УДК 519.21
ББК 22.171

Рецензенти: Моклячук М.П., професор, доктор фіз.-мат. наук,
Радченко О.М., доцент, кандидат фіз.-мат. наук.

Л.Л. Зайцева, О.Ю. Масютка

Методична розробка з курсу «Теорія ймовірностей»

Методична розробка призначена для студентів 2 курсу факультету радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем спеціальності "Телекомунікації та радіотехніка" при вивченні курсу «Вища математика».

Затверджено вченою радою факультету радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем (протокол № 15 від 13 квітня 2021 року)

1 Випадкові події

1.1 Основні означення теорії ймовірностей

Означення 1. Стохастичним називається експеримент, результати якого неможливо передбачити завчасно.

Означення 2. Простором елементарних подій Ω називається множина, яка включає всі можливі результати даного стохастичного експерименту, з яких в експерименті відбувається тільки один. