)t_1$ буде одна й та сама точка $w_1 = w_2 = 2it_1^2$. Розіб'ємо контур на два, в кожному з яких функція $w = f(z)$ буде однозначною, тобто подамо Γ_2 у вигляді $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_3$, де

$$\Gamma_3 = \{z(t) \ : \ z(t) = -\,(i+1)\,t, \ t \in [0,1]\}\,.$$

Образ кривої Γ_3 дорівнює $\Gamma_3^* = \left\{2it^2, \ t \in [0,1]\right\}$, тобто співпадає з Γ_1^*. При цьому довжина $l(\Gamma_2^*) = l(\Gamma_1^*) = l(\Gamma_3^*) = 2$.

Зазначимо, що безпосереднє використання формули (9.5) дає хибну відповідь:

$$\int\limits_{\Gamma_2} |2z| \ |\mathrm{d}z| = 2\int\limits_{-1}^1 |(i+1)t| \ \ |i+1|\mathrm{d}t = 4.$$

►

Приклад 10.7

Обчислити площі образів областей $D_1 = \left\{\mathrm{Re}\, z \in (0,1), \ \mathrm{Im}\, z \in (0,1)\right\}$ і $D_2 = \left\{|z| \in (1,2), \ \arg z \in \left(0, \dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ при відображенні $f(z) = z^3$.

◀Зауважимо, що $f \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, див. задачу 139. Відображення $f : D_1 \to D_1^*$ і $f : D_2 \to D_2^*$ (D_1^* і D_2^* — образи областей D_1 і D_2, відповідно) є взаємно однозначним, див. 39. Для знаходження площ областей D_1^* і D_2^*

скористаємось формулою (9.6):

$$S(D_1^*) = \iint\limits_{D_1} |3z^2|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9 \iint\limits_{D_1} \left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9 \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^1 \left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{28}{5},$$

$$S(D_2^*) = \iint\limits_{D_2} |3z^2|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9 \iint\limits_{D_2} \left(x^2+y^2\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9 \iint\limits_{D_2} \rho^5 \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 9 \int\limits_1^2 \rho^5 \mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\pi/3} \mathrm{d}\varphi = \frac{63\pi}{2}.$$

При обчисленні останнього інтегралу ми скористалися тим, що якобіан переходу до полярної системи координат: $\dfrac{D(\rho,\varphi)}{D(x,y)} = \rho$. ▶

§ 11. Завдання для аудиторної роботи

119. Довести, що функція $f(z) = \sin z$ є аналітичною на множині $\mathbb{C}$. Крім того, показати, що $(\sin z)' = \cos z$, де $z \in \mathbb{C}$.

120. Знайти константи a, b, c, при яких функція $w = x + ay + i(bx + cy)$ буде аналітичною. Знайти явний вигляд аналітичної функції $w = f(z)$.

121. Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту комплексної площини при відображенні функцією $f(z) = z^3$. Яка частина комплексної площини стискається, а яка розширюється?

122. Обчислити довжину образу кривої $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = it + 1, \ t \in [0,1]\}$ при відображенні $w = z^3$.

§ 12. Завдання для самостійної роботи

123. Показати, що умови Коші—Рімана для модуля та аргументу аналітичної функції $f(z) = R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$ можна подати у формі:

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{12.1}$$

Крім того, довести, що похідна функції $f(z)$ може бути записана наступним чином:

$$f'(z) = e^{i\Phi}\left(\frac{\partial R}{\partial x} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right). \tag{12.2}$$

124. Показати, що умови Коші—Рімана для модуля та аргументу аналітичної функції $f(z) = R(\rho,\varphi)e^{i\Phi(\rho,\varphi)}$ в полярних координатах можна подати у формі:

$$\frac{\rho}{R}\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial \varphi} = -\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}. \tag{12.3}$$

Крім того, довести, що похідна функції $f(z)$ може бути записана наступним чином:

$$f'(z) = e^{i(\Phi-\varphi)}\left(\frac{\partial R}{\partial \rho} + iR\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right). \tag{12.4}$$

У прикладах 125–132 довести, що функція $f(z)$ є аналітичною на області визначення.

125. $f(z) = iz^2 - z$.

126. $f(z) = z^3 - ie^z$.

127. $f(z) = e^{z^2}$.

128. $f(z) = \operatorname{ch} z$

129. $f(z) = \operatorname{th} z$

130. $f(z) = \ln z$.

131. $f(z) = \arccos z$.

132. $f(z) = \operatorname{arctg} z$.

У прикладах 133–138 перевірити, чи буде функція $f(z)$ диференційовною хоча б в одній точці.

133. $f(z) = z^2\overline{z}$.

134. $f(z) = |z|\,\overline{z}$.

135. $f(z) = \sin z \operatorname{Re} z$.

136. $f(z) = \operatorname{ch} z \operatorname{Im} z$.

137. $f(z) = \cos \overline{z}$.

138. $f(z) = \ln \overline{z}$.

139. Довести, що всі елементарні функції є аналітичними на області визначення, обчислити їх похідні і показати, що при переході до функцій комплексного аргументу зберігається таблиця похідних:

1) $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$;

2) $(a^z)' = a^z \ln a$;

3) $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$;

4) $(\sin z)' = \cos z$;

5) $(\cos z)' = -\sin z$;

6) $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$;

7) $(\operatorname{ctg} z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$;

8) $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$;

9) $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$;

10) $(\operatorname{th} z)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$;

11) $(\operatorname{cth} z)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 z}$;

12) $(\arcsin z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

13) $(\arccos z)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$;

15) $(\operatorname{arcctg} z)' = -\dfrac{1}{1+z^2}$.

140. Знайти константи a, b, c, при яких функція $w = \cos x\,(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x\,(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$ буде аналітичною. Знайти явний вигляд аналітичної функції $w = f(z)$.

141. Довести, що якщо аналітична функція $f(z)$ є дійсною в деякій області D, тоді $f(z) = \text{const}$, $z \in D$.

142. Нехай функція $f(z) = u + iv = \rho e^{i\varphi}$ є аналітичною в області D. Довести, що якщо одна з функцій u, v, ρ, φ тотожно дорівнює константі в цій області, тоді і функція $f(z)$ є константою в D.

143. Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ є аналітичною в області D. Довести, що в кожній точці цієї області виконується рівність

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

144. Нехай функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ є аналітичною в області D. Перевірити, що сім'ї ліній $\{u(x,y) = \text{const}\}$ і $\{v(x,y) = \text{const}\}$ є ортогональними.

145. Нехай функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ є аналітичною в області D і (s,n) — довільна пара ортогональних векторів, які мають додатну орієнтацію (поворот від вектора s до вектора n здійснюється проти годинникової стрілки). Довести, що похідні функцій u і v за напрямами s і n пов'язані між собою *умовами Коші—Рімана для довільного базису*:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}. \tag{12.5}$$

У прикладах 146–150 знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту комплексної площини при відображенні функцією $f(z)$. Яка частина комплексної площини стискається, а яка розширюється?

146. $f(z) = z^{-2}$.

147. $f(z) = e^{3z}$.

148. $f(z) = e^{iz} - 1$.

149. $f(z) = \dfrac{1}{z+3}$.

150. $f(z) = \dfrac{i+3z}{z+3i}$.

У прикладах 151–160 знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту комплексної площини при відображенні функцією $f(z)$ в точці $z = a$. Стискається чи розширюється комплексна площина $\mathbb{C}$ в точці a?

151. $f(z) = \cos(5 - z)$, $a = 3i + 5$.

152. $f(z) = (5z - 1)^2$, $a = i$.

153. $f(z) = (z - 3i)^7$, $a = 1 + 2i$.

154. $f(z) = (z-2)^4 e^{i\pi/4}$, $a = 3 + i$.

155. $f(z) = e^{iz-2}$, $a = 4 - 3i$.

156. $f(z) = \operatorname{tg} z$, $a = 3i - 1$.

157. $f(z) = e^{z+\frac{5i}{z}}$, $a = i - 2$.

158. $f(z) = \operatorname{cth}(2z + 7i)$, $a = 1 - 4i$.

159. $f(z) = \dfrac{z^2+i}{z^2-i}$, $a = 1 + 2i$.

160. $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2}$, $a = 3 - i$.

У прикладах 161–165 обчислити довжини образів кривих Γ при зазначених відображеннях $w = f(z)$.

161. $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = t(1+2i),\ t \in [0,1]\}$, $w = z^4$.

162. $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = i + (i-1)t,\ t \in [0,1]\}$, $w = z^5$.

163. $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = it,\ t \in [0, 2\pi]\}$, $w = e^z$.

164. $\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = 6\pi t,\ t \in [0, 1/6]\}$, $w = e^{iz}$.

165. $\Gamma = \left\{z(t) \ : \ z(t) = e^{2\pi i t},\ t \in [0, 1/4]\right\}$, $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

166. Для заданих $\alpha \in \mathbb{C}$ і $n \geq 1$ обчислити довжину образу кривої

$$\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = \alpha t,\ t \in [0,1]\}$$

при відображенні $w = z^n$.

167. Для заданого $\alpha \in \mathbb{C}$ обчислити довжину образу кривої

$$\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = \alpha t,\ t \in [0,1]\}$$

при відображенні $w = e^z$.

168. Для заданого $\alpha \in \mathbb{C}$ обчислити довжину образу кривої

$$\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = \alpha t, \ t \in [0,1]\}$$

при відображенні $w = e^{iz}$.

У прикладах 169–174 обчислити площі образів областей D при зазначених відображеннях $w = f(z)$.

169. $D = \{z \ : \ |z| < 5, \ 0 < \arg z < \pi/4\}$, $w = z^4$.

170. $D = \{z \ : \ 1 < |z| < 2, \ \pi/3 < \arg z < 2\pi/3\}$, $w = z^5$.

171. $D = \{z \ : \ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $w = e^{iz}$.

172. $D = \{z \ : \ \ln 2 < \operatorname{Re} z < \ln 3, \ -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$, $w = e^{2z+3i}$.

173. $D = \{z \ : \ 0 < \operatorname{Re} z < 1, \ -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$, $w = z^5$.

174. $D = \{z \ : \ \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Im} z > 0, \ \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1\}$, $w = 1 + iz^2$.

175. Знайти образ області $D = \{z \ : \ 1 < \operatorname{Re} z < 2, \ 0 < \operatorname{Im} z < 8\}$ при відображенні $w = e^z$. Обчислити площу образу D.

Вказівка. Зверніть увагу на те, що функція w не є однозначною в області D, тому потрібно спочатку розбити D на області однозначності.

Тема 4

Інтеґрування функції комплексної змінної

Інтеґрування функції комплексної змінної, на перший погляд, схоже на інтеґрування функцій дійсної змінної. При більш уважному розгляді виявляється, що властивості комлексних інтеґралів більш схожі на контурні інтеґрали функцій дійсної змінної. Якщо при цьому, додатково, підінтеґральна функція є аналітичною, з'являються нові цікаві властивості, такі як, наприклад, незалежність інтеґралу від шляху інтеґрування. В цій темі розглядається інтеґрал функції комплексної змінної, перш за все, інтеґрали від аналітичних функцій. Особливу увагу приділяється інтеґральній формулі Коші.

§ 13. Теоретичні відомості

Нехай на області $D \subset \mathbb{C}$ задана однозначна неперервна функція $f(z)$, $z \in D$ і Γ — це деяка кусково-гладка орієнтована жорданова крива в D. Позначимо $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, де $u(x,y) = \operatorname{Re} w$ і $v(x,y) = \operatorname{Im} w$ — дійсні функції змінних x і y.

Обчислення *інтеґрала* $\int\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ вздовж кривої Γ зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтеґралів другого роду функції дійсної змінної, а саме,

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int\limits_\Gamma \left[u(x,y) + iv(x,y)\right](\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \\ &= \int\limits_\Gamma u(x,y)\mathrm{d}x - v(x,y)\mathrm{d}y + i\int\limits_\Gamma u(x,y)\mathrm{d}y + v(x,y)\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{13.1}$$

Інтеґрал (13.1) має наступні властивості:

Лінійність: $$\int\limits_\Gamma \left(\alpha f(z) + \beta g(z)\right)\mathrm{d}z = \alpha\int\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z + \beta\int\limits_\Gamma g(z)\mathrm{d}z,$$

Адитивність: $$\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\mathrm{d}z;$$

Орієнтованість: $$\int\limits_{\Gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z,$$

тут α та β — це комплексні константи, Γ^- — це контур, що збігається з Γ як множина точок, але має протилежну орієнтацію.

Виявляється, що для неаналітичної функції інтеґрал $\int\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z$ залежить від шляху інтегрування Γ.

Обчислення інтеґрала $\int\limits_\Gamma f(z)\,|\mathrm{d}z|$ зводиться до обчислення звичайних криволінійних інтеґралів першого роду функцій дійсних змінних, а саме,

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,|\mathrm{d}z| = \int\limits_\Gamma u(x,y)\mathrm{d}l + i\int\limits_\Gamma v(x,y)\mathrm{d}l. \tag{13.2}$$

На відміну від (13.1) інтеґрал (13.2) не змінює значення при заміні напряму інтегрування на протилежний.

Якщо крива Γ задана параметрично

$$\Gamma = \{z(t)\ :\ z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a,b]\},$$

тоді

$$\int\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f\left(z(t)\right) z'(t)\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f\left(x(t)+iy(t)\right)\left(x'(t)+iy'(t)\right)\mathrm{d}t, \tag{13.3}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma f(z)\,|\mathrm{d}z| &= \int\limits_a^b f\left(z(t)\right)|z'(t)|\,\mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_a^b f\left(x(t)+iy(t)\right)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{13.4}$$

В частинному випадку, коли Γ — це відрізок з початком в точці $z_1 = x_1 + iy_1$ і кінцем в точці $z_2 = x_2 + iy_2$, тоді зручно використовувати таку параметризацію

$$\begin{aligned}\Gamma = \{z(t)\ :\ z(t) &= (1-t)z_1 + tz_2 = \\ &= (1-t)x_1 + tx_2 + i\left((1-t)y_1 + ty_2\right),\ t \in [0,1]\}.\end{aligned} \tag{13.5}$$

Якщо Γ — це коло з центром в точці $z_0 = x_0 + iy_0$ і радіуса R (позначення $\Gamma = \{z\ :\ |z - z_0| = R\}$), тоді зручно використовувати таку параметризацію

$$\Gamma = \left\{z(t)\ :\ z(t) = z_0 + Re^{it} = x_0 + R\cos t + i\left(y_0 + R\sin t\right),\ t \in [0,2\pi)\right\}. \tag{13.6}$$

Наведемо деякі властивості інтеґрала (13.1) у випадку аналітичної підінтеґральної функції $f \in \mathcal{A}(D)$.

Згідно з інтеґральною теоремою Коші інтеґрал від аналітичної функції по замкненому контуру, що належить області аналітичності, дорівнює нулеві:

$$\int\limits_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad \text{якщо } f(z) \in \mathcal{A}(D),\ \Gamma \subset D. \tag{13.7}$$

Як наслідок, інтеґрал від аналітичної функції не залежить від шляху інтегрування, тобто для будь-яких кривих Γ_k, що належать області D та мають спільні кінці:

$$\Gamma_k = \{z(t) \ : \ t \in [0,1], z(0) = z_1, z(1) = z_2\} \subset D, \tag{13.8}$$

інтеґрал приймає одне й те саме значення:

$$\int\limits_{\Gamma_k} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z. \tag{13.9}$$

Для функції $f(z)$, яка є аналітичною в однозв'язній області D, має місце формула Ньютона—Лейбніца:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\mathrm{d}z = \Phi(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \tag{13.10}$$

тут $\Phi(z)$ — довільна первісна функції $f(z)$, тобто $\Phi'(z) = f(z)$ в області D.

Якщо $f(z)$ і $g(z)$ є аналітичними в однозв'язній області D, тоді має місце формула інтегрування частинами:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)\mathrm{d}z = [f(z)g(z)]\Big|_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} g(z)f'(z)\mathrm{d}z \tag{13.11}$$

для довільних $z_1, z_2 \in D$.

Заміна змінних в інтеґралах від функції комплексної змінної відбувається аналогічно випадку функції дійсної змінної. Нехай аналітична функція $z = g(w)$ відображає взаємно однозначно контур Γ_1 в w-площині на контур Γ в z-площині. Тоді

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\Gamma_1} f[g(w)]g'(w)\mathrm{d}w.$$

При обчисленні інтеґралів від багатозначних функції будемо виділяти вітку цієї функції. Це можна зробити, наприклад, завдавши значення багатозначної функції в деякій точці контуру інтегрування.

Зауваження. В усіх задачах, де контур Γ замкнений, вважаємо, що обхід контуру відбувається проти годинникової стрілки.

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною в області D і неперервною в $\overline{D}$, тоді для довільного $z_0 \notin \partial D$ має місце *інтеґральна формула Коші*:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \in D \\ 0, & z_0 \notin \overline{D}, \end{cases} \tag{13.12}$$

напрямок обходу контуру ∂D додатний (так, що область D залишається ліворуч). Вираз в лівій частині формули (13.12) має назву *інтеґрал Коші*.

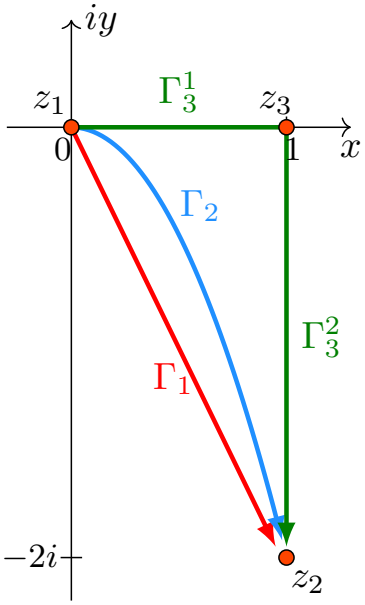


Рис. 12: До прикладу 14.1.

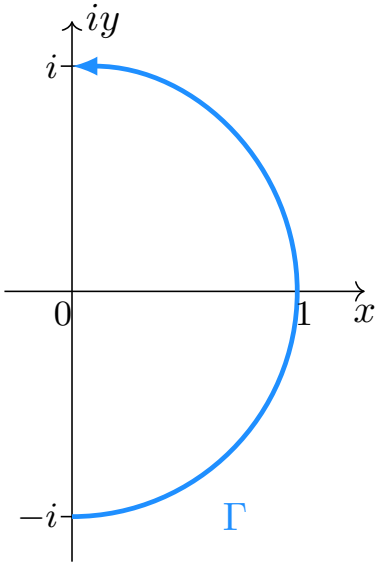


Рис. 13: До прикладу 14.2.

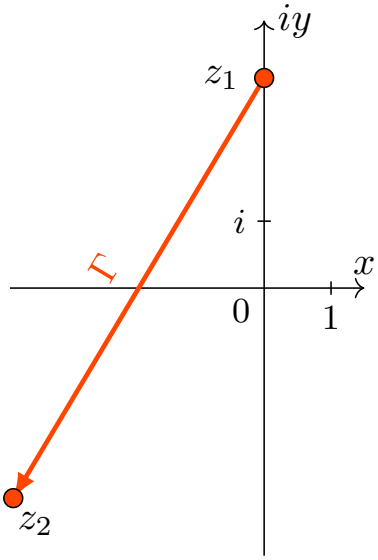


Рис. 14: До прикладу 14.3.

Важливою властивістю цього інтеґрала є існування і аналітичність всіх похідних довільного порядку, так звана *інтеґральна формула Коші для похідних*:

$$\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\begin{cases}f^{(n)}(z_0), & z_0\in D\\ 0, & z_0\notin\overline{D},\end{cases}\tag{13.13}$$

§ 14. Приклади розв'язування задач

Приклад 14.1

Обчислити інтеґрал

$$I_k=\int\limits_{\Gamma_k}(2\bar z-\operatorname{Im}z+1)\,\mathrm{d}z,\quad k=1,2,3,$$

якщо

1) Γ_1 — це відрізок, який з'єднує точки $z_1=0$ і $z_2=1-2i$;
2) Γ_2 — це частина параболи, яка з'єднує точки z_1 і z_2, за умови, що задана парабола має вершину в точці z_1 і є симетричною відносно уявної осі;
3) Γ_3 — це ламана $z_1z_3z_2$, де $z_3=1$.

◀Кожна з кривих Γ_1, Γ_2 або Γ_3 — це лінія, яка з'єднує точки $z_1=0$ і $z_2=1-2i$ по різних траєкторіях. Оскільки підінтеґральна функція не є аналітичною, інтеґрал залежить від шляху інтегрування, і природно очікувати в кожній ситуації різні відповіді.

1) Параметризуємо Γ_1 аналогічно до (13.5):

$$\Gamma_1 = \{z(t) \ : \ z(t) = (1-2i)\,t, \quad t \in [0,1]\}\,.$$
Тоді $\mathrm{d}z = (1-2i)\,\mathrm{d}t$,
$$2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1 = 2\,(1+2i)\,t + 2t + 1 = 4\,(1+i)\,t + 1,$$

де при знаходженні останнього виразу ми скористалися тим, що параметр t є дійсним. Криву Γ_1 зображено на рис. 12.

Обчислимо інтеґрал, див. (13.3):

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma_1} (2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1)\,\mathrm{d}z = (1-2i)\int\limits_0^1 (4\,(1+i)\,t + 1)\,\mathrm{d}t =$$
$$= (1-2i)\left(2\,(1+i)\,t^2 + t\right)\Big|_0^1 = (1-2i)\,(2\,(1+i)+1) = 7-4i.$$

2) Параметризуємо Γ_2 :

$$\Gamma_2 = \left\{z(t) \ : \ z(t) = x(t) + iy(t) = \begin{vmatrix} x(t) = t, \\ y(t) = -2t^2 \end{vmatrix} = t - 2t^2 i, \quad t \in [0,1]\right\}.$$

Тоді $\mathrm{d}z = (1-4ti)\,\mathrm{d}t$,

$$2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1 = 2\left(t + 2t^2 i\right)t + 2t^2 + 1 = (2+4i)\,t^2 + 2t + 1,$$

при знаходженні останнього виразу, ми скористалися тим, що параметр t — дійсний. Криву Γ_2 зображено на рис. 12.

Обчислимо інтеґрал, див. (13.3):

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma_2} (2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1)\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^1 \left((2+4i)\,t^2 + 2t + 1\right)(1-4ti)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int\limits_0^1 \left((16-8i)\,t^3 + (2-4i)\,t^2 + (2-4i)\,t + 1\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \left((4-2i)\,t^4 + \frac{2-4i}{3}t^3 + (1-2i)\,t^2 + t\right)\Big|_0^1 = \frac{20}{3} - \frac{16}{3}i.$$

3) Позначимо через Γ_3^1 відрізок z_1z_3, через Γ_3^2 — відрізок z_3z_2, див. рис. 12. Ламана Γ_3 є об'єднанням цих відрізків $\Gamma_3 = \Gamma_3^1 \bigcup \Gamma_3^2$ і

$$I_3 = \int\limits_{\Gamma_3^1} (2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{\Gamma_3^2} (2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1)\,\mathrm{d}z.$$

Параметризуємо Γ_3^1 аналогічно (13.5):

$$\Gamma_3^1 = \{z(t) \ : \ z(t) = t, \quad t \in [0,1]\}\,.$$
Тоді $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$, $\quad 2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1 = 2t + 1.$

Параметризуємо Γ_3^2 аналогічно (13.5):

$$\Gamma_3^2 = \{z(t) \ : \ z(t) = 1 - 2ti, \quad t \in [0,1]\}.$$

Тоді $\mathrm{d}z = -2i\mathrm{d}t, \quad 2\bar{z} - \operatorname{Im} z + 1 = 2(1+2it) + 2t + 1 = (2+4i)t + 3.$

Обчислимо інтеґрал, див. (13.3):

$$I_3 = \int\limits_0^1 (2t+1)\,\mathrm{d}t - 2i \int\limits_0^1 ((2+4i)t+3)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left(t^2+t\right)\Big|_0^1 - 2i\left((1+2i)t^2+3t\right)\Big|_0^1 = 6 - 8i.$$

▶

Приклад 14.2

Обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_\Gamma \left(z^3 - z\bar{z}^2\right)\mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1, \quad \operatorname{Re} z > 0\}.$

◀Зауважимо, що підінтеґральна функція не є аналітичною, інтеґрал залежить від шляху інтегрування. Параметризуємо Γ аналогічно (13.6):

$$\Gamma = \left\{z(t) \ : \ z(t) = e^{it}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Тоді $\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t$ і $z^3 - z\bar{z}^2 = e^{3it} - e^{it}e^{-2it} = e^{3it} - e^{-it}$. Контур інтегрування Γ зображено на рис. 13. Обчислимо інтеґрал, див. (13.3):

$$I = \int\limits_\Gamma \left(z^3 - z\bar{z}^2\right)\mathrm{d}z = i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{3it} - e^{-it}\right)e^{it}\mathrm{d}t = i\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(e^{4it} - 1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= i\left(\frac{e^{4it}}{4i} - t\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -i\pi.$$

▶

Приклад 14.3

Обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_\Gamma \cos\bar{z}\,|\mathrm{d}z|,$$

якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = i\pi$ і $z_2 = -2\pi - i\pi$.

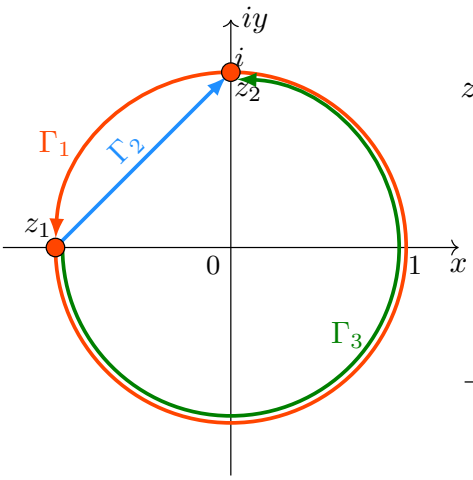


Рис. 15: До прикладу 14.4.

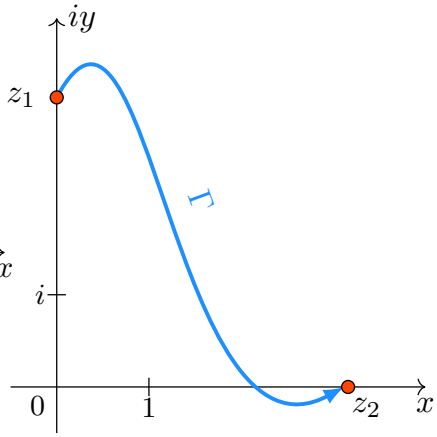


Рис. 16: До прикладу 14.5.

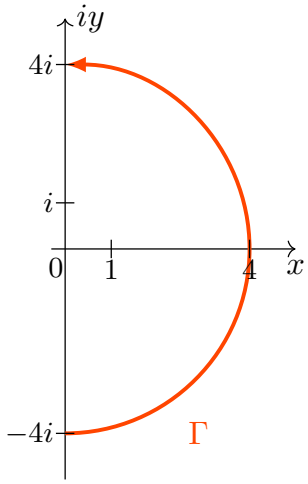


Рис. 17: До прикладу 14.6.

◀Цей інтеґрал визначається формулою (13.2). Параметризуємо Γ аналогічно (13.5):

$$\Gamma = \{z(t) \ : \ z(t) = \pi i + (-2\pi - 2\pi i)\, t, \quad t \in [0,1]\}\,.$$

Контур інтегрування Γ зображено на рис. 14. Тоді $|\mathrm{d}z| = |-2\pi - 2\pi i|\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2}\mathrm{d}t$, $\bar{z} = -\pi i + (-2\pi + 2\pi i)\, t$. Обчислимо інтеґрал, див. (13.4):

$$I = \int\limits_{\Gamma} \cos\bar{z}\,|\mathrm{d}z| = 2\pi\sqrt{2}\int\limits_0^1 \cos\left(-\pi i + (-2\pi + 2\pi i)\, t\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{2}}{-2\pi + 2\pi i}\sin\left(-\pi i + (-2\pi + 2\pi i)\, t\right)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{i-1}\left(\sin(\pi i - 2\pi) + \sin\pi i\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(-i-1)}{2}\cdot 2\sin\pi i = \sqrt{2}\,(-i-1)\,i\,\mathrm{sh}\,\pi = (1-i)\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\pi.$$

▶

Приклад 14.4

Обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \left(z^2 + \sin^2 z\right)\mathrm{d}z, \quad k = 1,2,3,$$

якщо

1) $\Gamma_1 = \{z \ : \ |z| = 1\}$;

2) Γ_2 — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = -1$ і $z_2 = i$;

3) $\Gamma_3 = \left\{z \ : \ |z| = 1, -\pi \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

◀Зауважимо, що підінтеґральна функція $f(z) = z^2 + \sin^2 z$ всюди є аналітичною $f \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$ (див. задачу 139).

1) Оскільки Γ_1 — це замкнена крива, а підінтеґральна фукція є аналітичною, то за інтеґральною теоремою Коші, див. (13.7), випливає, що

$$I_1 = \int\limits_{\Gamma_1} \left(z^2 + \sin^2 z\right) \mathrm{d}z = 0.$$

2) Застосуємо формулу Ньютона—Лейбніца (13.10):

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \left(z^2 + \sin^2 z\right) \mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{i} \left(z^2 + \sin^2 z\right) \mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{i} \left(z^2 + \frac{1 - \cos 2z}{2}\right) \mathrm{d}z =$$
$$= \left(\frac{z^3}{3} + \frac{z}{2} - \frac{\sin 2z}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{i} = -\frac{i}{3} + \frac{i}{2} - \frac{\sin 2i}{4} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{\sin 2}{4}\right) =$$
$$= \frac{5}{6} + \frac{\sin 2}{4} + i\left(\frac{1}{6} - \frac{\mathrm{sh}\, 2}{4}\right).$$

3) Криві Γ_2 і Γ_3 мають однакові початки і кінці, а підінтеґральна фукція є аналітичною, тому інтеґрал не залежить від шляху інтегрування, див. (13.9), звідки

$$I_3 = I_2 = \frac{5}{6} + \frac{\sin 2}{4} + i\left(\frac{1}{6} - \frac{\mathrm{sh}\, 2}{4}\right).$$

►

Приклад 14.5

Обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_{\Gamma} ze^z \mathrm{d}z,$$

якщо Γ — це деякий кусково-гладкий контур, який з'єднує точки $z_1 = i\pi$ і $z_2 = \pi$.

◀Зауважимо, що підінтеґральна функція $f(z) = ze^z$ всюди є аналітичною $f \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$, тому можна застосувати формулу (13.11) інтегрування частинами:

$$I = \int\limits_{\Gamma} ze^z \mathrm{d}z = \int\limits_{i\pi}^{\pi} ze^z \mathrm{d}z = (ze^z)\Big|_{i\pi}^{\pi} - \int\limits_{\pi i}^{\pi} e^z \mathrm{d}z =$$
$$= \pi e^{\pi} - i\pi e^{i\pi} - e^z\Big|_{i\pi}^{\pi} = \pi e^{\pi} + i\pi - e^{\pi} - 1 =$$
$$= e^{\pi}(\pi - 1) - 1 + i\pi.$$

►

Приклад 14.6

Обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z^{1/2}},$$

якщо $\Gamma = \{|z| = 4, \quad \operatorname{Re} z > 0\}$, за умови $4^{1/2} = -2$.

◀Параметризуємо Γ аналогічно (13.6), $\Gamma = \left\{z : z(t) = 4e^{it}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$. Тоді $\mathrm{d}z = 4ie^{it}\mathrm{d}t$ і $\dfrac{1}{\sqrt{z}} = \dfrac{1}{2e^{i(t+2\pi k)/2}}$, де $k = 0, 1$. Підінтеґральна функція $f(z) = \dfrac{1}{z^{1/2}}$ є багатозначною. Інтегрувати будемо ту вітку, яка визначається умовою

$$4^{1/2} = \left(4e^{i\cdot 2\pi k}\right)^{1/2} = 2e^{i\pi k} = -2,$$

звідки $k = 1$. Обчислимо інтеґрал, див. (13.3):

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{\mathrm{d}z}{z^{1/2}} = 4i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{it}\mathrm{d}t}{2e^{i(t+2\pi)/2}} = 2ie^{-i\pi} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{it/2}\mathrm{d}t =$$

$$= -2i\left(\frac{2}{i}e^{it/2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = -4\left(e^{i\pi/4} - e^{-i\pi/4}\right) = -4\cdot 2i\sin\frac{\pi}{4} = -4\sqrt{2}i.$$

►

Приклад 14.7

Обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_{\Gamma} z^2 \operatorname{Ln} z\mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln}(-1) = -i\pi$. Як залежить результат від початкової точки z_0 контура Γ?

◀Параметризуємо Γ наступним чином:

$$\Gamma = \left\{z : z(t) = e^{it}, \quad t \in [\alpha, \alpha + 2\pi)\right\}.$$

Тут $\alpha \in \mathbb{R}$ визначає аргумент початкової точки $z_0 = e^{i\alpha}$ на контурі Γ, див. рис. 18. Тоді $\mathrm{d}z = ie^{it}\mathrm{d}t$ і $z^2 \operatorname{Ln} z = e^{2it} i\,(t + 2\pi k)$, де $k \in \mathbb{Z}$. Підінтеґральна функція $\operatorname{Ln} z$ є багатозначною. Інтегрувати будемо ту вітку, яка визначається умовою

$$\operatorname{Ln}(-1) = \operatorname{Ln} e^{i(\pi+2\pi k)} = i(\pi + 2\pi k) = -i\pi,$$

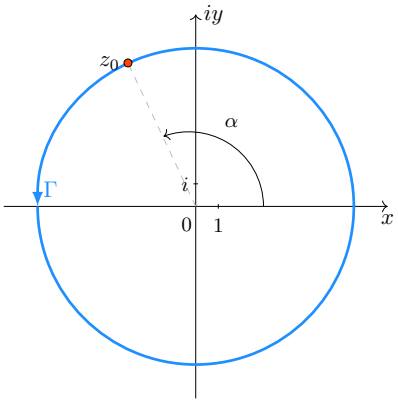


Рис. 18: До прикладу 14.7.

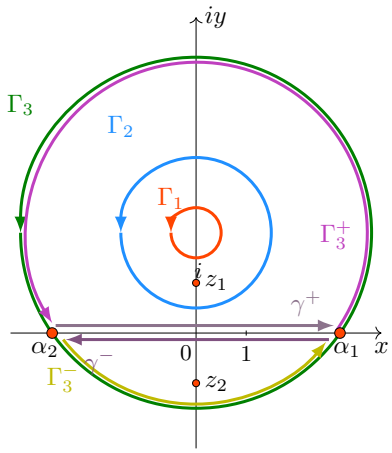


Рис. 19: До прикладу 14.8.

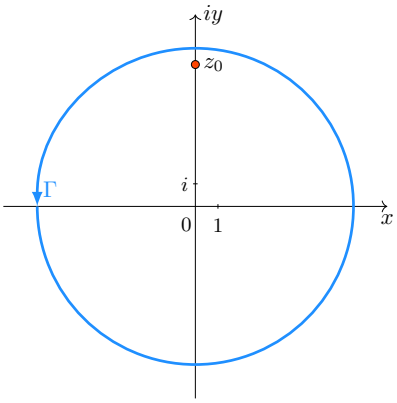


Рис. 20: До прикладу 14.9.

тобто $k=-1$. Обчислимо інтеґрал, див. (13.3):

$$I=\int\limits_{\Gamma} z^2\operatorname{Ln} z\mathrm{d}z=-\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi}(t-2\pi)\,e^{3it}\mathrm{d}t=-(t-2\pi)\,\frac{e^{3it}}{3i}\Big|_{\alpha}^{\alpha+2\pi}+\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\frac{e^{3it}}{3i}\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{i}{3}\left(\alpha e^{3i\alpha}-\alpha+2\pi\right)+\frac{e^{3it}}{(3i)^2}\Big|_{0}^{2\pi}=\frac{2}{3}i\pi+\frac{i\alpha}{3}\left(e^{3i\alpha}-1\right).$$

▶

Приклад 14.8

Використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал

$$I_k=\int\limits_{\Gamma_k}\frac{\sin z\mathrm{d}z}{z^2+1},\qquad k=1,2,3,$$

якщо

1) $\Gamma_1=\{z\ :\ |z-2i|=1/2\}$;
2) $\Gamma_2=\{z\ :\ |z-2i|=3/2\}$;
3) $\Gamma_3=\{z\ :\ |z-2i|=7/2\}$.

◀**1)** Підінтеґральна функція $\dfrac{\sin z}{z^2+1}$ є аналітичною в області $|z-2i|\le 3/4$, яка містить замкнений контур Γ_1, тому за інтеґральною формулою Коші (13.12) для випадку, коли особлива точка не належить області, випливає, що

$$I_1=\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\sin z\mathrm{d}z}{z^2+1}=0.$$

Цей результат можна отримати також, пригадавши інтеґральну теорему Коші (13.7).

2) Всередині області, яка обмежена контуром Γ_2, знаходиться одна то-

чка $z_1 = i$, в якій знаменник підінтеґральної функції обертається в нуль. Перепишемо інтеґрал у вигляді

$$I_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{(z+i)(z-i)} = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\frac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z}{z-i}.$$

Функція $\dfrac{\sin z}{z+i}$ є аналітичною в області, яка обмежена Γ_2. Застосувавши інтеґральну формулу Коші (13.12), отримаємо

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\frac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z}{z-i} = 2\pi i \left.\frac{\sin z}{z+i}\right|_{z=i} = 2\pi i \frac{\sin i}{2i} = \pi i \operatorname{sh} 1.$$

3) Всередині області, яка обмежена контуром Γ_3, знаходяться дві точки $z_1 = i$ і $z_2 = -i$, в яких знаменник підінтеґральної функції обертається в нуль. Тому беспосередньо застосовувати інтеґральну формулу Коші для обчислення I_3 не можна. Розглянемо два способи обчислення інтеґралу.

I спосіб. Скористаємося лінійною властивістю інтеґралів: зведемо підінтеґральну функцію до виразу, в якому зможемо безпосередньо скористатися інтеґральною формулою Коші, розклавши $\dfrac{1}{z^2+1}$ на елементарні дроби:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

Тоді можемо переписати шуканий інтеґрал у вигляді:

$$I_3 = \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z-i} - \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z+i}$$

Застосувавши інтеґральну формулу Коші (13.12) для кожного з інтеґралів, отримаємо

$$I_3 = \frac{2\pi i}{2i}\sin i - \frac{2\pi i}{2i}\sin(-i) = 2\pi i \operatorname{sh} i.$$

II спосіб. Скористаємося властивістю адитивності інтеґралу: подамо контур інтегрування у вигляді об'єднання таких контурів, для кожного з яких можна скористатися інтеґральною формулою Коші. Для цього позначимо $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{33}}{2}$, $\alpha_2 = -\dfrac{\sqrt{33}}{2}$ (це точки, в яких Γ_3 перетинає вісь абсцис) та розглянемо наступні додаткові контури (див. рис. 19):

$\gamma^+ = \{z : z(t) = \alpha_2 + (\alpha_1 - \alpha_2)t,\ t \in [0,1]\}$ (верхній берег розрізу $[\alpha_2, \alpha_1]$),
$\gamma^- = \{z : z(t) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)t,\ t \in [0,1]\}$ (нижній берег розрізу $[\alpha_1, \alpha_2]$),
$\Gamma_3^+ = \{z : |z-2i| = 3/2, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ (півколо від α_1 до α_2),
$\Gamma_3^- = \{z : |z-2i| = 3/2, \operatorname{Im} z < 0\}$ (півколо від α_2 до α_1).

Зауважимо, що $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \bigcup \Gamma_3^-$, крім того, $\int\limits_{\gamma^+ \bigcup \gamma^-} \dfrac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = 0$. Перепишемо інтеґрал I_3 наступним чином:

$$I_3 = \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \int\limits_{\Gamma_3^+ \bigcup \Gamma_3^-} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} + \int\limits_{\gamma^+ \bigcup \gamma^-} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \int\limits_{\Gamma_3^+ \bigcup \Gamma_3^- \bigcup \gamma^+ \bigcup \gamma^-} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_3^+ \bigcup \gamma^+} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} + \int\limits_{\Gamma_3^- \bigcup \gamma^-} \frac{\sin z \mathrm{d}z}{z^2+1} = \int\limits_{\Gamma_3^+ \bigcup \gamma^+} \frac{\dfrac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z}{z-i} + \int\limits_{\Gamma_3^- \bigcup \gamma^-} \frac{\dfrac{\sin z}{z-i}\mathrm{d}z}{z+i}.$$

Кожний з контурів $\Gamma_3^+ \bigcup \gamma^+$ і $\Gamma_3^- \bigcup \gamma^-$ є кусково-гладким і замкненим, причому напрям обходу кожного контуру є додатним. Всередині кожного з цих контурів знаходиться по одній точці, в якій знаменник обертається в нуль. Функції, які стоять в чисельниках, є аналітичними у відповідних областях. Тому для кожного з інтеґралів можна застосувати інтеґральну формулу Коші (13.12):

$$\int\limits_{\Gamma_4 \bigcup \gamma_2} \frac{\dfrac{\sin z}{z+i}\mathrm{d}z}{z-i} = 2\pi i \frac{\sin z}{z+i}\bigg|_{z=i} = 2\pi i \frac{\sin i}{2i} = \pi i \operatorname{sh} 1,$$

$$\int\limits_{\Gamma_5 \bigcup \gamma_1} \frac{\dfrac{\sin z}{z-i}\mathrm{d}z}{z+i} = 2\pi i \frac{\sin z}{z-i}\bigg|_{z=-i} = 2\pi i \frac{\sin(-i)}{-2i} = \pi i \operatorname{sh} 1.$$

Таким чином,

$$I_3 = 2\pi i \operatorname{sh} 1.$$

▶

Приклад 14.9

Використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{z \cos iz \mathrm{d}z}{(z-2\pi i)^3},$$

якщо $\Gamma = \{|z| = 7\}$.

◀Всередині області, яка обмежена контуром Γ, знаходиться одна точка $z_0 = 2\pi i$, в якій знаменник підінтеґральної функції обертається в нуль, див. рис. 20. Функція $z \cos iz$ є аналітичною в області, яка обмежена Γ. Застосувавши інтеґральну формулу Коші для похідних (13.13) для $n = 3$,

отримаємо

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{z\cos iz\mathrm{d}z}{(z-2\pi i)^4} = \frac{2\pi i}{3!}\left(z\cos iz\right)'''\Big|_{z=2\pi i} =$$
$$= \frac{\pi i}{3}\Big[3(\cos iz)'' + z(\cos iz)'''\Big]\Big|_{z=2\pi i} =$$
$$= \frac{\pi i}{3}\left(-3i^2\cos iz - zi^3\sin iz\right)\Big|_{z=2\pi i} = \pi i.$$

▶

§ 15. Завдання для аудиторної роботи

176. Обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} (3\bar{z} - 2\operatorname{Re} z)\,\mathrm{d}z, \quad k = 1,2,3,$$

якщо
1) Γ_1 — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = 1-i$ і $z_2 = 0$;
2) Γ_2 — це частина параболи, яка з'єднує точки z_1 і z_2, за умови, що задана парабола має вершину в z_2 і є симетричною відносно уявної осі;
3) Γ_3 — це ламана $z_1z_3z_2$, де $z_3 = 1$.

177. $I = \int\limits_{\Gamma} \bar{z}^3\,|\mathrm{d}z|$, якщо $\Gamma = \{z\ :\ |z| = 1,\ -\pi/6 < \arg z < \pi/6\}$.

178. $I = \int\limits_{\Gamma} z^3 \operatorname{Ln} z\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z\ :\ |z| = 2\}$, за умови $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 4\pi i$.
Як залежить результат від початкової точки z_0 контура Γ?

179. Використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \frac{ze^z\mathrm{d}z}{z^2+4}, \quad k = 1,2,3,$$

якщо
1) $\Gamma_1 = \{z\ :\ |z+i| = 1/4\}$;
2) $\Gamma_2 = \{z\ :\ |z+i| = 2\}$;
3) $\Gamma_3 = \{z\ :\ |z+i| = 7/2\}$.

180. Використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал

$$\int\limits_{|z|=1/2} \frac{\sin^2 z\mathrm{d}z}{z^3}.$$

181. Використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал

$$\int\limits_{|z|=5/2} \frac{z^2\mathrm{d}z}{z^2+iz+2}.$$

§ 16. Завдання для самостійної роботи

182. Обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} (\operatorname{Im} z - z + 2\bar{z})\,\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

якщо
1) Γ_1 — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 2i - 3$;
2) Γ_2 — це частина параболи, яка з'єднує точки z_1 і z_2, за умови, що задана парабола має вершину в z_1 і є симетричною відносно уявної осі;
3) Γ_3 — це ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = -3$;
4) Γ_4 — це ламана $z_1 z_4 z_2$, де $z_4 = 2i$.

183. Обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \left(3|z|^2 + 1\right)\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо
1) Γ_1 — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + 2i$;
2) Γ_2 — це частина параболи, яка з'єднує точки z_1 і z_2, за умови, що задана парабола має вершину в z_1 і є симетричною відносно дійсної осі;
3) Γ_3 — це ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 2i$.

184. Обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \left(\bar{z}^2 - \operatorname{Re} z + i\right)\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо
1) Γ_1 — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = -1 - i$ і $z_2 = 0$;
2) Γ_2 — це частина кубічної параболи $y = x^3$, яка з'єднує точки z_1 і z_2;
3) Γ_3 — це ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = -1$.

У прикладах 185–192 обчислити інтеґрал I вздовж кривої Γ:

185. $I = \int\limits_{\Gamma} \left(\bar{z}^5 - |z|^3 z^2\right)\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 2,\ 0 < \arg z < \pi\}$.

186. $I = \int\limits_{\Gamma} \left(|z|\bar{z}^2 - z^2\bar{z}\right)\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1/2,\ -\pi < \arg z < \pi/2\}$.

187. $I = \int\limits_{\Gamma} \left(\operatorname{Re} z + \operatorname{Im}^2 z\right)\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \left\{z \,:\, |z| = \sqrt{2}\right\}$.

188. $I = \int\limits_{\Gamma} (\operatorname{Im} z - |z|\bar{z})\,\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1,\ -2\pi/3 < \arg z < \pi/3\}$.

189. $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{sh} \bar{z}\mathrm{d}z$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки $2i\pi$ та -2π.

190. $I = \int\limits_{\Gamma} e^{2\bar{z} + \operatorname{Im} z}\mathrm{d}z$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки $2i - 1$ та $1 - 2i$.

191. $I = \int\limits_{\Gamma} \bar{z} \operatorname{ch} \operatorname{Re} z\mathrm{d}z$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки $-1 - i$ та $2i$.

192. $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Im} z \sin \bar{z} \mathrm{d}z$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки $-\pi$ та $\pi + i\pi$.

У прикладах 193–177 обчислити інтеґрал першого роду I вздовж кривої Γ:

193. $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Im} z^2 \, |\mathrm{d}z|$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки 4 та $1 - 3i$.

194. $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{sh} z \, |\mathrm{d}z|$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки $i\pi/2$ та $\pi - i\pi/2$.

195. $I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re} z^4 \, |\mathrm{d}z|$, якщо $\Gamma = \left\{ z \, : \, |z| = \sqrt[5]{2}, \; 0 < \arg z < \pi/8 \right\}$.

196. Обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} z \cos z^2 \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

1) $\Gamma_1 = \left\{ z \, : \, |z| = \sqrt{2} \right\}$;

2) Γ_2 — це відрізок, який з'єднує точки $1 - i$ і $1 + i$;

3) $\Gamma_3 = \left\{ z \, : \, |z| = \sqrt{2}, \; -\pi/4 < \arg z < \pi/4 \right\}$.

197. Обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \operatorname{sh}^2 2z \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

1) $\Gamma_1 = \{ z \, : \, |z| = \pi \}$;

2) Γ_2 — це відрізок, який з'єднує точки πi і π;

3) $\Gamma_3 = \{ z \, : \, |z| = \pi, \; 0 < \arg z < \pi/2 \}$.

198. Обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} (iz - 2)^{15} \, \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

1) Γ_1 — це прямокутник з вершинами в точках $1 + i$, $1 - i$, $-1 - i$, $-1 + i$;

2) Γ_2 — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = -1 - i$ і $z_2 = i$;

3) Γ_3 — це ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = -1 + i$.

199. Обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \operatorname{tg}^2 z \mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, 3,$$

якщо

1) Γ_1 — це ромб з вершинами в точках i, $\pi/4$, $-i$, $-\pi/4$;

2) Γ_2 — це відрізок, який з'єднує точки $z_1 = \pi/4$ і $z_2 = i$;

3) Γ_3 — це ламана $z_1 z_3 z_2$, де $z_3 = 0$.

У прикладах 200–192 обчислити інтеграл I вздовж кривої Γ:

200. $I = \int\limits_\Gamma z \operatorname{sh}\left(z^2\right) \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \left\{z \ : \ |z| = \sqrt{2}\right\}$.

201. $I = \int\limits_\Gamma e^{z^2} \mathrm{d}z$, якщо Γ — це трикутник з вершинами в точках $1+2i$, $-i$, $-1+2i$.

202. $I = \int\limits_\Gamma \operatorname{th}^2 z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1\}$.

203. $I = \int\limits_\Gamma \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2-5}$, якщо Γ — це прямокутник з вершинами в точках $2+2i$, $2-2i$, $-2-2i$, $-2+2i$.

204. $I = \int\limits_\Gamma (2z+i)^{11} \mathrm{d}z$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки $1+i/2$ і $-i$.

205. $I = \int\limits_\Gamma \sin(iz)\cos(4iz)\,\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = \pi/2, \ 0 < \arg z < \pi/2\}$.

206. $I = \int\limits_\Gamma \dfrac{e^{3iz}+1}{e^{iz}+1} \mathrm{d}z$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки $-i\ln 2$ і 2π.

207. $I = \int\limits_\Gamma \operatorname{ch}^3 z \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = \pi, \ \pi/2 < \arg z < \pi\}$.

208. $I = \int\limits_\Gamma (z+1)\operatorname{sh} z \mathrm{d}z$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки πi і -1.

209. $I = \int\limits_\Gamma (iz+1)\, e^{iz} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = \pi, \ 0 < \arg z < \pi/2\}$.

210. $I = \int\limits_\Gamma z^2 \sin z \mathrm{d}z$, якщо Γ — це відрізок, який з'єднує точки $-2i$ і $\pi/2$.

211. $I = \int\limits_\Gamma \left(z^2+2z+1\right) \operatorname{ch} z \mathrm{d}z$, якщо Γ — це ламана, який з'єднує точки -1, 0 і πi.

У прикладах 212–228 обчислити інтеграл I від заданої вітки багатозначної функції вздовж кривої Γ. Як залежить результат від початкової точки z_0 контура Γ?

212. $I = \int\limits_\Gamma \dfrac{\mathrm{d}z}{z^{1/3}}$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1\}$, за умови $1^{1/3} = 1$.

213. $I = \int\limits_\Gamma z^{\sqrt{2}} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1\}$, за умови $1^{\sqrt{2}} = 1$.

214. $I = \int\limits_\Gamma z^{3i} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1\}$, за умови $1^{3i} = 1$.

215. $I = \int\limits_\Gamma z^{1/4} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1\}$, за умови $1^{1/4} = -i$.

216. $I = \int\limits_\Gamma z^{\sqrt{3}} \mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \ : \ |z| = 1\}$, за умови $1^{\sqrt{3}} = e^{4\pi i\sqrt{3}}$.

217. $I = \int\limits_\Gamma \dfrac{\mathrm{d}z}{z^{2i+1}}$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $1^{2i+1} = e^{2\pi(i-2)}$.

218. $I = \int\limits_\Gamma \operatorname{Ln} z\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = -6\pi i$.

219. $I = \int\limits_\Gamma \operatorname{Ln} z\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 5\}$, за умови $\operatorname{Ln} 5 = \ln 5 + 8\pi i$.

220. $I = \int\limits_\Gamma |\operatorname{Ln} z|\,\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i$.

221. $I = \int\limits_\Gamma |\operatorname{Ln} z|\,\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln}(-1) = -3\pi i$.

222. $I = \int\limits_\Gamma \dfrac{\operatorname{Ln} z}{z}\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = e\}$, за умови $\operatorname{Ln} e = 1$.

223. $I = \int\limits_\Gamma \dfrac{\operatorname{Ln} z}{z}\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 4\}$, за умови $\operatorname{Ln} 4 = \ln 4 - 2\pi i$.

224. $I = \int\limits_\Gamma z^5 \operatorname{Ln} z\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

225. $I = \int\limits_\Gamma z^9 \operatorname{Ln} z\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln}(-1) = -\pi i$.

226. $I = \int\limits_\Gamma |\operatorname{Ln} z|^2\,\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

227. $I = \int\limits_\Gamma |\operatorname{Ln} z|^2\,\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = -4\pi i$.

228. $I = \int\limits_\Gamma |\operatorname{Ln} z|^2\,\mathrm{d}z$, якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1/2\}$, за умови $\operatorname{Ln}(1/2) = -\ln 2 + 2\pi i$.

229. Для заданого $\alpha \in \mathbb{R}$ обчислити

$$I = \int\limits_\Gamma z^\alpha \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $1^\alpha = e^{2\pi i k_0 \alpha}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$.

230. Для заданого $\alpha \in \mathbb{R}$ обчислити

$$I = \int\limits_\Gamma z^{i\alpha} \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $1^{i\alpha} = e^{-2\pi k_0 \alpha}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$.

231. Для заданого $\alpha \in \mathbb{C}$ обчислити

$$I = \int\limits_\Gamma z^\alpha \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $1^\alpha = e^{2\pi i k_0 \alpha}$, $k_0 \in \mathbb{Z}$. Як залежить результат від початкової точки z_0 контура Γ?

232. Обчислити

$$I = \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Ln} z \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = R\}$, за умови $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i k_0$, $k_0 \in \mathbb{Z}$. Як залежить результат від початкової точки z_0 контура Γ?

233. Обчислити

$$I = \int\limits_{\Gamma} |\operatorname{Ln} z| \, \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = 1\}$, за умови $\operatorname{Ln} 1 = 2\pi i k_0$, $k_0 \geq 0$. Як залежить результат від початкової точки z_0 контура Γ?

234. Обчислити

$$I = \int\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{Ln} z}{z} \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = R\}$, за умови $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i k_0$, $k_0 \in \mathbb{Z}$. Як залежить результат від початкової точки z_0 контура Γ?

235. Для заданого $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ обчислити

$$I = \int\limits_{\Gamma} z^n \operatorname{Ln} z \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = R\}$, за умови $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i k_0$, $k_0 \in \mathbb{Z}$. Як залежить результат від початкової точки z_0 контура Γ?

236. Обчислити

$$I = \int\limits_{\Gamma} |\operatorname{Ln} z|^2 \, \mathrm{d}z,$$

якщо $\Gamma = \{z \,:\, |z| = R\}$, за умови $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i k_0$, $k_0 \in \mathbb{Z}$. Як залежить результат від початкової точки z_0 контура Γ?

237. Довести, якщо $|a| \neq R$, то

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}.$$

238. Довести, якщо $|a| \neq R$, то

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|^2} = \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}.$$

239. Нехай $f(z) \in \mathscr{C}(\{z \,:\, |z - z_0| \leq R\}))$ для деякого $R > 0$. Довести, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f(z_0).$$

240. Використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \frac{\operatorname{ch}^2 z \mathrm{d}z}{z\left(z^2+\pi^2\right)}, \quad k = 1,2,3,4,$$

якщо

1) $\Gamma_1 = \{z : |z-4i| = 1/3\}$;
2) $\Gamma_2 = \{z : |z-4i| = 4/3\}$;
3) $\Gamma_3 = \{z : |z-4i| = 13/3\}$;
4) $\Gamma_4 = \{z : |z-4i| = 25/3\}$.

241. Використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \frac{z \sin z \mathrm{d}z}{4z^2-\pi^2}, \quad k = 1,2,3,$$

якщо

1) $\Gamma_1 = \{z : |z-1| = 1/5\}$;
2) $\Gamma_2 = \{z : |z-1| = 1\}$;
3) $\Gamma_3 = \{z : |z-1| = 3\}$.

242. Використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал

$$I_k = \int\limits_{\Gamma_k} \frac{z^2 e^{iz} \mathrm{d}z}{(z-1)\left(z^2+9\right)}, \quad k = 1,2,3,4,$$

якщо

1) $\Gamma_1 = \{z : |z-4i| = 1/2\}$;
2) $\Gamma_2 = \{z : |z-4i| = 3/2\}$;
3) $\Gamma_3 = \{z : |z-4i| = 9/2\}$;
4) $\Gamma_4 = \{z : |z-4i| = 15/2\}$.

У прикладах 243–256, використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал.

243.

$$\int\limits_{|z-1|=3} \frac{z^5(i-z^2)\mathrm{d}z}{(z+i)^5}.$$

244.

$$\int\limits_{|z-3i|=3} \frac{e^{iz}\mathrm{d}z}{(z-5i)^{10}}.$$

245.

$$\int\limits_{|z+i|=4} \frac{z^2 \operatorname{ch}(\pi z)\mathrm{d}z}{(z-i)^7}.$$

246.

$$\int\limits_{|z+1|=2} \frac{(2z+3)e^{3z}\mathrm{d}z}{(z+2)^{21}}.$$

247.

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch} 2z \mathrm{d}z}{z^5}.$$

248.

$$\int\limits_{|z-1/2|=1} \frac{\operatorname{tg} z \mathrm{d}z}{z\left(z^2+9\right)}.$$

249.
$$\int\limits_{|z+1/3|=4/3} \frac{e^{\frac{1}{z+2}}\mathrm{d}z}{(z+1)\,(z+3)^2}.$$

250.
$$\int\limits_{|z-3|=2} \frac{\sin e^{i\pi z}\mathrm{d}z}{z\,(z-2)^2}.$$

251.
$$\int\limits_{|z-3|=1} \frac{\cos 2z\mathrm{d}z}{z^2\,(z-\pi)^2}.$$

252.
$$\int\limits_{|z|=3} \frac{(\operatorname{ch}\pi z+\operatorname{sh}2\pi z)\,\mathrm{d}z}{(z^2+1)\,(z^2+4)}.$$

253.
$$\int\limits_{|z-1|=5/2} \frac{e^z\mathrm{d}z}{z^3\,(z+2i)}.$$

254.
$$\int\limits_{|z|=\pi/2} \frac{\left(z^2+i\right)\mathrm{d}z}{z\,(z-i)^4}.$$

255.
$$\int\limits_{|z|=\sqrt{2}} \frac{\operatorname{sh}\pi z\mathrm{d}z}{(iz+1)\,(z^2+1)^2}.$$

256.
$$\int\limits_{|z|=\pi} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+9)^3}.$$

257. Використовуючи інтеґральні формули Коші, обчислити інтеґрал
$$I=\int\limits_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n(z-b)},\qquad n\geq 1,$$
якщо $|a|<R<|b|$.

258. Скільки різних значень в залежності від n може приймати інтеґрал
$$I=\int\limits_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-z_k)},\qquad z_j\neq z_k,$$
якщо $|z_k|\neq R, k=1,2,\ldots n$?

259. Нехай функція $f(z)$ є аналітичною в області D і неперервною в $\overline{D}$, а $z_1,\ldots,z_n$ — довільні різні точки в D. Позначимо
$$w_n(z)=(z-z_1)\cdot\ldots\cdot(z-z_n).$$
Показати, що інтеґрал
$$P(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{w_n(\zeta)}\cdot\frac{w_n(\zeta)-w_n(z)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$
є многочленом $(n-1)$-го степеня, який співпадає з $f(z)$ в точках z_1, …, z_n (многочлен $P(z)$ називається інтерполяційним многочленом Лагранжа).

Тема 5

Ряди аналітичних функцій

В комплексному аналізі важливу роль при аналізі функцій відіграє апарат рядів. При цьому, окрім рядів Тейлора, які чудово описують поведінку функцій в околі точок аналітичності, стає важливим інший тип рядів, ряди Лорана, що характеризують поведінку функції поблизу точок, де порушується їх аналітичність. В цій темі розглядається ряди Тейлора і ряди Лорана для однозначної аналітичної функції. Ряд Лорана використовується як математичний засіб для класифікації ізольованих особливих точок, а також дослідження поведінки аналітичної функції в їх околі.

§ 17. Теоретичні відомості

Означення 17.1

Степеневим рядом називають ряд вигляду

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{17.1}$$

де a та c_n — комплексні числа, z — комплексна змінна.

Область збіжності степеневого ряду встановлює *критерій Коші—Адамара*, згадно з яким степеневий ряд (17.1) збігається абсолютно та рівномірно в крузі $|z-a| < R$, де радіус збіжності збіжності R визначається за формулою Коші—Адамара

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{17.2}$$

та розбігається, якщо $|z-a| > R$. Іноді для визначення радіуса збіжності степеневого ряду корисна наступна формула, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$.

Степеневі ряди тісно пов'язані з аналітичними функціями. Зокрема, сума степеневого ряду в крузі збіжності є аналітичною функцією. Окрім того, аналітичну в точці функцію можна представити збіжним степеневим рядом з центром в даній точці. Для заданої аналітичної функції радіус збіжності її степеневого ряду (17.2) з центром у даній точці визначається відстанню до найближчої особливої точки функції. Тобто на межі круга збіжності лежить принаймні одна особлива точка функції.

Нехай функція $f(z) \in \mathcal{A}\left(\mathbb{D}_a(R)\right)$, то в будь-якому крузі $\mathbb{D}_a(\rho)$ меншого радіуса $\rho < R$ функцію можливо представити збіжним *рядом Тейлора*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \tag{17.3}$$

Для коефіцієнтів ряду Тейлора виконуються нерівності Коші, $|c_n| \le M/R^n$, де $M = \max\limits_{z\in\mathbb{D}_a(R)} |f(z)|$.

Рядом Лорана в околі точки a називають ряд вигляду $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Якщо ряди Тейлора пристосовані для аналізу аналітичних функцій в кругових областях, то ряди Лорана є зручними для аналізу аналітичних функцій в кільцевих областях $\mathscr{R}\,(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}$. При цьому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ називається регулярною (правильною) частиною ряду Лорана, а ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ — головною (іррегулярною) частиною ряду Лорана. Якщо однозначна функція $f(z)$ є аналітичною у кільці $\mathscr{R}(a, R_1, R_2)$, тоді цю функцію можна подати у вигляді ряду Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n\,, \quad \text{де} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{|\zeta-a|=r \\ R_1<r<R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,$$

який є рівномірно збіжним для будь-яких точок всередині кільця. Для коефіцієнтів ряду Лорана виконуються нерівності Коші, $|c_n| \le M/r^n$, де $M = \max\limits_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Перейдемо до аналізу точок, де порушується аналітичність функції, так званих особливих точок.

Означення 17.2

Точка $z = a$ називається *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо існує проколотий окіл цієї точки $\dot{\mathbb{D}}_\varepsilon(a) = \{z : 0 < |z-a| < \varepsilon\}$, в якому функція $f(z)$ є аналітичною.

В проколотому околі ізольованої особливої точки аналітичну функцію можливо представити рядом Лорана, що дає можливість використовувати теорію рядів Лорана для аналізу поведінки функції в околі таких точок. Зокрема, за виглядом головної частини ряду Лорана проводять класифікацію ізольованих особливих точок. Ізольована особлива точка a аналітичної функції $f(z)$ називається:

1) *усувною особливою точкою*, якщо головна частина лоранівського розкладу в околі цій точці відсутня; при цьому $\lim\limits_{z\to a} f(z) = c_0 \ne \infty$;
2) *полюсом*, якщо головна частина лоранівського розкладу в околі цій точці містить скінчену кількість доданків; при цьому $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;
3) *істотно особливою точкою*, якщо головна частина лоранівського розкладу в околі цій точці містить нескінчену кількість доданків; при цьому $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не існує.

Порядком (*кратністю*) N полюса називається найвищий степінь виразу $1/(z-a)$, що міститься в головній частині лоранівського розкладу,

$f(z) = \sum\limits_{n=-N}^{\infty} c_n(z-a)^n$, де $N > 0$ і $c_N \neq 0$. Якщо $N = 1$, то полюс a має назву *простого*, якщо $N > 1$, то полюс має назву *кратного*. Слід звернути увагу на відповідність між нулями і полюсами аналітичної функції. Якщо точка $z = a$ є нулем порядку N для функції $f(z)$ (або полюсом порядку N), та ж сама точка буде полюсом порядку N (відповідно, нулем порядку N) для функції $1/f(z)$.

Так само, як проводили класифікацію особливостей в околі скінченої точки, можна провести поведінку аналітичної функції в околі нескінченно віддаленої точки. При цьому, точка $z = \infty$ є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо точка $t = 1/z = 0$ є ізольованою особливою точкою функції $g(t) = f(1/z)$.

§ 18. Приклади розв'язування задач

Для зручного обчислення тейлорівських коефіцієнтів іноді корисно скористатись відомими розкладами. Так, наприклад, при $|z| < 1$ справджується розвинення:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1. \tag{18.1}$$

Приклад 18.1

Використовуючи розвинення (18.1), розкласти функцію $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ в ряд Тейлора в одиничному крузі $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

◀Ряд (18.1) збігається в області $\mathbb{D}$ абсолютно та рівномірно. Тому, виконуючи почленне диференціювання, матимемо:

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = |n = k+1| = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k.$$

Таким чином,

$$w = f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k. \tag{18.2}$$

▶

Приклад 18.2

Використовуючи розвинення (18.1), розкласти функцію $f(z) = \dfrac{z^3}{(z^2-1)^2(z-1)}$ в ряд Тейлора при $z \in \mathbb{D}$.

◀Розкладемо функцію $w = f(z)$ на елементарні дроби:

$$w = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-z)^2} - \frac{5}{4}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{4}\frac{1}{(1+z)}$$

Використовуючи в другому доданку розвинення (18.2) з прикладу 18.1, в третьому і четвертому — розвинення (18.1), матимемо:

$$w = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n - \frac{5}{4}\sum_{n=0}^{\infty}z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n,$$

$$c_n = \delta_{n,0} + \frac{n}{2} - \frac{3}{4} - \frac{(-1)^n}{4},$$

де $\delta_{n,0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases}$ — символ Кронекера. ▶

Приклад 18.3

Дослідити поведінку функції $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ в околі точки $z = 0$.

◀Функція $f(z)$ має в точці $z = 0$ особливу точку, тому що значення в самій точці не визначено. Лоранівський розклад в околі точки $z = 0$ має вигляд:

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots,$$

отже існує границя $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 1$, тому точка $z = 0$ — усувна особлива точка. Таким чином, довизначивши, що $f(0) = 1$, ми усунули розрив в самій точці $z = 0$, функція стала аналітичною. ▶

Приклад 18.4

Дослідити поведінку функції $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$ в околі точки $z = 0$.

◀Функція $w = f(z)$ має в точці $z = 0$ особливу точку, тому що знаменник в цій точці набуває нульове значення. Лоранівський розклад в околі точки $z = 0$ має вигляд:

$$w = \frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}z^{n-3} = |n = m+3| =$$

$$= \sum_{m=-3}^{\infty}z^m = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{m=0}^{\infty}z^m.$$

Головна частина ряду Лорана в околі має скінченну кількість доданків. Найбільший від'ємний степінь дорівнює 3. Отже точка $z = 0$ — це три-

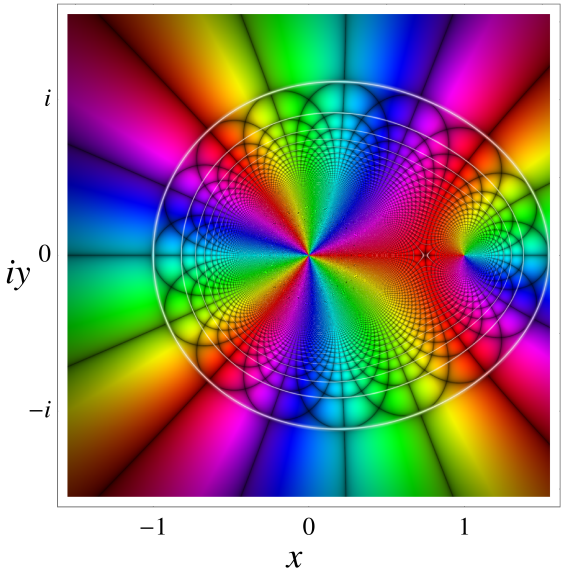


Рис. 21: До прикладу 18.4: фазовий портрет функції $f(z) = \dfrac{1}{z^3(1-z)}$.

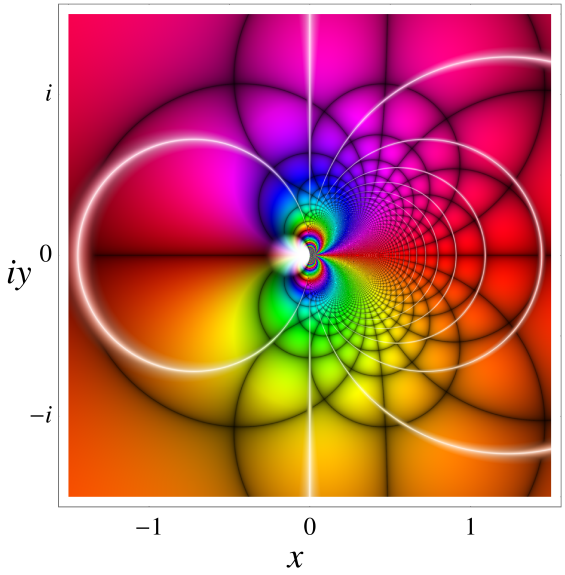


Рис. 22: До прикладу 18.10: фазовий портрет функції $f(z) = e^{1/z}$.

кратний полюс. Функція $g(z) \equiv 1/f(z) = z^3(1-z)$ має в точці 0 нуль 3-го порядку. Граничне значення, як завжди для полюса,

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z^3(1-z)} = \infty.$$

Фазовий портрет функції $f(z)$ зображено на рис. 21. В околі полюса третього порядку $z_1 = 0$ можна побачити послідовність усіх кольорів, які тричі змінюються при обході полюса по замкненому контуру. При обході простого полюса $z = 1$ кольори один раз змінюються. Картина схожа на фазовий портрет в околі нуля, див. рис. 9, однак напрямок зміни кольорів протилежний.

▶

Приклад 18.5

Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z) = \operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$ та з'ясувати їх тип.

◀Особливі точки функції $f(z)$ — це особливі точки $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, тобто точки $z_k = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$ (всі ці точки є нулями знаменника $\sin z_k = 0$), та особливі точки функції $\dfrac{1}{z}$, тобто точка $z = 0$. Зауважимо, що точка $z = \infty$ не є ізольованою особливою точкою, тому що ∞ є граничною точкою для послідовності особливих точок $z_k = \pi k$ при $\kappa \in \mathbb{Z}$ та границею звичайних точок при $\kappa \notin \mathbb{Z}$.

I СПОСІБ. Функція $\sin z$ має прості нулі (кратності один), отже усі особливі точки z_k є простими полюсами. Виключенням є точка $z = 0$, причина — характер особливості в цій точці може змінитись, тому що простий

полюс має як $\operatorname{ctg} z$, так і $\dfrac{1}{z}$. Для дослідження особливості в цій точці розкладемо $\operatorname{ctg} z$ в ряд, для цього використаємо асимптотичну поведінку функцій $\cos z$ і $\sin z$:

$$\cos z = z - \frac{z^2}{2} + o\left(z^2\right), \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{6} + o\left(z^3\right),$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \asymp \frac{1 - \frac{z^2}{2}}{z\left(1 - \frac{z^2}{6}\right)} \asymp \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{2}\right)\left(1 + \frac{z^2}{6}\right) \asymp \frac{1}{z}\left(1 - \frac{z^2}{3}\right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3}.$$

Отже, для $\operatorname{ctg} z$ маємо розклад

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} + o(z), \tag{18.3}$$

звідки $f(z) = -\frac{z}{3} + o\,(z)$. Як бачимо, ряд Лорана містить лише регулярну частину, отже точка $z = 0$ є усувною.

II спосіб. Знайдемо границю функції $f(z)$ в особливій точці z_k:

$$\lim_{\substack{z=z_k \\ k\neq 0}} f(z) = \frac{\cos \pi k}{\sin \pi k} - \frac{1}{\pi k} = \frac{(-1)^k}{0} - \frac{1}{\pi k} = \infty,$$

$$\lim_{z=0} f(z) = \lim_{z=0} \frac{z\cos z - \sin z}{z \sin z} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{z=0} \frac{-z \sin z}{\sin z + z\cos z} \overset{\text{L'Hôpital}}{=}$$
$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{z=0} \frac{-\sin z - z\cos z}{2\cos z - z \sin z} = \frac{0}{2} = 0.$$

►

Приклад 18.6

Розкласти функцію $f(z) = \dfrac{1}{z - i}$ в ряд Лорана в області D, якщо

1) $D = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

2) $D = \dot{\mathbb{D}}_1(i) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 1\}$.

3) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

◄Функція $w = f(z)$ має в точці $z = i$ особливу точку типу простий полюс, тому що $1/f(z) = z - i$ має в цій точці простий нуль.

1) Лоранівський розклад в околі точки $z = 0$ має вигляд:

$$w = \frac{i}{1 - (-iz)} = i\sum_{n=0}^{\infty}(-iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n = -(-i)^n.$$

Область збіжності цього ряду $|z| < 1$. Як бачимо, ряд Лорана містить лише регулярну частину і співпадає з рядом Тейлора. Це пов'язано з відсутністю особливих точок всередині області D.

2) Лоранівський розклад в околі точки $z = i$ містить лише головну частину, $w = \dfrac{1}{z-i}$, яка відповідає простому полюсу.

3) Потрібно знайти розклад в околі нескінченно віддаленої точки, тому зробимо змінних $t = 1/z$, шукана область $D = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$. В термінах t,

$$w = \frac{t}{1-it} = i\sum_{n=0}^{\infty}(it)^n = \left|\begin{matrix} k = n-1 \\ z = 1/t \end{matrix}\right| = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n, \qquad c_n = i^{1-n}.$$

Такий вигляд ряду Лорана відповідає регулярній частині в околі ∞. Область збіжності цього ряду $|z| > 1$. ▶

Приклад 18.7

Розкласти функцію $f(z) = \dfrac{4}{(z^2-1)^2}$ в ряд Лорана в області D, якщо

1) $D = \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
2) $D = \dot{\mathbb{D}}_2(1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 2\}$.
3) $D = \dot{\mathbb{D}}_2(-1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 2\}$.
4) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

◀Функція $w = f(z) = \dfrac{4}{(z-1)^2(z+1)^2}$ має два полюси другого порядку (двократні полюси) в точках $z_1 = -1$ та $z_2 = 1$, тому що знаменник в цих точках має двократні нулі. Розкладемо функцію w на елементарні дроби:

$$w = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+z)^2}.$$

1) Використовуючи в першому і другому доданках розвинення (18.1), в третьому і четвертому — розвинення (18.2) з прикладу 18.1, матимемо:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-z)^n.$$

Області збіжності кожного з рядів $\mathbb{D}$, отже, в області $\mathbb{D}$ всі ряди можна об'єднати в спільний збіжний ряд

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$
$$c_n = 1 + (-1)^n + (n+1) + (n+1)(-1)^n = (n+2)\left(1 + (-1)^n\right).$$

Як бачимо, ряд Лорана містить лише регулярну частину. Це пов'язано з відсутністю особливих точок всередині області D.

2) Потрібно знайти розклад в околі $z=1$, тому зробимо заміну змінних $t=z-1$, шукана область $D=\dot{\mathbb{D}}_2(t=0)$. В термінах t,

$$w=-\frac{1}{t}+\frac{1}{2+t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(2+t)^2}=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{t}{2}}+\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^2}.$$

Використовуючи в третьому доданку розвинення (18.1), в останньому — розвинення (18.2) з прикладу 18.1, матимемо:

$$w=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{t}{2}\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(-\frac{t}{2}\right)^n.$$

Перші два доданки мають особливості при $t=0$, третій і четвертий — збігаються в області $\mathbb{D}_2(t=0)$, тому в проколотому крузі $\dot{\mathbb{D}}_2(t=0)$ можна об'єднати усі доданки під спільну суму

$$w=\sum_{n=-2}^{\infty}c_nt^n=|t=z-1|=\sum_{n=-2}^{\infty}c_n(z-1)^n,\quad c_n=\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+2}}.$$

Наявність головної частини ряду Лорана свідчить про те, що в точці $z=1$ функція $f(z)$ має полюс другого порядку.

3) Потрібно знайти розклад в околі $z=-1$, тому зробимо заміну змінних $t=z+1$, шукана область $D=\dot{\mathbb{D}}_1(t=0)$. В термінах t,

$$w=\frac{1}{2-t}+\frac{1}{t}+\frac{1}{(2-t)^2}+\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}}+\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{t}{2}\right)^2}.$$

Використовуючи в третьому доданку розвинення (18.1), в останньому — розвинення (18.2) з прикладу 18.1, матимемо:

$$w=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{t}{2}\right)^n.$$

Перші два доданки мають особливості при $t=0$, третій і четвертий — збігаються в області $\mathbb{D}_2(t=0)$, тому в проколотому крузі $\dot{\mathbb{D}}_2(t=0)$ можна об'єднати усі доданки під спільну суму

$$w=\sum_{n=-2}^{\infty}c_nt^n=|t=z+1|=\sum_{n=-2}^{\infty}c_n(z+1)^n,\quad c_n=\frac{n+3}{2^{n+2}}.$$

Наявність головної частини ряду Лорана свідчить про те, що в точці $z=-1$ функція $f(z)$ має полюс другого порядку.

4) Потрібно знайти розклад в околі нескінченно віддаленої точки, тому зробимо перетворення $t=1/z$, шукана область $D=\{t\in\mathbb{C}:|t|<1\}$. В термінах t

$$w=\frac{1}{1-\frac{1}{t}}+\frac{1}{1+\frac{1}{t}}+\frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2}=$$
$$=-\frac{t}{1-t}+\frac{t}{1+t}+\frac{t^2}{(1-t)^2}+\frac{t^2}{(1+t)^2}.$$

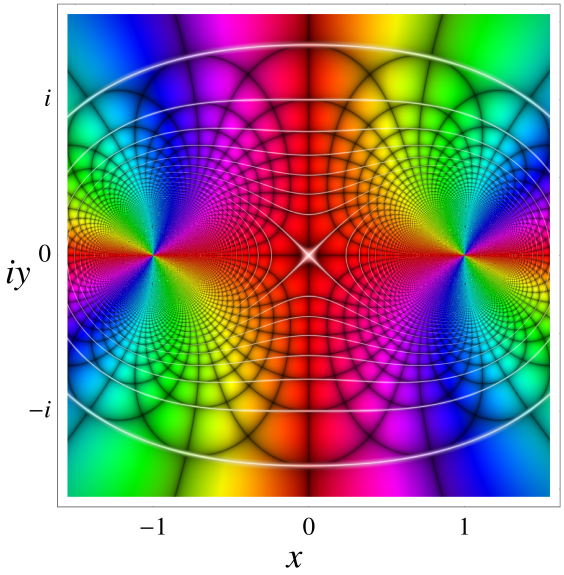


Рис. 23: До прикладу 18.7: фазовий портрет функції $f(z) = \dfrac{4}{(z-1)^2(z+1)^2}$.

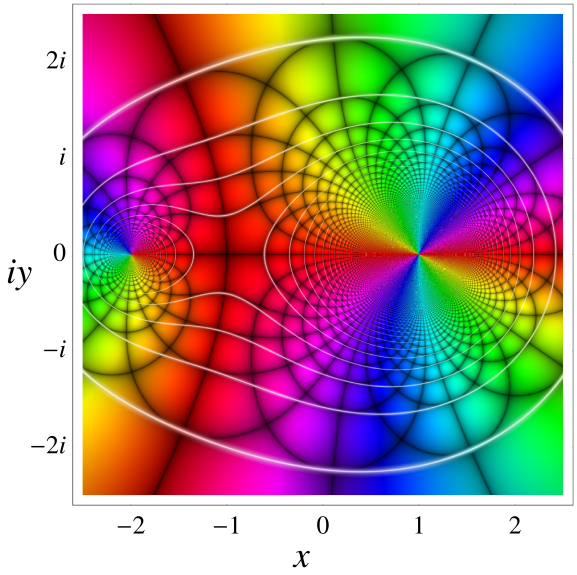


Рис. 24: До прикладу 18.8: фазовий портрет функції $f(z) = \dfrac{9}{(z-1)^2(z+2)}$.

Використовуючи в перших двох доданках розвинення (18.1), в третьому і четвертому — розвинення (18.2) з прикладу 18.1, матимемо:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 + (-1)^n\right) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\left(-1 + (-1)^n\right) t^{n+2}.$$

Враховуючи ступні змінної t в цих рядах, зробимо в першому ряді заміну змінних $k = n+1$, в другому — $k = n+2$, тоді матимемо

$$w = \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)\left(-1 + (-1)^k\right) t^k = \left| \begin{matrix} m = -k \\ t = 1/z \end{matrix} \right| = \sum_{m=-\infty}^{-2} c_m z^m,$$
$$c_m = -(m+2)\left(-1 + (-1)^m\right).$$

Такий вигляд ряду Лорана відповідає регулярній частині в околі ∞. ▶

Приклад 18.8

Побудувати для функції $f(z) = \dfrac{9}{(z-1)^2(z+2)}$ всі можливі ряди Лорана з центром в точці $z = 0$ і знайти області їх збіжності.

◀Функція $w = f(z) = \dfrac{9}{(z-1)^2(z+2)}$ має дві особливі точки: точка $z_1 = 1$ є полюсом другого порядку, точка $z_2 = 1$ — простим полюсом (першого порядку), тому що знаменник в точці z_1 має двократний нуль, а в точці z_2 — простий нуль. Якщо розглядати кільцеві області з центром в точці $z = 0$, то особлива точка z_1 лежать на колі $|z| = 1$, особлива точка z_2 знаходи-

ться на колі $|z|=2$. Ці два кола визначають межі області аналітичності. Таким чином, можна відокремити три області аналітичності:
1) $D=\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$.
2) $D=\mathscr{R}(0,1,2)=\{z\in\mathbb{C}:1<|z|<2\}$.
3) $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|>2\}$.

Розкладемо функцію w на елементарні дроби:

$$w=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2+z}+\frac{3}{(1-z)^2} \tag{18.4}$$

і розглянемо окремо три випадки.

1) Перепишемо (18.4) у вигляді

$$w=\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{3}{(1-z)^2}.$$

Використовуючи в першому і другому доданках розвинення (18.1), в третьому — розвинення (18.2) з прикладу 18.1, матимемо:

$$w=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}z^n}_{|z|<1}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n}_{|z|>2}+\underbrace{3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n}_{|z|<1}.$$

Область збіжності першого ряду $\mathbb{D}$, другого — $\mathbb{D}_2(0)\supset\mathbb{D}$, третього — $\mathbb{D}$. Отже, в області $\mathbb{D}$ всі ряди збігаються і можна об'єднати в спільний збіжний ряд

$$w=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n,\quad c_n=3n+4+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Як бачимо, ряд Лорана містить лише регулярну частину і є рядом Тейлора. Це пов'язано з відсутністю особливих точок всередині області D.

2) Перепишемо (18.4) у вигляді

$$w=\frac{1}{1-z}+\frac{3}{(1-z)^2}+\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}.$$

Використовуючи розвинення (18.1), матимемо:

$$w=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}z^n+3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n}_{|z|<1}+\underbrace{\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^k}_{|z|>2}.$$

Область збіжності перших двох рядів — це $\mathbb{D}$, останнього — $\{z\in\mathbb{C}:|z|>2\}$. Отже, в кільці $\mathscr{R}(0,1,2)$ всі ряди збігаються і можна об'єднати в спільний збіжний ряд, попередньо, зробивши в

останньому доданку заміну індексу $k = -n - 1$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty}(3n+4)z^n + \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$
$$c_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}, & n < 0, \\ 3n+4, & n \geq 0. \end{cases}$$

Ряд Лорана містить як регулярну, так і головну частини.

3) Потрібно знайти розклад в околі нескінченно віддаленої точки, тому зробимо перетворення $t = 1/z$, шукана область $D = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$. В термінах t розлад на елементарні дробі (18.4) матимемо вигляд:

$$w = \frac{t}{1-\frac{1}{t}} + \frac{1}{2+\frac{1}{t}} + \frac{3}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^2} = -\frac{t}{1-t} + \frac{t}{1+2t} + \frac{3t^2}{(1-t)^2}.$$

Використовуючи в перших двох доданках розвинення (18.1), в третьому — розвинення (18.2) з прикладу 18.1, матимемо:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-1+(-2)^n\right)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}3(n+1)t^{n+2}.$$

Враховуючи ступені змінної t в цих рядах, зробимо в першому ряді заміну змінних $k = n+1$, в другому — $k = n+2$, тоді матимемо

$$w = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-1+(-2)^{k-1}+3(k-1)\right)t^k = \left|\begin{matrix} m = -k \\ t = 1/z \end{matrix}\right| = \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m z^m,$$
$$c_m = (-2)^{-m-1} - 4 - 3m.$$

Такий вигляд ряду Лорана відповідає регулярній частині в околі ∞. ▶

Приклад 18.9

Знайти головну частину ряду Лорана функції $f(z) = \dfrac{z-3}{\sin^2(\pi z)}$ в околі точки $z_0 = 3$ та з'ясувати тип цієї точки.

◀Потрібно дослідити поведінку в околі точки $z_0 = 3$, тому зробимо заміну змінних $t = z - 3$, тоді для шуканої функції $w = f(z)$ матимемо

$$w = \frac{t}{\sin^2(\pi(3+t))} = \frac{t}{\sin^2(\pi t)}.$$

Функція $\sin(\pi t)$ при $t \to 0$ має асимптотичну поведінку

$$\sin \pi t \asymp \pi t - \frac{\pi^3 t^2}{6} = \pi t\left(1 - \frac{\pi^2 t^2}{6}\right),$$

тому для функції w матимемо наступний асимптотичний розклад

$$w \asymp \frac{t}{\pi^2 t^2 \left(1 - \frac{\pi^2 t^2}{6}\right)^2} \asymp \frac{1}{\pi^2 t \left(1 - \frac{\pi^2 t^2}{3}\right)} \asymp \frac{1}{\pi^2 t}\left(1 + \frac{\pi^2 t^2}{3}\right) = \frac{1}{\pi^2 t} + \frac{t}{3},$$

звідки $w = \dfrac{1}{\pi^2(z-3)} + \dfrac{z-3}{3} + o(z-3)$. Головна частина ряду Лорана містить лише один доданок $\dfrac{1}{\pi^2(z-3)}$ та відповідає простому полюсу. ▶

Приклад 18.10

Дослідити поведінку функції $f(z) = e^{1/z}$ в околі точки $z = 0$.

◀Розкладемо функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z = 0$:

$$f(z) \equiv \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = |k = -n| = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{z^k}{(-k)!}.$$

Головна частина ряду Лорана містить нескінчену кількість доданків, отже точка $z = 0$ є істотно-особливою точкою. Покажемо, що в цій точці не існує границі $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

1) Якщо розглянути послідовність $\{z_n = \frac{1}{n}\}$, що збігається до нуля, то відповідна послідовність значень функції

$$\{f(z_n)\} = \left\{e^{\frac{1}{z_n}}\right\} = \{e^n\} \to \infty.$$

2) Для послідовності $\{z_n = -\frac{1}{n}\}$, що також збігається до нуля, значення функції

$$\{f(z_n)\} = \left\{e^{\frac{1}{z_n}}\right\} = \{e^{-n}\} \to 0.$$

3) Для послідовності $\{z_n = \frac{1}{2\pi n i}\}$, що також збігається до нуля, значення функції

$$\{f(z_n)\} = \left\{e^{\frac{1}{z_n}}\right\} = \{e^{2\pi n i}\} \to 1.$$

Як бачимо, в залежності від вибору послідовності точок ми отримаємо декілька різних значень функції, тобто граничне значення взагалі не існує.

Покажемо, як можна обрати послідовність точок, збіжних до $a = 0$, для яких послідовність значень функцій збігається до будь-якого наперед заданого числа $A \in \mathbb{C}$ (теорема Сохоцького—Казораті—Вейерштрасса).

Оберемо послідовність точок у вигляді $\{z_n\}$ у вигляді:

$$z_n = \frac{1}{\ln A + 2\pi n i}, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = 0.$$

Відповідні значення функції

$$f(z_n) = e^{\frac{1}{z_n}} = e^{\ln A + 2\pi n i} = A.$$

Фазовий портрет функції $f(z)$ зображено на рис. 22. В околі істотно особливої точки $z = 0$ можна побачити послідовність усіх кольорів. ▶

§ 19. Завдання для аудиторної роботи

260. Побудувати для функції $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$ всі можливі ряди Лорана з центром в точці $z = 0$ і знайти області їх збіжності.

261. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$ та з'ясувати їх тип.

262. Знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z) = z\operatorname{tg}^2 z$ та з'ясувати їх тип.

263. Знайти головну частину ряду Лорана функції $f(z) = \operatorname{ctg}\pi z$ в околі точки $z_0 \in \mathbb{Z}$ та з'ясувати тип цієї точки.

264. Знайти головну частину ряду Лорана функції $f(z) = \dfrac{z-1}{\sin^2 z}$ в околі точки $z_0 = 0$ та з'ясувати тип цієї точки.

§ 20. Завдання для самостійної роботи

У прикладах 265–270, використовуючи розвинення (18.1), довести формули і вказати області збіжності рядів.

265. $\dfrac{z^3}{(z^2+1)(z-1)} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(z^{4n} + z^{4n-1}\right).$

266. $\dfrac{1}{(z^2+1)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^n z^{2n}.$

267. $\dfrac{1}{(1+z^3)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{3n}.$

268. $\dfrac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(z^{8n} - z^{8n+1}\right).$

269. $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2-4)} = \frac{1}{5}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1} - 4^{-n-1}\right)z^{2n+1}.$

270. $\dfrac{1}{(1-z^6)^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}z^{6n}.$

У прикладах 271–277 знайти всі ізольовані особливі точки функції $f(z)$ та з'ясувати їх тип.

271. $f(z) = \exp\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{z}\right)$.

272. $f(z) = \dfrac{z}{\operatorname{sh} z}$.

273. $f(z) = \operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$.

274. $f(z) = \dfrac{\operatorname{ctg}\pi z}{\pi z}$.

275. $f(z) = z\left(\exp\left(\dfrac{1}{z}\right) - 1\right)$.

276. $f(z) = \sin\left(e^{1/z}\right)$.

277. $f(z) = \sin 3z - 3\sin z$.

У прикладах 278–285 знайти множину точок комплексної множини C, де збігається зазначений ряд Лорана.

278. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n z^n$.

279. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|} z^n$.

280. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{(z-1)^n}{\operatorname{ch}\alpha n}$, де $\alpha > 0$.

281. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{(z-a)^{2n}}{2^{-n^2}+1}$.

282. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n^2} z^{n^3}$.

283. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$.

284. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n^2+1}$.

285. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n^2}(z+1)^n$.

У прикладах 286–301 знайти особливі точки функції $f(z)$. Розкласти функцію $f(z)$ в ряд Лорана по степенях $(z-a)$ в кільці $\mathcal{R}(a, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}$.

286. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$, кільце $\mathcal{R}(0,1,2)$.

287. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2-4)}$, кільце $\mathcal{R}(0,1,2)$.

288. $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$, кільце $\mathcal{R}(0,1,2)$.

289. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)(z+2)}$, кільце $\mathcal{R}(0,1,2)$.

290. $f(z) = \dfrac{z^4+1}{(z-1)(z+2)}$, кільце $\mathcal{R}(0,1,2)$.

291. $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+1)^2(z^2+4)}$, кільце $\mathcal{R}(0,1,2)$.

292. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z+2)^2}$, кільце $\mathcal{R}(0,1,2)$.

293. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$, кільце $\mathcal{R}(1,1,2)$.

294. $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, точка $a=0$, якщо $-\frac{3}{2} \in \mathcal{R}(0, R_1, R_2)$.

295. $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, точка $a=1$, якщо $2i \in \mathcal{R}(1, R_1, R_2)$.

296. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2-9)}$, кільце $\mathcal{R}(1,1,2)$.

297. $f(z) = \dfrac{z^3}{(z+1)(z-2)}$, кільце $\mathcal{R}(-1,0,3)$.

298. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)(z^2+4)}$, кільце $\mathcal{R} = (0,2,\infty)$.

299. $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2}$, точка $a=i$, якщо $-i \in \mathcal{R}(i, R_1, R_2)$.

300. $f(z) = \dfrac{2z}{z^2-2i}$, точка $a=1$, якщо $-1 \in \mathcal{R}(1, R_1, R_2)$.

301. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-1)(z^2+4)}$, точка $a=1$, якщо $-1 \in \mathcal{R}(1, R_1, R_2)$.

У прикладах 302–311 знайти ряд Лорана для функції $f(z)$ в кільці $\mathcal{R}(a, R_1, R_2)$ представивши цю функцію у вигляді $f(z) = f_1(z)f_2(z)$, де функція $f_1(z)$ є аналітичною в області $|z-a| < R_1$, а функція $f_2(z)$ — в області $|z-a| > R_2$.

302. $f(z) = z^3 e^{1/z}$, де точка $a = 0$, $0 < |z| < \infty$.

303. $f(z) = z^2 \sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$, де точка $a = 0$, $0 < |z| < \infty$.

304. $f(z) = z^3 \cos\left(\dfrac{1}{z-2}\right)$, де точка $a = 2$, $0 < |z-2| < \infty$.

305. $f(z) = z^2 \sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$, де точка $a = 0$, $0 < |z| < \infty$.

306. $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-z)}$, де точка $a = 0$, $0 < |z| < \infty$.

307. $f(z) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z(z+1)}$, де точка $a = 1$, $1 < |z-1| < 2$.

308. $f(z) = \exp\left[\dfrac{t}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)\right]$, де точка $a = 0$, $0 < |z| < \infty$.

309. $f(z) = e^z \ln\dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$,де точка $a = 0$, $\max(|\alpha|, |\beta|) < |z| < \infty$.

310. $f(z) = \dfrac{1}{z}\exp\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$, де точка $a = 1$, $0 < |z-1| < 1$.

311. $f(z) = \dfrac{1}{z-i}\exp\left(\dfrac{3}{z}\right)$, де точка $a = 0$, $0 < |z| < 1$.

У прикладах 312–320 для функції $f(z)$ знайти головну частину ряду Лорана в околі точки z_0 та з'ясувати тип цієї точки.

312. $f(z) = \operatorname{ctg}\pi z$, де точка $z_0 = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

313. $f(z) = \dfrac{1}{\sin\pi z}$, де точка $z_0 = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

314. $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+b^2)^2}$, де точка $z_0 = ib$.

315. $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{(z^2+b^2)^2}$, де точка $z_0 = ib$, $b > 0$.

316. $f(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z^2+b^2}$, де точка $z_0 = \infty$.

317. $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+b^2}$, де точка $z_0 = ib$, $b > 0$.

318. $f(z) = \dfrac{z-1}{\sin^2 z}$, де точка $z_0 = 0$.

319. $f(z) = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$, де точка $z_0 = 0, \pm2\pi i, \pm4\pi i, \ldots$.

320. $f(z) = \dfrac{z}{(z+2)^2}$, де точка $z_0 = -2$.

§ 21. Приклади задач для модульної контрольної роботи (МКР-І)

Модульна контрольна робота (МКР-І) проводиться після завершення вивчення розділу І (теми 1–5). Робота містить 8 завдань, приклади яких наведено нижче.

1. Зобразити на $\mathbb{C}$-площині множину точок

$$\mathscr{M} = \left\{ z \ : \ \operatorname{Re} z < \operatorname{Im} \frac{z-2i}{z+2i} \right\}.$$

2. Знайти комплексні числа z_1, z_2, якщо $z_1 + z_2 = 4 + 4i, \quad z_1 z_2 = 8 + 14i$.

3. Знайти всі значення $(3-4i)^{1/7}$ на множині комплексних чисел.

4. Використовуючи алгебраїчну форму для обчислення $(x+iy)^{1/2}$, знайти дійсну та уявну частину виразу $(20+48i)^{1/2}$.

5. Знайти всі розв'язки рівняння на множині комплексних чисел $\operatorname{sh} z + 3\exp z = i$.

6. Обчислити інтеграл $\int\limits_{|z|=1} z^4 |\mathrm{d}z|$.

7. Обчислити довжину образу кривої

$$\Gamma = \{ z(t) \ : \ z(t) = \alpha t, \ t \in [0,1] \}$$

при відображенні $w = e^{iz}$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

8. Розкласти функцію $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)\,(z^2+9)}$ в ряд Лорана в кільці $1 < |z| < 3$.

Частина II

Застосування теорії функцій комплексної змінної

Тема 6

Лишки і методи їх обрахунку

Серед різноманітних застосувань теорії функції комплексної змінної, важливу роль відіграє теорія лишків. В цій темі розглядається поняття лишку, наводяться основні методи обрахування лишків як в скінчених ізольованих особливих точках, так і на нескінченості.

§ 22. Теоретичні відомості

Означення 22.1

Лишком функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці a називається число

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(z)\mathrm{d}z, \tag{22.1}$$

де C — довільна кусково-гладка жорданова крива, що знаходиться в області аналітичності $f(z)$ і охоплює a, причому контур C разом із областю, яку він охоплює, не містить інших особливих точок, крім a.

Інтеґрал не залежить від форми контура, тому при обчисленнях можна вважати, що $C = \mathbb{T}_\rho(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho\}$. Значення лишку може бути легко підраховано, якщо розкласти функцію в ряд Лорана: лишок функції $f(z)$ в скінченій точці a дорівнює коефіцієнту при $1/(z-a)$ в лоранівському розкладі $f(z)$ в околі a:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \tag{22.2}$$

Основні формули обчислення лишків в ізольованих особливих точках:

1) в усувній особливий точці, або точці аналітичності, лишок дорівнює нулеві.
2) в простому полюсі

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z); \tag{22.3}$$

Зокрема, нехай $f(z) = \phi(z)/\psi(z)$, де$\phi, \psi \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_\varepsilon(a))$, причому $\phi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$ та $\psi'(a) \neq 0$, тобто функція $f(z)$ має в a простий полюс, тоді

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{\phi(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(a)}{\psi'(a)}. \tag{22.4}$$

3) в полюсі n–го порядку

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \Big((z-a)^n f(z)\Big); \tag{22.5}$$

Зокрема, нехай $f(z) = \phi(z)/(z-a)^n$, де $\phi \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_\varepsilon(a))$, причому $\phi(a) \neq 0$, тоді

$$\operatorname*{res}_{z=a} \frac{\phi(z)}{(z-a)^n} = \frac{\phi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}; \tag{22.6}$$

4) в істотно особливій точці використовується формула (22.2)/
Лишком функції $f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ є число

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z, \tag{22.7}$$

де γ^- — коло $|z| = R$ досить великого радіуса, що обходиться за годинниковою стрілкою (так що окіл ∞ обходиться в додатному напрямку). З цього означення випливатиме, що

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}, \tag{22.8}$$

де c_{-1} — коефіцієнт при $1/z$ в розкладі функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі $a = \infty$. При обчисленні лишку на нескінченості буває корисним наступне співвідношення

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=0} \frac{f(1/z)}{z^2}. \tag{22.9}$$

Якщо точка $a = \infty$ є простим нулем функції, тобто $f(z) \sim \dfrac{A}{z} + o\left(z^{-1}\right)$, тоді $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -A$, якщо нескінченість — кратний нуль, тобто $f(z) \sim \dfrac{A}{z^n} + o\left(z^{-n}\right)$ при $n > 1$, тоді $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.

При обчисленні лишків також корисною є теорема Коші про повну суму лишків, згідно якою, якщо функція $f(z) \in \mathcal{A}\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup\limits_k z_k\right)$, де $k = \overline{1,n} < \infty$, тоді повна сума лишків рівна нулеві:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0. \tag{22.10}$$

§ 23. Приклади розв'язування задач

Приклад 23.1

Обчислити лишки в усіх особливих точках $z \in \mathbb{C}$ функції $f(z) = \operatorname{ctg} z$.

◀Представимо функцію $f(z)$ у вигляді $f(z) = \operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$. Особливим є нулі знаменника. Функція у знаменнику, $\sin z$ має в точках $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, прості нулі, отже $f(z)$ має в точках z_k прості полюси. Тоді за формулою

(22.4) отримаємо

$$\operatorname*{res}_{z=\pi k} \operatorname{ctg} z = \left.\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right|_{z=\pi k} = 1.$$

▶

Приклад 23.2

Обчислити лишки в усіх особливих точках $z \in \mathbb{C}$ функції $f(z) = \dfrac{1}{z\,(e^z - 1)}$.

◀Особливі точки функції $f(z)$ відповідають нулям знаменника. Це точка $z_0 = 0$ та точки z_k, які є розв'язками рівняння $e^z - 1 = 0$. Розв'яжемо це рівняння, яке перепишемо у вигляді $e^z = 1$. Логарифмуючи ліву і праву частини рівняння, матимемо $z_k = \operatorname{Ln} 1 = 2\pi k i$, де $k \in \mathbb{Z}$. Розв'язки рівняння $e^z - 1 = 0$ — прості нулі, отже при $k \neq 0$ функція $f(z)$ має прості полюси. При $z_0 = 0$ функція має двократний полюс. Обчислимо лишки формулою (22.4) отримаємо

$$\operatorname*{res}_{\substack{z_k \\ k\neq 0}} f(z) = \operatorname*{res}_{\substack{z_k \\ k\neq 0}} \frac{z^{-1}}{e^z - 1} \overset{(22.4)}{=} \left.\frac{z^{-1}}{(e^z - 1)'}\right|_{z=z_k} = \frac{z_k^{-1}}{e^{z_k}} = -\frac{i}{2\pi k},$$

$$\operatorname*{res}_{z_0=0} f(z) \overset{(22.5)}{=} \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(z^2 f(z)\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)' = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left(\frac{e^z - 1 - ze^z}{(e^z - 1)^2}\right) =$$

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{ze^z}{e^z - 1} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} -\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e^z + ze^z}{e^z} = -\frac{1}{2}.$$

▶

Приклад 23.3

Обчислити лишки в усіх особливих точках $z \in \mathbb{C}$ функції $f(z) = \dfrac{e^{z^3}}{z^{2n}}$, де $n \in \mathbb{N}$.

◀Особливі точки функції $f(z)$ відповідають нулям знаменника. Це точка $z_0 = 0$ — полюс кратності $2n$. За формулою (22.4) лишок можна обрахувати як $\operatorname*{res}_{z_0=0} f(z) = \left.\dfrac{\left(e^{z^3}\right)^{(2n-1)}}{(2n-1)!}\right|_{z=0}$. Однак, обчислення такої похідної може бути громіздким. Тому скористаємось іншим способом, а саме формулою (22.2). Для цього розкладемо функцію $f(z)$ в ряд Лорана в околі $z = 0$:

$$f(z) = \frac{e^{z^3}}{z^{2n}} = \frac{1}{z^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(z^3\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{3k-2n}}{k!}.$$

Лишок визначається коефіцієнтом c_{-1}, отже потрібно прирівняти степінь

$3k-2n$ до -1, звідки $k=\dfrac{2n-1}{3}$. Відповідно,

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=c_{-1}=\frac{1}{k!}=\frac{1}{\left(\frac{2n-1}{3}\right)!}, \qquad \text{якщо } \frac{2n-1}{3}\in\mathbb{N},$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=0, \qquad \text{якщо } \frac{2n-1}{3}\notin\mathbb{N}.$$

▶

Приклад 23.4

Обчислити лишок функції $f(z)=\frac{1}{z+2}\cos\frac{1}{z}$ на нескінченності.

◀Дослідимо поведінку функції $f(z)$ на нескінченості,

$$f(z)\asymp\frac{1}{z+2}\left(1-\frac{1}{2z^2}\right)\asymp\frac{1}{z},$$

звідки $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-1$. ▶

Приклад 23.5

Обчислити лишок функції $f(z)=z^2e^{1/z}$ на нескінченності.

◀Скористаємось формулою (22.9):

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-\operatorname*{res}_{z=0}\frac{f(1/z)}{z^2}=-\operatorname*{res}_{z=0}\frac{e^z}{z^4}\overset{(22.6)}{=}-\frac{(e^z)'''}{3!}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{6},$$

де було використано, що функція $\dfrac{e^z}{z^4}$ має в точці $z=0$ полюс четвертого порядку. ▶

Приклад 23.6

Обчислити лишки в усіх особливих точках $z\in\mathbb{C}$ та лишок на нескінченості для функції $f(z)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{10}(z-i)}$.

◀Особливі точки функції $f(z)$ відповідають особливій точці функції $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$, тобто $z_0=0$ та особливим точкам знаменника, тобто $z_0=0$ і $z_1=i$. Точка $z_0=0$ є істотно особливою точкою, тому що $\nexists\sin\infty$. Точка $z_1=i$ є простим полюсом. Обчислимо спочатку полюс в точці $z_2=i$,

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)\overset{(22.4)}{=}\lim_{z\to i}\left((z-i)\frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z^{10}(z-i)}\right)=\frac{\sin(-i)}{i^{10}}=i\operatorname{sh}1.$$

Дослідимо поведінку на нескінченості,

$$f(z) = \frac{1}{z^{12}} + o\left(z^{-12}\right),$$

тому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

Для обчислення лишку в точці $z = 0$ простіше за все скористатись теоремою про повну суму лишків, (22.10), звідки

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right) = -i \operatorname{sh} 1.$$

▶

§ 24. Завдання для аудиторної роботи

321. Обчислити лишки в усіх особливих точках $z \in \mathbb{C}$ та лишок на нескінченості для функції $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - \frac{\pi}{4}}$.

322. Обчислити лишки в усіх особливих точках $z \in \mathbb{C}$ та лишок на нескінченості для функції $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$.

323. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=1} \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$.

324. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\exp(z^2)}{z^{2n+1}}$.

325. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=\infty} e^{1/z}$.

326. Обчислити $\operatorname*{res}_{z=\infty} z \cos^2(\pi/z)$.

327. $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{1}{2}z^2}$.

328. Обчислити лишки в усіх особливих точках $z \in \mathbb{C}$ та лишок на нескінченості для функції $f(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{z}\right)}{(z-1)^3(z-3)}$.

§ 25. Завдання для самостійної роботи

У прикладах 329–345 обчислити лишок функції в зазначеній точці.

329. $\operatorname*{res}_{z=1} z \exp\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$.

330. $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^2 \sin(\pi/z)$.

331. $\operatorname*{res}_{z=\infty} z^n \exp(a/z)$, де $a \in \mathbb{C}$.

332. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{\sin z}{z^2}$.

333. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{z^4+1}{z^6-1}$.

334. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \cos\pi\left(\dfrac{z+2}{2z}\right)$.

335. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{\sin(1/z)}{z-1}$.

336. $\operatorname*{res}_{z=\infty} \dfrac{\cos^2(\pi/z)}{z+1}$.

337. $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{z^{n-1}}{\sin^n z}$, де $n \in \mathbb{N}$.

338. $\operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\sin 3z - 3\sin z}{\sin z(\sin z - z)}$.

339. $\operatorname{res}\limits_{z=0} \dfrac{\operatorname{tg} z - z}{(1-\cos z)^2}$.

340. $\operatorname{res}\limits_{z=0} \dfrac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z}$, де $n \in \mathbb{N}$.

341. $\operatorname{res}\limits_{z=0} \dfrac{z^{n-3}}{\operatorname{tg}^n z}$, де $n \in \mathbb{Z}$ та $n \neq 0$.

342. $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} \ln \dfrac{z-1}{z+1}$.

343. $\operatorname{res}\limits_{z=1}(z+1)^3 \exp \dfrac{1}{z-1}$.

344. $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} e^z \ln \dfrac{z-\alpha}{z-\beta}$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

345. $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} \dfrac{(z^{10}+1)\cos(1/z)}{(z^5+2)(z^6-1)}$.

У прикладах 346–366 обчислити лишки функції $f(z)$ в усіх особливих точках $z \in \mathbb{C}$ і лишок на нескінченості.

346. $f(z) = \dfrac{1}{\sin(z^2)}$.

347. $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$.

348. $f(z) = \dfrac{1}{e^z+1}$.

349. $f(z) = \dfrac{\cos \frac{\pi z}{2}}{(z-1)^2}$.

350. $f(z) = \dfrac{z^2-1}{(z^2+1)^3}$.

351. $f(z) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z(z+1)}$.

352. $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(z-1)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

353. $f(z) = \operatorname{cth}^2(\pi z)$.

354. $f(z) = \dfrac{1}{z+z^3}$.

355. $f(z) = \operatorname{th} z$.

356. $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$.

357. $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^3}$.

358. $f(z) = \operatorname{ctg} \pi z$.

359. $f(z) = \dfrac{1}{z^6(z-2)}$.

360. $f(z) = \dfrac{1+z^8}{z^6(z+2)}$.

361. $f(z) = \dfrac{1+z^{10}}{z^6(z^2+4)}$.

362. $f(z) = \dfrac{1+z^{2n}}{z^n(z-a)}$, де $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ та $a, n \neq 0$.

363. $f(z) = (\sin z)(\sin(1/z))$.

364. $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2+1)^2}$.

365. $f(z) = \dfrac{1+z^8}{z^4(z^4+1)} \cos z \operatorname{ch} z$.

366. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2+1)^2}$.

Тема 7

Обчислення інтегралів по замкнених контурах за допомогою лишків

В цій темі розглядається застосування теорії лишків для обчислення контурних інтегралів. Це стає можливим завдяки теореми про лишки, яка дозволяє звести обчислення глобальної величини, тобто інтеґралу від аналітичної функції вздовж межі області, до обчислення локальних характеристик — лишків цієї функції в особливих точках, що знаходяться всередині області.

§ 26. Теоретичні відомості

Застосування лишків базується на теоремі про лишки: нехай функція $f(z) \in \mathscr{A}\left(D \setminus \bigcup_k z_k\right)$, де $k = \overline{1,n} < \infty$. Тоді

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{\substack{z=z_k \\ z_k \in D}} f(z).$$

Часто замість обчислення лишків всередині області буває зручнішим обчислити лишків зовні, використовуючи теорему про повну суму лишків (22.10).

§ 27. Приклади розв'язування задач

Приклад 27.1

Обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^3}\mathrm{d}z.$$

◀В крузі $|z| < 2$ є лише одна особлива точка $z = 0$ — це полюс третього порядку. За формулою (22.6) маємо,

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\cos(z)}{z^3} = \frac{(\cos z)''\big|_{z=0}}{2!} = -\frac{1}{2},$$

звідки $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \dfrac{\cos(z)}{z^3} = -\pi i.$ ▶

Приклад 27.2

Обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_{|z|=4} \frac{\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z-2}\mathrm{d}z.$$

◀В крузі $|z| < 4$ функція $f(z) = \dfrac{\exp\left(\frac{1}{z-1}\right)}{z-2}$ містить дві особливі точки: $z = 1$ та $z = 2$. Тому $I = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=2} f(z)\right)$. Але можливо розв'язок спростити, якщо пригадати теорему про повну суму лишків (22.10). Тому $I = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$. Точка $z = \infty$ є простим нулем функції $f(z) \asymp 1/z$, отже $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$, звідки $I = 2\pi i$. ▶

Приклад 27.3

Обчислити інтеграл

$$I = \int\limits_{\partial D} \frac{z-1}{(z-2)^7(z-4)}\mathrm{d}z$$

вздовж межі області D, якщо

1) $D = \mathbb{D}$.
2) $D = \mathbb{D}_1(4)$.
3) $D = \mathbb{D}_5(0)$.
4) $D = \mathbb{D}_1(2)$.
5) $D = \mathbb{D}_3(0)$.

◀Функція $w = f(z) = \dfrac{z-1}{(z-2)^7(z-4)}$ має два полюси: точка $z_1 = 4$ є полюсом сьомого порядку, точка $z_2 = 2$ — простим полюсом (першого порядку), тому що знаменник в точці z_1 має простий нуль, в точці z_2 — 7-кратним нуль.

1) Обидві особливі точки $z_1, z_2 \notin D$, за теоремою Коші $I = 0$.

2) Особлива точка $z_1 \in D$, а точка $z_2 \notin D$. Обчислимо лишок

$$\operatorname*{res}_{z=4} f(z) = \operatorname*{res}_{z=4} \frac{(z-1)(z-2)^{-7}}{z-4} \overset{(22.4)}{=} \frac{3}{128},$$

звідки $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=4} f(z) = \dfrac{3i\pi}{64}$.

3) Обидві особливі точки $z_1, z_2 \in D$. Зовні області D особливих точок не має, отже

$$I = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=2} f(z) + \operatorname*{res}_{z=4} f(z)\right) = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z).$$

На нескінченості функція має кратний нуль, $f(z) \asymp 1/z^8$, отже $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Таким чином, $I = 0$.

4) Особлива точка $z_2 \in D$, а точка $z_1 \notin D$. Обчислимо лишок

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) - \operatorname*{res}_{z=4} f(z) = -\frac{3}{128},$$

звідки $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -\dfrac{3i\pi}{64}$.

5) Особлива точка $z_2 \in D$, а точка $z_1 \notin D$. Аналогічно попередньому випадку, $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=2} f(z) = -\dfrac{3i\pi}{64}$.

▶

§ 28. Завдання для аудиторної роботи

367. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int_{\partial D} \frac{\mathrm{d}z}{z^4 - 16}$ вздовж межі області D, якщо

1) $D = \mathbb{D}$.
2) $D = \mathbb{D}_1(2)$.
3) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1\}$.
4) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < -1/2\}$.

368. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int_{\partial D} \frac{z^2 \mathrm{d}z}{\sin \pi z - \frac{1}{2}}$ вздовж межі області $D = \{z \,:\, \operatorname{Re} z > 0, |z| < 2\}$.

369. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int_{\partial D} \frac{e^{1/z} \mathrm{d}z}{(z^2-1)^2(z-3)}$ вздовж межі області $D = \mathscr{R}(z, 2, 4)$.

370. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int_{\mathbb{T}_2(0)} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^{10} - 2)}$.

371. Обчислити інтеграл $I = \displaystyle\int_{\partial D} z \cos\left(\frac{z}{z+1}\right) \mathrm{d}z$ вздовж межі області $D = \{z : |z| > 2\}$.

§ 29. Завдання для самостійної роботи

У прикладах 372–408 обчислити інтеграл I вздовж межі області D.

372. $I = \displaystyle\int_{\partial D} \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$, область $D = \{z : |z - 1 - i| < 2\}$.

373. $I = \displaystyle\int_{\partial D} \operatorname{tg} z \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |\operatorname{Re} z| < \pi, |\operatorname{Im} z| < 1, \}$.

374. $I = \displaystyle\int_{\partial D} \exp\left(\frac{1}{1-z}\right) \frac{\mathrm{d}z}{z}$, область $D = \{z : |z-2| + |z+2| < 6\}$.

375. $I = \int\limits_{\partial D} \ln \dfrac{z+1}{z-1} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 2\}$.

376. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z\mathrm{d}z}{\cos \pi z + 1}$, область $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z| < 5/2\}$.

377. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin z}{(z+1)^3} \mathrm{d}z$, область $D = \left\{x, y : x^{2/3} + y^{2/3} < 2^{2/3}\right\}$.

378. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2 + i}$, область $D = \{z : |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$.

379. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z}{z+3} \exp\left(\dfrac{1}{3z}\right) \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 4\}$.

380. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z\mathrm{d}z}{z^4 + 5z^2 + 4}$, область $D = \{z : |z| > 1/8, |z| < 8\}$.

381. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^3}{z+1} \exp\left(\dfrac{1}{z}\right) \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 2\}$.

382. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{(z+1)^2 \mathrm{d}z}{(\sin \pi z)^3}$, область $D = \{z : |z+1| < 1/2\}$.

383. $I = \int\limits_{\partial D} z \sin^2(1/z) \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 1/3\}$.

384. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^3 \mathrm{d}z}{z^4 - 1}$, область $D = \{z : |z| < 2\}$.

385. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin^2 z}{z^5} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 7\}$.

386. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^2 \sin^2(1/z)}{(z-1)(z-2)} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 3\}$.

387. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{z^3(2z^5 - 64i)}$, область $D = \{z \ : \ \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, |z| < 2\}$.

388. $I = \int\limits_{\partial D} \sin \dfrac{z}{z+1} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 3\}$.

389. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{(z^2+1)\mathrm{d}z}{(z+i)^2}$, область $D = \{z : |z| < 3/2\}$.

390. $I = \int\limits_{\partial D} z \sin \dfrac{z+1}{z-1} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 2\}$.

391. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{(z^2 - 4z + 5)^2}$, область $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, |z| < 5\}$.

392. $I = \int\limits_{\partial D} \sin\left(\dfrac{1}{z-1}\right) \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z-1| > 1\}$.

393. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^2}{(z^2 + a^2)^3} \mathrm{d}z$, де $a > 0$, область $D = \{z \ : \ \operatorname{Im} z < 0, |z| < 3a\}$.

394. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{2z - 3}{(z^2 + \beta^2)^2} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : -1 < \operatorname{Re} z < 2, 0 < \operatorname{Im} z < 2\beta\}$.

395. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{(z^2 + 2z + 10)^2}$, область $D = \{z : |z| > 4\}$.

396. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\sin z}{(z^3 - z)(z - i)} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z-1| < 1\}$.

397. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{2z^2 + 4z - 1}{z^3(z^2 + i)^2} \mathrm{d}z$, область $D = \{\operatorname{Re} z > -1/2, \operatorname{Im} z > -1, |z| < 5\}$.

398. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\operatorname{ctg} z}{z} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 1\}$.

399. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\cos^2 z}{z(1 - z + z^2)^2}$, область $D = \{z : |z| < 3\}$.

400. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{e^{\pi z}}{2z^2 - i} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$.

401. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{1}{z^2 - 2iz - 2} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 5\}$.

402. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z}{e^{z^2} - 1} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| > 4\}$.

403. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z \sin z}{z^2 + 9i} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 4\}$.

404. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^3}{e^{z^2} - 1} \mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 4\}$.

405. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{e^{2z}}{i - 8z^3}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z| < 1\}$.

406. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\mathrm{d}z}{125i + z^3}$, область $D = \{z : \mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0, 4 < |z| < 7\}$.

407. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{z^2\mathrm{d}z}{e^{i2\pi z^2} - 1}$, область $D = \left\{z : |z| < [n + (1/2)]^{1/2}\right\}$, де $n \in \mathbb{Z}_+$.

408. $I = \int\limits_{\partial D} \dfrac{\cos z}{\ln z + i\pi}\mathrm{d}z$, область $D = \{z : |z + 1| < 1/2\}$.

Тема 8

Обчислення визначених інтеґралів дійсного аналізу за допомогою теорії лишків

За допомогою теорії лишків вдається обчислити багато визначених інтеґралів дійсного аналізу. Основна ідея полягає в тому, щоб звести інтеґрал від функції дійсної змінної до обчислювання контурного інтеґрала. Для цього замикають межі інтегрування кривою, що лежить у $\overline{\mathbb{C}}$-площині та аналітично продовжують дійсну функцію на отриману область. Якщо інтеґрал уздовж кривої вдається обчислити, або виразити через шуканий, то задача зведеться до обчислення лишків особливих точок аналітичного продовження. Зокрема, якщо особливі точки є полюсами, то обчислення інтеґрала зведеться до обчислення похідних.

§ 30. Теоретичні відомості

Ми розглянемо найпростіші типи інтеґралів.

1) Інтеґрали від тригонометричних функцій $\boldsymbol{I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos, \sin)\mathrm{d}\varphi}$, де $R(x, y)$ — раціональна функція. Для обчислення інтеґрала потрібно звести його до контурного інтеґрала. Для цього покладемо $z = e^{i\varphi}$. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),\ \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),\ \mathrm{d}\varphi = -i\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

інтеґрування по φ від 0 до 2π зведеться до інтеґрування по комплексній змінній z вздовж кола $|z| = 1$ в додатному напрямку. Отже інтеґрал зведеться до контурного інтеґрала, який обчислимо за теоремою про лишкі:

$$I = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = 2\pi \sum_{z_k \in \mathbb{D}} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi \sum_{z_k \notin \mathbb{D}} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{30.1}$$
$$f(z) = \frac{1}{z} R\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right].$$

2) Невласні інтеґрали $\boldsymbol{I = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x}$, де функція $f(z)$ — мероморфна на верхній півплощині, $f(z) \in \mathscr{M}(\mathbb{C}_+)$. Тоді для обчислення інтеґрала можна замкнути контур уздовж півкола $C_R = \{z \in \mathbb{C}_+ : |z| = R\}$ при $R \to \infty$ і обчислити інтеґрал уздовж замкненого контуру за теоремою про лишкі. Для цього функція $f(z)$ повинна містити лише скінчену кількість полюсів, не мати особливих точок на дійсній осі та задовольняти асимптотичну

умову $f(z) = o\,(1/z)$ при $z \to \infty$. Тоді шуканий інтеґрал

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{C}_+} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{30.2}$$

Зокрема, якщо функція $f(z)$ — це раціональна функція та інтеґрал від цієї функції є збіжним, то він визначається за формулою (30.2).

Аналогічно, якщо $f(z) \in \mathscr{M}(\mathbb{C}_-)$, містить лише скінчену кількість полюсів, не має особливих точок на дійсній осі та задовольняє асимптотичну умову $f(z) = o\,(1/z)$ при $z \to \infty$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{C}_-} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{30.3}$$

У випадку, коли підінтеґральна функція має має полюси на дійсній осі, інтеґрал розбігається. Однак, в цьому випадку може збігатися його *головне значення* в сенсі Коші:

$$I = \fint_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x \equiv \operatorname{Vp} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Delta_\infty(\varepsilon)} f(x)\mathrm{d}x, \tag{30.4}$$

де $\Delta_\infty(\varepsilon) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_k \mathbb{D}_\varepsilon(x_k)$ — дійсна вісь з виколотими полюсами x_k. Для обчислення інтеґрала (30.4) можна узагальнити формулу (30.2):

$$\fint_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{C}_+} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \pi i \sum_{x_k \in \mathbb{R}} \operatorname*{res}_{z=x_k} f(z), \tag{30.5}$$

3) Невласні інтеґрали типу Фур'є $\boldsymbol{I = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} \mathrm{d}x}$, де функція $f(z)$ — мероморфна на верхній півплощині. Аналогічно до попереднього випадку, для обчислення інтеґрала можна замкнути контур уздовж півкола C_R при $R \to \infty$ і обчислити інтеґрал уздовж замкненого контуру за теоремою про лишкі. Для цього функція $f(z) \in \mathscr{M}(\mathbb{C}_+) \bigcap \mathscr{C}\left(\overline{\mathbb{C}}_+\right)$, вона також повинна повинна містити лише скінчену кількість полюсів, не мати особливих точок на дійсній осі та задовольняти асимптотичну умову $f(z) = o(1)$ при $z \to \infty$ та $\operatorname{Im} z \geq 0$. Тоді шуканий інтеґрал

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} \mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{C}_+} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{ikz} \right], \text{ де } k > 0. \tag{30.6}$$

Аналогічно, якщо функція $f(z) \in \mathscr{M}(\mathbb{C}_-) \bigcap \mathscr{C}\left(\overline{\mathbb{C}}_-\right)$, містить лише скінчену кількість полюсів, не має особливих точок на дійсної осі та задовольняє асимптотичну умову $f(z) = o(1)$ при $z \to \infty$ та $\operatorname{Im} z \leq 0$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{ikx} \mathrm{d}x = -2\pi i \sum_{z_k \in \mathbb{C}_-} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left[f(z) e^{ikz} \right], \text{ де } k < 0. \tag{30.7}$$

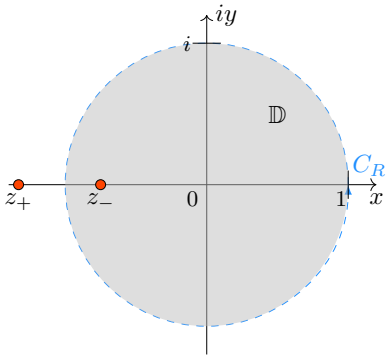


Рис. 25: До прикладу 31.1.

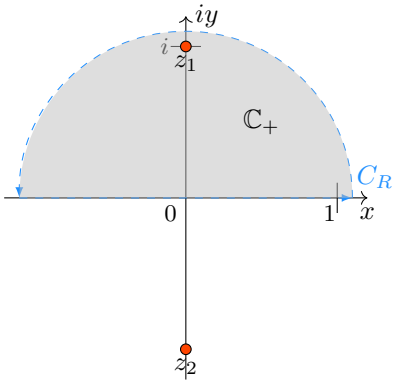


Рис. 26: До прикладу 31.2.

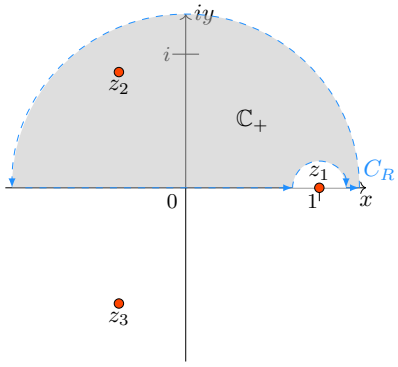


Рис. 27: До прикладу 31.3.

§ 31. Приклади розв'язування задач

Приклад 31.1

За допомогою теорії лишків обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1 + a\cos\varphi}, \quad a \in (0,1).$$

◀Для зведення шуканого інтеґрала до контурного введемо комплексну змінну $z = e^{i\varphi}$. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),\ \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),\ \mathrm{d}\varphi = -i\frac{\mathrm{d}z}{z},$$

інтеґрування за φ від 0 до 2π зведеться до інтегрування за комплексною змінною z вздовж кола $|z| = 1$ в додатному напрямку. Отже інтеґрал зведеться до контурного інтеґрала

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{1}{1 + \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}(-i)\frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\limits_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z,$$

$$f(z) = -\frac{2i}{a}\frac{1}{z^2 + \frac{2}{a}z + 1} = -\frac{2i}{a}\frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)},$$

де полюс z_+ знаходиться зовні кола $|z| = 1$, а полюс z_- всередині (див. рис. 25), тому що за теоремою Вієта $z_+ z_- = 1$,

$$z_\pm = -\frac{1}{a} \mp \sqrt{\frac{1}{a^2} - 1}.$$

Таким чином

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_-}\left(-\frac{2i}{a}\frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)}\right) = \frac{4\pi}{a(z_- - z_+)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

▶

Приклад 31.2

За допомогою теорії лишків обчислити інтеґрал

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^4}.$$

◀Шуканий інтеграл є невласним інтегралом I роду. Аналітичне продовження підінтегральної функції на комплексну площину, функція

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4} = \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^4}$$

має дві особливих точки: $z_1 = i$ та $z_2 = -i$. В верхній півплощині знаходиться лише одна особлива точка — полюс 4-го порядку $z_1 = i$, див. рис. 26. Функція $f(x)$ є раціональною, причому інтеграл від неї є збіжним, тому вона задовольняє умови застосовності формули (30.2). Лишок в точці $z = i$ за формулою (22.6)

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{3!}\left[\frac{1}{(z+i)^4}\right]^{(3)}_{z=i} = \frac{1}{3!}\frac{(-4)(-5)(-6)}{(2i)^7} = -\frac{5i}{32}.$$

Отже $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} f(z) = 5\pi/16$. ▶

Приклад 31.3

За допомогою теорії лишків обчислити інтеґрал

$$I = \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}.$$

◀Шуканий інтеграл є невласним інтегралом II роду. Аналітичне продовження підінтегральної функції на комплексну площину, функція

$$f(z) = \frac{1}{z^3-1} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}$$

має три простих полюси в точках $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ і $z_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Окрім того, $f(z)$ має асимптотичну поведінку $f(z) \asymp 1/z^3$ при $z \to \infty$, тобто задовольняє умови застосовності формули (30.5). Особлива точка z_2 знаходиться на верхній півплощині, точка z_1 — на дійсній осі, див. рис. 27. Обчислимо лишки в цих точках за формулою (22.4),

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{3z_k^2} = \frac{z_k}{3z_k^3} = \left|z_k^3 = 1\right| = \frac{z_k}{3},$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{3}, \qquad \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{6}.$$

Згідно з (30.5),

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) + \pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \frac{-1+i\sqrt{3}}{6} + \pi i \frac{1}{3} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

▶

Приклад 31.4

За допомогою теорії лишків обчислити інтеґрал

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos kx}{x^2+\alpha^2} \mathrm{d}x, \quad k, \alpha > 0.$$

◀Використовуючи формулу Ейлера у вигляді $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$, яка завжди справджується при дійсних x, перепишемо шуканий інтеграл у вигляді

$$I = \operatorname{Re} I_1, \quad I_1 = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} f(x) \mathrm{d}x, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+\alpha^2}.$$

Інтеграл I_1 є невласним інтегралом типу інтеграла Фур'є. Аналітичне продовження підінтегральної функції на комплексну площину, функція $f(z)$ задовольняє умови застосовності формули (30.6) та має в верхній півплощині єдину особливу точку $z = i\alpha$ — простий полюс. Лишок в цій точці за формулою (22.4),

$$\operatorname*{res}_{z=i\alpha} f(z) = \frac{e^{-k\alpha}}{2i\alpha}.$$

Отже $I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i\alpha} f(z) = \frac{\pi}{\alpha} \exp(-k\alpha)$. ▶

§ 32. Завдання для аудиторної роботи

У прикладах (409)–(417) за допомогою теорії лишків обчислити інтеґрал.

409. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{13+12\sin\varphi}$.

410. $I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$, де $0 < b < a$.

411. $I = \int_0^{\pi} \operatorname{ctg}(\varphi - ia)\mathrm{d}\varphi$, де $a > 0$.

412. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+5x^2+5}\mathrm{d}x$.

413. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$.

414. $I = \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x-1)}$.

415. $I = \int\limits_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$, де $a > 0$.

416. $I = \int\limits_0^\infty \frac{\cos x \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$, де $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$.

417. $I = \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \frac{z \operatorname{ch} z}{(z+1)(z+2)}\mathrm{d}z$.

§ 33. Завдання для самостійної роботи

У прикладах (418)–(523) за допомогою теорії лишків обчислити інтеґрал.

418. $\int\limits_0^\pi \frac{\cos^4\varphi}{1+\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

419. $\int\limits_0^\pi \frac{\cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi}{1-a\sin^2\varphi}$, $0 < a < 1$.

420. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)(x^2+a^2)^2}$, де $a > 0$.

421. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$, де $a > 0$, $b > 0$.

422. $I = \oint\limits_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$.

423. $I = \oint\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^2+2}{x^4+2x^2-3}\mathrm{d}x$.

424. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x}{x^2+2x+10}\mathrm{d}x$.

425. $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2+b^2}\mathrm{d}x$, де $a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$.

426. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}\mathrm{d}x}{(x^2+4ix-5)^3}$.

427. $\int\limits_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{z\cos zt}{(z+1)^2}\mathrm{d}z$, де $t > 0$.

428. $\int\limits_{-\pi}^\pi \frac{\mathrm{d}\varphi}{5+3\cos\varphi}$.

429. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi}{13+12\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$.

430. $\int\limits_0^\pi e^{2i\varphi}\operatorname{ctg}(\varphi-ia)\mathrm{d}\varphi$, де $a > 0$.

431. $\int\limits_{-\pi}^\pi \frac{\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $a > 1$.

432. $\int\limits_{-\pi}^\pi \frac{\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $-1 < a < 1$.

433. $\int\limits_{-\pi}^\pi \frac{\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $a = 1$.

434. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{a+\sin\varphi}$, де $a > 1$.

435. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{a+\sin^2\varphi}$, де $0 < a < 1$.

436. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $-1<a<1$.

437. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, де $-1<a<1$, $n\in\mathbb{Z}_+$.

438. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\varphi}{1-2a\sin\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$, де $-1<a<1$, $n\in\mathbb{N}$.

439. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(1+2\cos\varphi)^n}{5+4\cos\varphi}\cos n\varphi \mathrm{d}\varphi$, де $n\in\mathbb{Z}_+$.

440. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos^2\varphi-\cos^2 a}{\sin\varphi-\sin a}\right)^n e^{in\varphi}\mathrm{d}\varphi$, де $0<a<\pi/2$, $n\in\mathbb{N}$.

441. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}\mathrm{d}\varphi$, де $0<p<1$.

442. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$ де $|a|<1$.

443. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$ де $|a|>1$.

444. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 3\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\mathrm{d}\varphi$ де $|a|=1$.

445. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1+a\cos\varphi}$, де $|a|<1$.

446. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2}$, де $0<b<a$.

447. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos^2\varphi)^2}$, де $0<b<a$.

448. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}\mathrm{d}\varphi$, де $|p|<1$.

449. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}\mathrm{d}\varphi$, де $|p|>1$.

450. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 2\varphi}{1-2p\cos 2\varphi+p^2}\mathrm{d}\varphi$, де $|p|=1$.

451. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a+b\cos\varphi)^3}$, де $0<b<a$.

452. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi}{a+b\cos\varphi}$, де $0<b<a$.

453. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\sin 2\varphi \mathrm{d}\varphi}{a\cos\varphi+b}$, де $0<a<b$.

454. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi}{1-a\sin^2\varphi}$, $0<a<1$.

455. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^3}$, де $\Delta=p^2-4q<0$.

456. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{x^6+i}\mathrm{d}x$.

457. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$, де $a>0$, $b>0$.

458. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3(x^2+b^2)}$, де $a>$

0, $b > 0$.

459. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\mathrm{d}x}{x^4+3x^2+2}$.

460. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)x}{x^4-2x^2+2}\mathrm{d}x$.

461. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, де $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

462. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+1)^2}{(x^2+2x+10)^3}\mathrm{d}x$.

463. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+px^2+q}$, де $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

464. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2ix-2)^3}$.

465. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3+1}{(x^6+i64)^2}\mathrm{d}x$.

466. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(ax^4+bx^2+c)^2}$, де $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

467. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-2ix^2-2)^3}$.

468. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-i)^3}$.

469. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{x^4-1+i}\mathrm{d}x$.

470. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+1}{x^6-1+i}\mathrm{d}x$.

471. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4-2x^2+2)^3}$.

472. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3-i}$.

473. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+6x^2+25)^2}$.

474. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2+3}{x^4+2x^2+10}\mathrm{d}x$.

475. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^4+1+i)^2}$.

476. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1-5x^2\mathrm{d}x}{(x^4+1-i)^3}$.

477. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x$, де $a > 0$.

478. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+9)}\mathrm{d}x$.

479. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2ix-2}$.

480. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

481. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$.

482. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+6x^2+25}$.

483. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\mathrm{d}x$.

484. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2-4ix-5)^2}$.

485. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}$, де $a>0$.

486. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^6 \mathrm{d}x}{(x^4+a^4)^2}$, де $a>0$.

487. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2ix-a^2)^3}$, де $a>0$.

488. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^4 \mathrm{d}x}{(a+bx^2)^4}$, де $a>0$, $b>0$.

489. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2i\alpha x-\alpha^2-\beta^2)^n}$, де $\alpha>0$, $\beta>0$, $n\in\mathbb{N}$.

490. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^n}$, де $a>0$, $b>0$, $n\in\mathbb{N}$.

491. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x+1)^3}{(x^4+8x^2+16)^2}\mathrm{d}x$.

492. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-1}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$, де $p,q\in\mathbb{R}$, $D=p^2-4q<0$.

493. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

494. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+i)(x^2+4ix-5)^2}$.

495. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-i)^2}$.

496. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+2)^3}$.

497. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+9i)^3}$.

498. $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(2x-5)\mathrm{d}x}{\left[x^2-(1-i)x+(2+i)\right]^2}$.

499. $I=\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+2)\mathrm{d}x}{(x^4+16)(x^2-2ix-2)}$.

500. $I=\oint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$.

501. $I=\oint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^5-1}$.

502. $I=\oint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)(x-1)}$.

503. $I=\oint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4-1}\mathrm{d}x$.

504. $I=\oint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+4}{x^4+4x^2-12}\mathrm{d}x$.

505. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$, де $a>0$.

506. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^3+13x}{x^4+13x^2+36}\sin x\mathrm{d}x$.

507. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$, де $a>0$.

508. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}\mathrm{d}x$, де $\operatorname{Re} a>0$.

509. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} \mathrm{d}x.$

510. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} \mathrm{d}x,$ де $a > 0,$ $\operatorname{Re} b > 0.$

511. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} \mathrm{d}x,$ де $a > 0.$

512. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} \mathrm{d}x.$

513. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 2x}{x^2 - 4x + 5} \mathrm{d}x.$

514. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} \mathrm{d}x.$

515. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} \mathrm{d}x.$

516. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 - 2ix - 2)^2} \mathrm{d}x.$

517. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^4 + 8x^2 + 16} \mathrm{d}x.$

518. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} \mathrm{d}x}{x^2 - 2ix - 2}.$

519. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}}{x^2 - 2x + 2} \mathrm{d}x.$

520. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(ax^2 + bx + c)^3} \mathrm{d}x,$ де $a, b, c \in \mathbb{R},$ $D = b^2 - 4ac < 0.$

521. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-3)e^{ix} \mathrm{d}x}{x^2 - 6x + 109}.$

522. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2 - 2x + 5} \mathrm{d}x.$

523. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2x \sin 2x}{x^4 - 2x^2 + 5} \mathrm{d}x.$

Тема 9

Конформні відображення елементарними функціями

Конформні відображення виникають відразу, коли згадують про геометричний зміст аналітичних функцій. Деякі найпростіші конформні відображення, такі як перетворенням Мебіуса, мають чудові властивості зберігати форму кругових областей. У цій темі розглядається деякі елементарні властивості конформних відображень. Увагу приділяється, перш за все, перетворенням Мебіуса і конформним відображенням, що здійснюються елементарними функціями.

§ 34. Теоретичні відомості

Поняття конформного відображення наводилось раніше в §9. Нагадаємо, що невироджене та однолисте відображення є конформним в області, якщо функція, що здійснює це відображення є аналітичною в цій області. При дослідженні конформних відображень будемо використовувати принцип відповідності меж, згідно з яким, якщо $f(z)$ здійснює конформне відображення однозначної області D із жордановою межею ∂D на однозв'язну область D' із жордановою межею $\partial D'$, то $f(z)$ є неперервною на замкнутій області $\overline{D}$ та взаємнооднозначно відображає $\partial D \to \partial D'$.

Важливим прикладом конформних відображень є перетворення Мебіуса, що здійснюється дробово-лінійною функцією (5.8):

$$w = \sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C},\ c \neq 0.$$

Основні властивості перетворення Мебіуса:

1) **Конформна властивість** $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$: Перетворення Мебіуса здійснює конформне відображення розширеної комплексної площини на себе. Це — єдиний клас перетворень, що конформно відображують $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$;
2) **Групова властивість**: Сукупність перетвореннь Мебіуса утворює групу, тобто композиція двох перетворень Мебіуса є перетворенням Мебіуса та перетворення, обернене до перетворення Мебіуса, є також перетворенням Мебіуса;
3) **Кругова властивість**: Перетворення Мебіуса відображає круг розширеної комплексної площини на круг розширеної комплексної площини. При цьому точки, симетричні відносно кола відрображаються на точки, симетричні відносно кола.

При формулюванні кругової властивості під терміном круг розширеної комплексної площини розуміють внутрішню частину кола, або його зовнішню частину, або півплощину. Відповідно, коло розширеної комплексної площини — це коло, або пряма. Точки z і $z^\star$ називають симетричними відносно кола $\mathbb{T}_R(z_0) = \{z\ :\ |z-z_0| = R\}$, якщо вони пов'язані між собою операці-

єю *інверсії*:

$$z^\star := z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}}, \tag{34.1}$$

де z_0 — центр кола, R — його радіус.

Визначення перетворення Мебіуса за трьома точками: перетворення Мебіуса площини z на площину w, що переводить точки z_1, z_2, z_3 в w_1, w_2 та w_3 має вигляд:

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}. \tag{34.2}$$

Перетворення Мебіуса, при якому $z_1 \mapsto 0$, $z_3 \mapsto \infty$ має вигляд

$$w = A\frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad \text{де } A \in \mathbb{C}. \tag{34.3}$$

§ 35. Приклади розв'язування задач

Приклад 35.1

Знайти перетворення Мебіуса комплексної площини z на площину w, що переводить точки $1 \mapsto 0$, $i \mapsto i$, $-1 \mapsto -i$.

◀Перетворення Мебіуса за трьома точками визначається згідно (34.2):

$$\frac{w - 0}{w + i} \cdot \frac{i + i}{i - 0} = \frac{z - 1}{z + 1} \cdot \frac{i + 1}{i - 1},$$

звідки остаточно матимемо $w = \dfrac{z - 1}{2 - i - (2 + i)z}$. ▶

Приклад 35.2

Знайти перетворення Мебіуса комплексної площини z на площину w, що переводить точки $1 \mapsto 1$, $i \mapsto 0$, $\infty \mapsto \infty$.

◀В цьому виродженому випадку зручніше скористатися явним виглядом перетворення Мебіуса (5.8), $w = \sigma(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$. Підставивши граничне значення на нескінченості, $\sigma(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{az + b}{cz + d} = \dfrac{a}{c} = \infty$, відразу отримаємо, що $c = 0$, отже маємо лінійне перетворення, в якому можемо перепозначити сталі,

$$w = \sigma(z) = \alpha z + \beta. \tag{35.1}$$

Використовуючи задані відповідності, отримаємо $\sigma(i) = \alpha i + \beta = 0$, звідки $\beta = -i\alpha$, тому $\sigma(z) = \alpha(z - i)$. Підставивши третю точку, маємо $\sigma(1) = \alpha(1 - i) = 1$, звідки $\alpha = \dfrac{1}{1 - i} = \dfrac{1 + i}{2}$. Остаточно, матимемо,

$w = \dfrac{1+i}{2}(z-i)$. ▶

Приклад 35.3

Знайти загальний вигляд конформного відображення одиничного круга $\mathbb{D}$ на одиничний круг $\mathbb{D}$, при якому $z_0 \mapsto w_0 = 0$.

◀Згідно з конформною властивістю перетворень Мебіуса, можемо стверджувати, що шукане перетворення здійснюється саме перетворенням Мебіуса. Накладемо умову, щоб наперед задана точка z_0 з z-площини відображалась на центр круга w-площини. Згідно з круговою властивістю, перетворення Мебіуса відображає точки, симетричні відносно кола на z-площині, на точки, симетричні відносно кола на w-площині. Тому це перетворення повинно відобразити $z_0 \mapsto 0$, а симетричну точку $z_0^\star = 1/\overline{z_0} \mapsto w_0^\star = \infty$. Згідно з (34.3), таке перетворення має вигляд

$$\sigma(z) = A\frac{z-z_0}{z-\frac{1}{\overline{z_0}}} = \widetilde{A}\frac{z-z_0}{1-z\overline{z_0}}.$$

Константа $\widetilde{A}$ знаходиться з умов, щоб круг на w площині був також одиничним. Якщо на колі $|z|=1$ ввести полярні координати $z = e^{i\varphi}$, то

$$1 = |w| = \left|\widetilde{A}\frac{e^{i\varphi}-z_0}{1-e^{i\varphi}\overline{z_0}}\right| = |\widetilde{A}|\frac{\left|e^{i\varphi}-z_0\right|}{\left|e^{i\varphi}\right|\left|e^{-i\varphi}-\overline{z_0}\right|}.$$

Однак $\left|e^{i\varphi}-z_0\right| = \left|\overline{e^{i\varphi}-z_0}\right| = \left|e^{-i\varphi}-\overline{z_0}\right|$, звідки $|\widetilde{A}| = 1$. Отже, приходимо до наступного висновку: перетворення Мебіуса круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$, що переводить $z_0 \mapsto 0$ має вигляд

$$\sigma \;:\; z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{1-z\overline{z_0}}, \tag{35.2}$$

де α — дійсний параметр, що характеризує кут повороту відносно $w=0$. ▶

Приклад 35.4

Знайти загальний вигляд конформного відображення верхньої півплощини $\mathbb{C}_+$ на круг $|w|<1$, що переводить $z_0 \mapsto w_0 = 0$.

◀Згідно з конформною властивістю перетворень Мебіуса, можемо стверджувати, що шукане перетворення здійснюється саме перетворенням Мебіуса. Накладемо умову, щоб наперед задана точка z_0 з z-площини відображалась на центр круга w-площини. Згідно з круговою властивістю, перетворення Мебіуса відображає точки, симетричні відносно кола на z-площині, на точки, симетричні відносно кола на w-площині. Тому це перетворення повинно відобразити $z_0 \mapsto 0$, а симетричну точку

$z_0^\star = 1/\overline{z_0} \mapsto w_0^\star = \infty$. Згідно з (34.3), таке перетворення має вигляд

$$w = A\frac{z - z_0}{z - z_0^\star},$$

але $z_0^\star = \overline{z_0}$ (симетрія відносно прямої). Константа $A = e^{i\alpha}$ з умови одиничності кола w. Отже, приходимо до наступного висновку: перетворення Мебіуса верхньої півплощини $\mathbb{C}_+$ на круг $|w| < 1$, що переводить $z_0 \mapsto 0$ має вигляд

$$\sigma \ : \ z \mapsto e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}, \tag{35.3}$$

де α — дійсний параметр. ▶

Приклад 35.5

Знайти образ області $D = \{z \ : \ |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ при відображенні $w = \dfrac{z}{z+1}$.

◀Згідно з принципом відповідності меж, межа області D на z-площини має перетворюватись на межу області D^* w-площини. При цьому ∂D утворюється перетином кола $\Gamma_1 = \mathbb{T}$ та прямої $\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$. Знайдемо образи цих кривих Γ_1^* і Γ_2^*. Для цього оберемо точки $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, $z_4 = 0$. Підставляючи явний вигляд перетворення Мебіуса, маємо $w_1 = 1/2$, $w_2 = \frac{1+i}{2}$, $w_3 = \frac{1-i}{2}$, $w_4 = 0$.

Згідно з круговою властивістю перетворення Мебіуса відображає кола та прямі на кола та прямі. Точки $z_1, z_2, z_3 \in \Gamma_1$, отже $w_1, w_2, w_3 \in \Gamma_1^*$, звідки $\Gamma_1^* = \mathbb{T}_{1/2}(1/2)$ — коло. Точки $z_4, z_2, z_3 \in \Gamma_2$, отже $w_4, w_2, w_3 \in \Gamma_2^*$, звідки $\Gamma_2^* = \{w : \operatorname{Re} w = 1/2\}$ — пряма. Отже, область D^* обмежена колом Γ_1^* і прямою Γ_2^*. Для визначення, внутрішня, чи зовнішня частина нас цікавить, потрібно обрати одну точку, що не належить межі. Наприклад, точка $z_4 = \infty \notin D \mapsto w_4 = \infty \notin D^*$, тому остаточно

$$D^* = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \ \operatorname{Re} w < \frac{1}{2} \right\}.$$

▶

Приклад 35.6

Знайти образ кільця $D = \mathscr{R}(0, 1, 2) = \{z \ : \ 1 < |z| < 2\}$ при відображенні функцією Жуковського $j(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

◀Згідно з принципом відповідності меж, межа області D на z-площини має перетворюватись на межу області D^* w-площини. Область D — кільце, це двозв'язна область, межа якої складається з двох кіл: $\mathbb{T}_2(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ — зовнішня межа і $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — внутрішня межа. Підставляючи параметричний опис зовнішньої межі $z = 2e^{i\varphi}$ в ви-

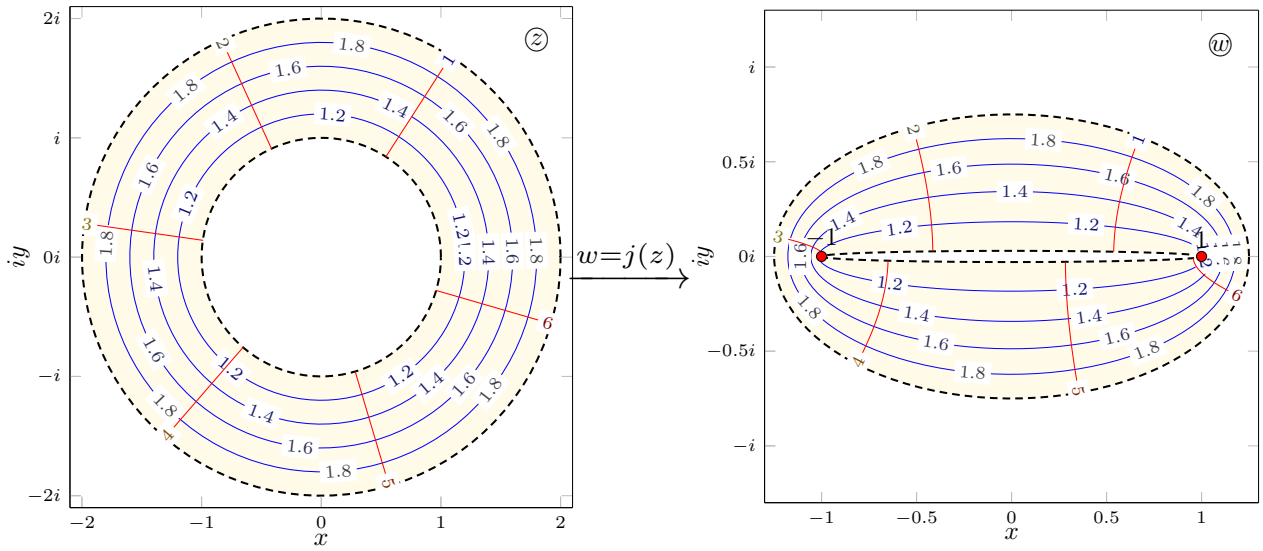


Рис. 28: До прикладу рис. 35.6

раз для $w = j(z) = u + iv$, знайдемо явний вигляд функцій u та v: $w = \frac{1}{2}\left(2e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{-i\varphi}\right) = u + iv$, звідки $u = a\cos\varphi$ і $v = b\sin\varphi$, де $a = 5/4$ і $b = 3/4$. Отже, коло $\mathbb{T}_2(0)$ перетворюється на еліпс з півосями a та b, явний вигляд рівняння еліпса $u^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$. Аналогічно, внутрішня межа параметризується виразом $z = e^{i\varphi}$, звідки $u = \cos\varphi$ і $v = 0$. Отже, коло $\mathbb{T}$ перетворюється на відрізок $\operatorname{Re} w \in (-1, 1)$, $\operatorname{Im} w = 0$. Для того, щоб знайти, на що перетворюється сама область по відношенню до меж, розглянемо якусь внутрішню точку, наприклад $z = 3/2$, її образ $w(3/2) = 13/12$. Таким чином, кільце D перетворюється на внутрішню частину еліпса з розрізом уздовж відрізку γ:

$$D^* = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} < 1, z \notin \gamma. \right\},$$
$$\gamma = \{ w \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Re} w \in (-1, 1), \ \operatorname{Im} w = 0 \}$$

Зазначимо, що з функцією Жуковського вже зустрічалися раніше, порівняйте з прикладом 5.3. Фазовий портрет функції Жуковського зображено на рис. 10(в). ▶

Приклад 35.7

Знайти загальний вигляд конформного відображення області $D = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ на область $G = \{w : |w| < 1\}$, що переводить $z_0 \mapsto w_0 = 0$.

◀Згідно з конформною властивістю перетворень Мебіуса, можемо стверджувати, що шукане перетворення здійснюється саме перетворенням Мебіуса. Накладемо умову, щоб наперед задана точка z_0 з z-площини відображалась на центр круга w-площини. Згідно з круговою властивістю, перетворення Мебіуса відображає точки, симетричні відносно кола на z-площині, на точки, симетричні відносно кола на w-площині. Тому це перетворення повинно відобразити $z_0 \mapsto 0$, а симетричну точку

$z_0^\star = 1/\overline{z_0} \mapsto w_0^\star = \infty$. Згідно з (34.3), таке перетворення має вигляд

$$w = A\frac{z - z_0}{z - z_0^\star}.$$

Якщо $z_0 = x_0 + iy_0$, то симетрична відносна межі точка $z_0^\star = -x_0 + iy_0 = -\overline{z_0}$. Константу A знаходимо з умови відображення межі області D, тобто прямої $z = iy$ на одиничне коло $|w| = 1$:

$$1 = |w| = |A|\left|\frac{iy - z_0}{iy + \overline{z_0}}\right| = |A|\frac{|iy - z_0|}{|-iy + z_0|} = |A|,$$

звідки $A = e^{i\alpha}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, приходимо до наступного висновку: перетворення Мебіуса області D на круг $|w| < 1$, що переводить $z_0 \mapsto 0$ має вигляд

$$f(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z + \overline{z_0}}, \tag{35.4}$$

де α — дійсний параметр. ▶

Приклад 35.8

Знайти загальний вигляд конформного відображення області D на область G за додаткових умов:

$$D = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}, \quad G = \{w : |w| < 1\}, \quad w(-1) = 0, \quad \arg w'(-1) = \frac{\pi}{2}.$$

◀Перш за все потрібно знайти загальний вигляд перетворення області D на область G. Згідно з конформною властивістю перетворень Мебіуса, можемо стверджувати, що шукане перетворення здійснюється саме перетворенням Мебіуса. Явний вигляд було знайдено в прикладі 35.7 і може бути описаний формулою (35.4). Невизначеними залишились константи z_0 і α. Скористаємось першою з умов, $w(-1) = 0$. Тоді

$$w(-1) = e^{i\alpha}\frac{-1 - z_0}{-1 + \overline{z_0}} = 0 \;\Rightarrow\; z_0 = -1.$$

Тепер для того, щоб скористатися другою умовою, потрібно обчислити похідну:

$$w'(z) = e^{i\alpha}\frac{z_0 + \overline{z_0}}{(z + \overline{z_0})^2} = -\frac{2e^{i\alpha}}{(z - 1)^2} \;\Rightarrow\; w'(-1) = -\frac{e^{i\alpha}}{2}.$$

За умовою $\arg w'(-1) = \pi/2$, звідки $\alpha = -\pi/2$. Остаточно

$$f(z) = i\frac{1 + z}{1 - z}.$$

▶

§ 36. Завдання для аудиторної роботи

524. Знайти перетворення Мебіуса комплексної площини z на площину w, що переводить точки $-1 \mapsto 0$, $i \mapsto 2i$, $1+i \mapsto 1-i$.

525. Знайти перетворення Мебіуса комплексної площини z на площину w, що переводить точки $-1 \mapsto 0$, $\infty \mapsto \infty$, $i \mapsto 1$.

526. Знайти загальний вигляд конформного відображення круга $|z - z_0| < R$ на круг $|w| < 1$.

527. Знайти образ області $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при відображенні $w = \dfrac{1-z}{1+z}$.

528. Знайти образ області $D = \{z : |z - i| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при відображенні $w = \dfrac{1}{z}$.

529. Знайти образ області $D = \{z : \pi < \arg z < 3\pi/2\}$ при відображенні $w = z^2$.

530. Знайти образ області $D = \{z : |z| < 1/2\}$ при відображенні $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$.

531. Знайти образ області $D = \{z : |\arg z| < \pi/8,\ z \notin [0;1]\}$ при відображенні $w = z^8$.

532. Знайти образ області $D = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ при відображенні $w = e^z$.

§ 37. Завдання для самостійної роботи

У прикладах 533–538 знайти перетворення Мебіуса комплексної площини z на площину w, що переводить точки $z_1 \mapsto w_1$, $z_2 \mapsto w_2$, $z_3 \mapsto w_3$.

533. $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto i$, $3 \mapsto -i$.

534. $1 \mapsto \infty$, $-1 \mapsto 0$, $3 \mapsto 1$.

535. $-1 \mapsto i$, $\infty \mapsto 1$, $i \mapsto 1+i$.

536. $-1 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto i$, $i \mapsto 1$.

537. $1 \mapsto 1$, $i \mapsto i$, $0 \mapsto -1$.

538. $1/2 \mapsto 1/2$, $2 \mapsto 2$, $5/4+3i/4 \mapsto \infty$.

У прикладах 539–540 знайти відображення верхньої півплощини на себе при наведеному нормуванні.

539. $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto \infty$.

540. $0 \mapsto 1$, $i \mapsto 2i$.

У прикладах 541–546 знайти загальний вигляд конформних відображень наведених областей.

541. Відображення півплощини $\operatorname{Im} z > 0$ на півлощину $\operatorname{Im} w > 0$.

542. Відображення півплощини $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < 1$.

543. Відображення круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$.

544. Відображення круга $|z| < R$ на півлощину $\operatorname{Im} w > 0$.

545. Відображення півплощини $\operatorname{Re} z > 0$ на круг $|w| < 1$.

546. Відображення півплощини $\operatorname{Re} z > 0$ на півлощину $\operatorname{Re} w > 0$.

У прикладах 547–565 знайти образ області D при конформному відображенні $w(z)$.

547. $D = \{z \,:\, z \notin [-2;1]\}$, $w = \dfrac{z+2}{1-z}$.

548. $D = \{z \,:\, 1 < |z| < 2\}$, $w = \dfrac{2}{z-1}$.

549. $D = \{z \,:\, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = z^2$.

550. $D = \{z \,:\, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = z^2$.

551. $D = \{z \,:\, |z| > 1/2,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = z^2$.

552. $D = \{z \,:\, |z| > 2\}$, $w = \frac{1}{2}\,(z + 1/z)$.

553. $D = \{z \,:\, |z| < 1,\ z \notin [0;1]\}$, $w = \frac{1}{2}\,(z + 1/z)$.

554. $D = \{z \,:\, |z| < 1,\ 0 < \arg z < \pi/2\}$, $w = \frac{1}{2}\,(z + 1/z)$.

555. $D = \{z \,:\, |z| < 1, -3\pi/4 < \arg z < -\pi/4\}$, $w = \frac{1}{2}\,(z + 1/z)$.

556. $D = \{z \,:\, -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = e^z$.

557. $D = \{z \,:\, |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, $w = e^z$.

558. $D = \{z \,:\, |\operatorname{Im} z| < \pi/4\}$, $w = \operatorname{th} z$.

559. $D = \{z \,:\, 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$, $w = \operatorname{tg} z$.

560. $D = \{z \,:\, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $w = \operatorname{ch} z$.

561. $D = \{z \,:\, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \ln z$, де $w(i) = i\pi/2$.

562. $D = \{z \,:\, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $w = z + e^z$.

563. $D = \{z \,:\, |z| < 1\}$, $w = \ln \dfrac{1}{1-z}$.

564. $D = \left\{z \,:\, (\operatorname{Im} z)^2 - (\operatorname{Re} z)^2 \le 1/2\right\}$, $w = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$, де $w(0) = 2\pi i$.

565. $D = \{z \,:\, \operatorname{Im} z > 0,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$, де $w(2) > 0$.

§ 38. Приклади задач для модульної контрольної роботи (МКР-II)

Модульна контрольна робота (МКР-II) проводиться після завершення вивчення розділу II (теми 6–9). Робота містить 7 завдань, приклади яких наведено нижче.

1. Обчислити лишки функції $f(z)$ в усіх особливих точках $z \in \mathbb{C}$ та лишок на нескінченості, якщо $f(z) = (z + 7i)^{-2} \operatorname{th}(\pi z)$.

2. За допомогою теорії лишків обчислити інтеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi}{a + b\cos\varphi}$, де $0 < b < a$.

3. За допомогою теорії лишків обчислити інтеграл $\displaystyle\int\!\!\!\!\!\!-_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^5 - 1}$.

4. За допомогою теорії лишків обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{-3ix}}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$.

5. Знайти перетворення Мебіуса, яке переводить точки $i+1$, ∞, $1-i$, відповідно у точки 0, 1, i.

6. Знайти загальний вигляд конформного відображення області D на область G за додаткових умов:

$$D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}, \quad G = \{w : |w| < 1\}, \quad w(0) = -i, \quad w(2i) = \frac{i}{3}.$$

7. Знайти образ множини E при відображенні функцією $f(z)$, якщо

$$E = \left\{z : \arg z = \frac{\pi}{4}\right\}, \qquad f(z) = z^3.$$

Відповіді

Тема 1

1. $\operatorname{Re} z = -\frac{3}{25}$, $\operatorname{Im} z = \frac{29}{25}$.
2. $\operatorname{Re} w = \frac{x}{x^2+y^2}$; $\operatorname{Im} w = -\frac{y}{x^2+y^2}$.
3. $\operatorname{Re} z = \frac{35}{13}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{20}{13}$.
4. $3\exp\{i(\pi + 2\pi n)\}, n \in \mathbb{Z}$.
5. $\exp\left\{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\right\}, n \in \mathbb{Z}$.
6. $|z| = \sqrt{2}, \operatorname{Arg}\ z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
7. $\frac{2^8}{10^{15/2}}\exp\{i(15\operatorname{arctg} 3 - 5\pi + 2\pi n)\}, n \in \mathbb{Z}$.
8. $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$.
9. Коло з центром в точці z_0, радіуса R.
10. Внутрішність кола з центром в точці z_0, радіуса R.
11. Внутрішність кута з вершиною в початку координат і сторонами, які утворюють з додатним напрямком осі Ox кути α і β.
12. Пряма, яка проходить через середину відрізка з кінцями в точках z_1 і z_2 і перпендикулярна до нього.
13. Зовнішність кола з центром в точці $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, радіуса $\frac{\sqrt{13}}{2}$.
14. $z_k = \sqrt[7]{5}\exp\left(\frac{i}{7}\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2k\pi\right)\right)$, де $k = \overline{0,6}$.
16. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{13}-3}{2}} \mp i\sqrt{\frac{\sqrt{13}+3}{2}}$.
17. $\pm i, \pm 1$.
18. $\operatorname{Re} z = \frac{19}{50}$, $\operatorname{Im} z = \frac{4}{25}$.
19. $\operatorname{Re} z = \frac{66}{65}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{57}{65}$.
20. $\operatorname{Re} z = -\frac{17}{26}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{19}{26}$.
21. $\operatorname{Re} z = -\frac{6}{25}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{8}{25}$.
22. $2\exp\{i2\pi n\}, n \in \mathbb{Z}$.
23. $\frac{1}{2}\exp\left\{i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n)\right\}, n \in \mathbb{Z}$.
24. $|z| = 10^{100}, \operatorname{Arg}\ z = 20\pi - 100\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
25. $\frac{5^8}{50^{11/2}}\exp\{i(16\operatorname{arctg} 2 - 11\operatorname{arctg} 7 - \pi + 2\pi n)\}, n \in \mathbb{Z}$.
26. $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.
27. $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$.
28. $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$.
29. $\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$.
30. $\operatorname{Re} w = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\operatorname{Im} w = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.
31. $\operatorname{Re} w = x^2 - y^2 + x$; $\operatorname{Im} w = y(2x+1)$.
32. $\operatorname{Re} w = \frac{x^3+x^2+xy^2-y^2}{x^2+y^2+2x+1}$; $\operatorname{Im} w = \frac{y^3+x^2y+2xy}{x^2+y^2+2x+1}$.
33. $\operatorname{Re} w = x^2 - y^2 + 4y + 1$; $\operatorname{Im} w = 2x(y-2)$.
36. *Вказівка.* Скористатись формулою Муавра.
37. *Вказівка.* Скористатись методом математичної індукції.
38. *Вказівка.* Скористатись тим, що для довільного $a \in \mathbb{R} : \overline{a} = a$.
40. Півплощина, яка лежить нижче прямої $y = C$.
41. Еліпс з фокусами в точках z_1 і z_2, великою піввіссю a.

42. Зовнішність кола з центром в точці $\left(-\frac{7}{2}, 3\right)$, радіуса $\frac{\sqrt{17}}{2}$.
43. Права половина круга радіуса 1 з центром в точці $z = 0$.
44. $\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
52. z^T.
53. $zz^T = \left(x^2 + y^2\right) E$, де E – одинична матриця.
54. $\frac{1}{(x+1)^2+y^2} \begin{pmatrix} y & x+1 \\ -x-1 & y \end{pmatrix}$.
55. $z_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
56. $z_k = \exp\left(\frac{i\pi}{8} + \frac{i\pi k}{4}\right)$, де $k = \overline{0,7}$.
57. $z_k = \sqrt[3]{34}\exp\left(\frac{i}{3}\left(\operatorname{arctg}\frac{15}{8} + (2k-1)\pi\right)\right)$, де $k = \overline{0,2}$.
58. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{130}+11}{2}} \mp i\sqrt{\frac{\sqrt{130}-11}{2}}$.
59. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{65}+7}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{65}-7}{2}}$.
60. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{89}-8}{2}} \mp i\sqrt{\frac{\sqrt{89}+8}{2}}$.
61. $z_k = \sqrt[10]{2}\exp\left(\frac{3i\pi}{20} + \frac{2k\pi i}{5}\right)$, де $k = \overline{0,4}$.
62. $z_k = \sqrt[6]{2}\exp\left(\frac{i\pi}{18} + \frac{k\pi i}{3}\right)$, де $k = \overline{0,5}$.
63. $z_k = -1 + \sqrt[8]{65}\exp\left(\frac{i}{4}\left(-\operatorname{arctg}\frac{4}{7} + (2k+1)\pi\right)\right)$, де $k = \overline{0,3}$.

Тема 2

67. $\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\left(z + \frac{n\theta}{2}\right)\sin^{-1}\frac{\theta}{2}$.
68. $\operatorname{Re} f(z) = \sin x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} f(z) = \cos x \operatorname{sh} y$, $|f(z)| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y}$.
69. $\ln\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right| + i\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} n + 2\pi k\right)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.
70. $\exp\left\{i\sqrt{3}\pi(2n+1)\right\}$, $n \in \mathbb{Z}$.
71. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
77. $\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\left(z + \frac{n\theta}{2}\right)\sin^{-1}\frac{\theta}{2}$.
78. $\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y$, $\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y$, $|f(z)| = e^x$.
79. $\operatorname{Re} f(z) = \cos x \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im} f(z) = -\sin x \operatorname{sh} y$, $|f(z)| = \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y}$.
80. $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{sh} x \cos y$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{ch} x \sin y$, $|f(z)| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x \cos^2 y + \operatorname{ch}^2 x \sin^2 y}$.
81. $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{ch} x \cos y$, $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{sh} x \sin y$, $|f(z)| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x \cos^2 y + \operatorname{sh}^2 x \sin^2 y}$.
82. $\operatorname{Re} f(z) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$, $|f(z)| = \frac{\sqrt{\sin^2 2x + \operatorname{sh}^2 2y}}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$.
83. $\operatorname{Re} f(z) = -\frac{\sin 2x}{\cos 2x - \operatorname{ch} 2y}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x - \operatorname{ch} 2y}$, $|f(z)| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}}$.
84. $\operatorname{Re} f(z) = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\cos 2y + \operatorname{ch} 2x}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{\sin 2y}{\cos 2y + \operatorname{ch} 2x}$, $|f(z)| = \frac{\sqrt{\sin^2 2y + \operatorname{sh}^2 2x}}{\cos 2y + \operatorname{ch} 2x}$.
85. $\operatorname{Re} f(z) = -\frac{\operatorname{sh} 2x}{\cos 2y - \operatorname{ch} 2x}$, $\operatorname{Im} f(z) = \frac{\sin 2y}{\cos 2y - \operatorname{ch} 2x}$, $|f(z)| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}{\operatorname{ch} 2x - \cos 2y}}$.
86. $i \operatorname{sh} 3$.
87. $\cos 3 \operatorname{ch} 1 - i \sin 3 \operatorname{sh} 1$.
88. $-i \sin\sqrt{2}$.
89. $\cos\frac{1}{2}$.
90. $\frac{\sin 6 - i \operatorname{sh} 2}{\cos 6 + \operatorname{ch} 2}$.

91. $\frac{\sin 2+i\,\mathrm{sh}\,6}{\cos 2-\mathrm{ch}\,6}$.
92. $\frac{\mathrm{sh}\,2-i\sin 6}{\cos 6+\mathrm{ch}\,2}$.
93. $\frac{\mathrm{sh}\,6+i\sin 2}{\cos 2-\mathrm{ch}\,6}$.
94. $i\pi\,(1+2n)\,,\ n\in\mathbb{Z}$.
95. $\ln 2+i\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
96. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\ln^2 5+(\pi(2n+1)-\mathrm{arctg}\,2)^2\right)+i\left(\mathrm{arctg}\,\frac{2\pi(2n+1)-2\,\mathrm{arctg}\,2}{\ln 5}+2\pi k\right)$, $k,n\in\mathbb{Z}$.
97. $\exp\left\{i2\sqrt{3}\pi n\right\},\ n\in\mathbb{Z}$.
98. $\exp\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\},\ n\in\mathbb{Z}$.
99. $\exp\left\{\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{5}}{2}-\pi(2n+1)+i\ln 3\right\},\ n\in\mathbb{Z}$.
100. $\exp\left\{\ln 5+\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}-2\pi n+i\left(\ln 5-\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}+2\pi n\right)\right\},\ n\in\mathbb{Z}$.
101. $2\pi n-i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
102. $2\pi n-i\ln\left(\sqrt{2}-1\right),\quad \pi(2n+1)-i\ln\left(\sqrt{2}+1\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
103. $\ln\left(\sqrt{5}\pm 2\right)+i\left(\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
104. $\frac{1}{2}\ln\left(3+2\sqrt[4]{2}\left(\sqrt[4]{2}\pm\sqrt{2}\pm 1\right)\right)+i\left(\pm\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[4]{2}+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
105. $\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,2+\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)-i\frac{\ln 5}{4},\ n\in\mathbb{Z}$.
106. $\frac{1}{4}\ln 2+i\left(\frac{5\pi}{8}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
107. $i\pi(2n+1),\ n\in\mathbb{Z}$.
108. $\frac{\pi}{2}+\pi n+i\frac{\ln 3}{2},\ n\in\mathbb{Z}$.
109. $-\frac{\ln 2}{4}+i\left(-\frac{\pi}{8}+\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
110. $\frac{\ln 3}{2}+i\left(\pm\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{11}}+\frac{1\mp 1}{2}\pi+2\pi n\right),\ n\in\mathbb{Z}$.
111. $\pi(2n+1),\ 2\pi n+i\ln 3\ n\in\mathbb{Z}$.
112. $\exp\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\},\ n\in\mathbb{Z}$.
113. $\exp\left\{\frac{\ln 2}{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi n+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\frac{\ln 2}{2}\right)\right\},\ n\in\mathbb{Z}$.
114. $\exp\left\{\sqrt{2}\pi n+i\sqrt{2}\pi n\right\}-i,\ n\in\mathbb{Z}$.
116. Множини значень $z^{2\alpha}$ і $(z^\alpha)^2$ співпадають, але не співпадають, взагалі кажучи, з множиною значень $\left(z^2\right)^\alpha$.

Тема 3

120. $c=1,\ b=-a,\ f(z)=(1-ai)z$.
121. $|f'(z)|=3|z|^2,\ \arg f'(z)=2\arg z$. Стискається: $\left\{z:|z|<1/\sqrt{3}\right\}$, розширюється: $\left\{z:|z|>1/\sqrt{3}\right\}$.
122. 4.
133 — 138 Не є диференційовною в жодній точці.
140. $a=b=-1,\ f(z)=e^{iz}$.
146. $|f'(z)|=2|z|^{-3},\ \arg f'(z)=\pi-3\arg z$. Стискається: $\left\{z:|z|>\sqrt[3]{2}\right\}$, розширюється: $\left\{z:|z|<\sqrt[3]{2}\right\}$.
147. $|f'(z)|=3e^{3\,\mathrm{Re}\,z},\ \arg f'(z)=3\,\mathrm{Im}\,z$. Стискається: $\{z:\mathrm{Re}\,z<-\ln 3/3\}$, розширюється: $\{z:\mathrm{Re}\,z>-\ln 3/3\}$.
148. $|f'(z)|=e^{-\mathrm{Im}\,z},\ \arg f'(z)=\mathrm{Re}\,z+\pi/2$. Стискається: $\{z:\mathrm{Im}\,z>0\}$, розширюється: $\{z:\mathrm{Im}\,z<0\}$.

149. $|f'(z)| = \frac{1}{(\operatorname{Re} z+3)^2+(\operatorname{Im} z)^2}$, $\arg f'(z) = \pi - 2\operatorname{sign}(\operatorname{Re} z+3)\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z+3}$. Стискається: $\{z : (\operatorname{Re} z+3)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 > 1\}$, розширюється: $\{z : (\operatorname{Re} z+3)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 < 1\}$.
150. $|f'(z)| = \frac{8}{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z+3)^2}$, $\arg f'(z) = \pi/2 - 2\operatorname{sign}(\operatorname{Re} z)\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} z+3}{\operatorname{Re} z}$. Стискається: $\{z : (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z+3)^2 > 8\}$, розширюється: $\{z : (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z+3)^2 < 8\}$.
151. $|f'(a)| = \operatorname{sh} 3$, $\arg f'(a) = -\pi/2$. Розширюється.
152. $|f'(a)| = 10\sqrt{26}$, $\arg f'(a) = \pi - \operatorname{arctg} 5$. Розширюється.
153. $|f'(a)| = 56$, $\arg f'(a) = \pi/2$. Розширюється.
154. $|f'(a)| = 8\sqrt{2}$, $\arg f'(a) = \pi$. Розширюється.
155. $|f'(a)| = e$, $\arg f'(a) = \pi/2 + 4$. Розширюється.
156. $|f'(a)| = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 3\cos^2 1+\operatorname{sh}^2 3\sin^2 1}$, $\arg f'(a) = -2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \operatorname{th} 3)$. Стискається.
157. $|f'(a)| = \frac{3\sqrt{10}}{5e}$, $\arg f'(a) = -1 - \operatorname{arctg} 1/3$. Стискається.
158. $|f'(a)| = \frac{2}{\operatorname{sh}^2 2\cos^2 1+\operatorname{ch}^2 2\sin^2 1}$, $\arg f'(a) = \pi + 2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \operatorname{cth} 2)$. Стискається.
159. $|f'(a)| = 2\sqrt{5}/9$, $\arg f'(a) = \operatorname{arctg} 2$. Стискається.
160. $|f'(a)| = \sqrt{\frac{5}{17^3}}$, $\arg f'(a) = \pi - \operatorname{arctg} 1/2 + 3\operatorname{arctg} 1/4$. Стискається.
161. 25.
162. $127\sqrt{2}/3$.
163. 2π.
164. π.
165. 1.
166. $|\alpha|^n$.
167. $\frac{|\alpha|}{\operatorname{Re}\alpha}\left(e^{\operatorname{Re}\alpha} - 1\right)$, якщо $\operatorname{Re}\alpha \neq 0$, $|\alpha|$ якщо $\operatorname{Re}\alpha = 0$.
168. $\frac{|\alpha|}{\operatorname{Im}\alpha}\left(1 - e^{-\operatorname{Im}\alpha}\right)$, якщо $\operatorname{Im}\alpha \neq 0$, $|\alpha|$ якщо $\operatorname{Im}\alpha = 0$.
169. $\pi 5^8/2$.
170. $5\pi\left(2^{10} - 1\right)/6$.
171. $e^{-\pi}\operatorname{sh}\pi$.
172. 65π.
173. $2656/63$.
174. $2/3$.
175. Образ $D^* = \{w \ : \ e \le |w| \le e^2\}$, його площа $S(D^*) = \pi\left(e^4 - e^2\right)$.

Тема 4

176. 1) $-2 - i$, 2) $-2 - i/3$, 3) $i - 2$.
177. $2/3$.
178. $8\pi i e^{4ia}$.
179. 1) 0, 2) $\pi(\sin 2 + i\cos 2)$, 3) $2\pi i\cos 2$.
180. $2\pi i$.
181. 2π.
182. 1) $15/2 + 8i$, 2) $17/2 + 4i$, 3) $21/2 - 4i$, г) $9/2 + 20i$.
183. 1) $6(1 + 2i)$, 2) $8 + 56i/5$, 3) $14 + 10i$.
184. 1) $(1 + 5i)/6$, 2) $23/42 + 97i/60$, 3) $5/6 + 8i/3$.
185. $128/3$.

186. $i/16$.
187. $2\pi i$.
188. $-\pi/2 - i\pi$.
189. $i\,(\operatorname{ch} 2\pi - 1)$.
190. $(1-2i)\sin 4/2$.
191. $10\operatorname{ch} 1 - 4\operatorname{sh} 1 - 10 - 2i\operatorname{sh} 1$.
192. $(15\pi\operatorname{ch}\pi - 11\operatorname{sh}\pi + i\,(20\pi\operatorname{ch}\pi + 2\operatorname{sh}\pi))/25$.
193. $-18\sqrt{2}$.
194. $\sqrt{2}\operatorname{sh}\pi(1-i)/2$.
195. $1/2$.
196. 1) 0, 2) $i\operatorname{sh} 2$, 3) $i\operatorname{sh} 2$.
197. 1) 0, 2) $(\operatorname{sh} 4\pi - 4\pi + 4\pi i)/8$, 3) $-(\operatorname{sh} 4\pi - 4\pi + 4\pi i)/8$.
198. 1) 0, 2) $i\left(2^8 - 3^{10}\right)/16$, 3) $i\left(2^8 - 3^{10}\right)/16$.
199. 1) 0, 2) $1 - \pi/4 + i\,(1 - \operatorname{th} 1)$, 3) $1 - \pi/4 + i\,(1 - \operatorname{th} 1)$.
200. 0.
201. 0.
202. 0.
203. 0.
204. $\left(2^{18} + 1\right)/24$.
205. $i\,(5\operatorname{ch}(3\pi/2) - 3\operatorname{ch}(5\pi/2))/30$.
206. $2\pi + i\,(\ln 2 + 1/2)$.
207. $-(9\operatorname{sh}\pi + \operatorname{sh} 3\pi)/12$.
208. $(\operatorname{sh} 1 + 1) + \pi i$.
209. $\pi\,(1 + ie^{-\pi})$.
210. $\pi - 6\operatorname{ch} 2 + 4\operatorname{sh} 2$.
211. $2\,(1 + \operatorname{sh} 1 + \pi i)$.
212. $-3\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + i\right)/4$.
213. $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\cos(2\sqrt{2}\pi) - 1 + i\sin(2\sqrt{2}\pi)\right)$.
214. $\left(e^{-6\pi} - 1\right)(1 - 3i)/10$.
215. $4\,(1 + i)/5$.
216. $i\sin(\pi\sqrt{3})\left(\sqrt{3} - 1\right)e^{i5\pi\sqrt{3}}$.
217. $i\operatorname{sh}(2\pi)e^{6\pi}$.
218. $2\pi i$.
219. $10\pi i$.
220. 2π.
221. 2π.
222. $2\pi i - 2\pi^2$.
223. $2\pi i \ln 4 + 2\pi^2$.
224. $\pi i/3$.
225. $\pi i/5$.
226. $4\pi\,(\pi + i)$.
227. $4\pi\,(-3\pi + i)$.
228. $2\pi\,(3\pi + i)$.
229. $2\sin(\pi\alpha)e^{\pi i(2k_0\alpha+\alpha+1/2)}/(\alpha+1)$, якщо $\alpha \neq -1$, $2\pi i$, якщо $\alpha = -1$.
230. $e^{-2\pi k_0\alpha}\left(e^{-2\pi\alpha} - 1\right)(1 - i\alpha)/(\alpha^2 + 1)$.
231. $e^{2\pi i k_0\alpha}\left(e^{2\pi i\alpha} - 1\right)/(\alpha+1)$, якщо $\alpha \neq -1$, $2\pi i$, якщо $\alpha = -1$.

232. $2\pi i R$.
233. 2π.
234. $2\pi i \ln R - 2\pi^2(2k_0+1)$.
235. $2\pi i R^{n+1}/(n+1)$.
236. $4\pi R\left(\pi(2k_0+1)+i\right)$.
240. 1) 0, 2) $-i/\pi$, 3) i/π, г) 0.
241. 1) 0, 2) $\pi i/4$, 3) 0.
242. 1) 0, 2) $\frac{3\pi e^{-3}}{10}(1+3i)$, 3) $\frac{\pi}{10}\left(3e^{-3}-2\sin 1\right)+i\frac{\pi}{10}\left(9e^{-3}+2\cos 1\right)$, г) $-\frac{\pi}{5}(\sin 1+3\,\mathrm{sh}\,3)+i\frac{\pi}{5}(\cos 1+9\,\mathrm{ch}\,3)$.
243. $10\pi(7+i)$.
244. $-2\pi e^{-5}/9!$.
245. $2\pi^5 i\left(\pi^2-30\right)/6!$.
246. $74\pi i 3^{19}e^{-6}/20!$.
247. $4\pi i/3$.
248. 0.
249. $e\pi i/2$.
250. $-\pi\left(2\pi\cos 1+i\sin 1\right)/2$.
251. $-4i/\pi^2$.
252. 0.
253. $\pi\left(1+\cos 2+i\left(2-\sin 2\right)\right)/4$.
254. 0.
255. $3\pi^2 i/4$.
256. $i\pi 5!/6^6$.
257. $-\frac{2\pi i}{(b-a)^n}$.
258. 2, якщо $n=1$, 2^n-1, якщо $n>1$.

Тема 5

271. $1/k$ — істотно особливі точки, де $k\in\mathbb{Z}$.
272. 0 — усувна особлива точка, $i\pi k$ — прості полюси, де $k\in\mathbb{Z}$.
273. 0 — усувна особлива точка, πk — прості полюси, де $k\in\mathbb{Z}$.
274. 0 — усувна особлива точка, k — прості полюси, де $k\in\mathbb{Z}$.
275. 0 — істотно особлива точка, ∞ — усувна особлива точка.
276. 0 — істотно особлива точка, ∞ — усувна особлива точка.
277. ∞ — істотно особлива точка.

Тема 6

321. $\operatorname*{res}_{z=\pi/4} f(z)=1/\sqrt{2}$, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=-1/\sqrt{2}$.
322. $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=-1/2$, $\operatorname*{res}_{z=\pm i} f(z)=1/4$, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0$.
323. e.
325. -1.
326. π^2.
327. $-4/5$.
328. $\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=-\dfrac{3}{16}+\dfrac{\pi^2}{4}$, $\operatorname*{res}_{z=1} f(z)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{\pi^2}{4}$, $\operatorname*{res}_{z=3} f(z)=\dfrac{1}{16}$, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)=0$.
329. $3/2$.

330. $\pi^3/6$.
331. $\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$.
332. -1.
333. 0.
334. π.
335. 0.
336. -1.
337. 1.
338. 24.
339. $4/2$.
340. 0.
341. $-n/3$.
342. 2.
343. $361/24$.
344. -1.
345. 0.
346. $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = 0$, $\operatorname{res}\limits_{z=z_k\neq 0} f(z) = \dfrac{(-1)^k}{z_k}$ де $z_k = (\pi k)^{1/2}$ та $k \neq 0$.
347. $\operatorname{res}\limits_{z=1} f(z) = 0$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.
348. $\operatorname{res}\limits_{z=z_k\neq 0} f(z) = -1$, де $z_k = i\pi(2k+1)$ та $k \neq 0$.
349. $\operatorname{res}\limits_{z=1} f(z) = -\pi/2$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = \pi/2$.
350. $\operatorname{res}\limits_{z=i} f(z) = i/8$, $\operatorname{res}\limits_{z=-i} f(z) = -i/8$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.
351. $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = -1/e$, $\operatorname{res}\limits_{z=-1} f(z) = -1/\sqrt{e}$, $\operatorname{res}\limits_{z=1} f(z) = 1/e+1/\sqrt{e}$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.
352. $\operatorname{res}\limits_{z=1} f(z) = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -\dfrac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$.
353. $\operatorname{res}\limits_{z=ki} f(z) = 0$, де $k \in \mathbb{Z}$.
354. $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = 1$, $\operatorname{res}\limits_{z=\pm i} f(z) = -1/2$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.
355. $\operatorname{res}\limits_{z=z_k} f(z) = 1$, де $z_k = i\pi/2 + i\pi k$ та $k \in \mathbb{Z}$.
356. $\operatorname{res}\limits_{z=z_k} f(z) = \dfrac{1}{4z_k}$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$, де $z_k = \exp\left(\frac{i\pi+2\pi ki}{4}\right)$ та $k = 0, 1, 2, 3$.
357. $\operatorname{res}\limits_{z=1} f(z) = 1$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -1$.
358. $\operatorname{res}\limits_{z=k} f(z) = 1/\pi$, де $k \in \mathbb{Z}$.
359. $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = -1/64$, $\operatorname{res}\limits_{z=2} f(z) = 1/64$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.
360. $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = -1/64$, $\operatorname{res}\limits_{z=-2} f(z) = 257/64$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -4$.
361. $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = 0$, $\operatorname{res}\limits_{z=\pm 2i} f(z) = \mp 2023i/256$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.
362. $\operatorname{res}\limits_{z=0} f(z) = -1/a^{|n|}$, $\operatorname{res}\limits_{z=a} f(z) = \frac{1+a^{|2n|}}{a^{|n|}}$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -a^{|n|}$.
364. $\operatorname{res}\limits_{z=\pm i} f(z) = \mp\frac{i}{4}(\operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1)$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.
366. $\operatorname{res}\limits_{z=\pm i} f(z) = -\dfrac{1}{4e}$, $\operatorname{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.

Тема 7

367. 1) 0, 2) $i\pi/16$, 3) $i\pi/16$, 4) $-i\pi/16$.
368. $\dfrac{i}{9\sqrt{3}}$.
369. $i\pi\sqrt[3]{e}/32$.
370. 0.
371. $i\pi\,(\cos 1 + 2\sin 1)$.

Тема 8

409. $2\pi/5$.
410. $\frac{\pi}{a}\left(1-\sqrt{1-a}\right)$.
411. $i\pi$.
412. $\frac{\pi}{5}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.
413. $3\pi/8$.
414. $-\pi/2$.
415. $\frac{\pi}{4a}e^{-a}$
416. $\dfrac{\pi}{2ab}\dfrac{ae^{-b}-be^{-a}}{a^2-b^2}$.
417. $-\dfrac{(e-2)\pi}{e^2}$.
418. $\frac{\pi}{2}\left(4\sqrt{2}-5\right)$.
419. $\frac{\pi}{a}\left(1-\sqrt{1-a}\right)$.
420. $\dfrac{\pi(a(a(a+5)+8)+5)}{2a^3(a(a+4)+5)^2}$.
421. $\dfrac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}$.
422. $-\pi/2$.
423. $\dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}$.
424. $\frac{\pi}{3e^3}\,(\sin 1 + 3\cos 1)$.
425. πe^{-ab}.
426. 0.
428. $\pi/2$.
429. $13\pi/45$.
430. $2i\pi e^{-2a}$.
431. π/a^2.
432. π.
433. π.
434. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.
435. $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a(a+1)}}$.
436. $\dfrac{\pi\left(a^4+1\right)}{1-a^2}$.

Тема 9

524. $w = \dfrac{2(z+1)}{4iz + (5-i)}$.

525. $w = \frac{1}{2}(1-i)(z+1)$.

526. $w = Re^{i\alpha}\dfrac{z-a}{R^2 - (z-z_0)(\bar{a}-\bar{z}_0)}$, де $\alpha \in \mathbb{R}$ та $|a - z_0| < R$.

527. $D^* = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w > 0\}$.

528. $D^* = \{w \in \mathbb{C} : |w + i/2| < 1/2, \operatorname{Im} w < 0\}$.

529. $D^* = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$.

530. $D^* = \left\{w = u + iv, u, v \in \mathbb{R} : \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} > 1\right\}$, де $a = 5/4$ і $b = 3/4$.

531. Вся комплексна площина з розрізом уздовж від'ємної напівосі.

532. Вся комплексна площина з розрізом уздовж додатної напівосі.

533. $w = \dfrac{(4+3i) - (2+i)z}{(3+4i) - (1+2i)z}$.

Навчальне видання

Шека Денис Дмитрович

Комплексний аналіз
в прикладах і задачах

Навчальний посібник для студентів спеціальності
«Прикладна фізика та наноматеріали»

Оригінал-макет виготовлено автором за допомогою видавничого пакету LaTeX2e з використанням шрифтів PSCyr

11 жовтня 2020 р.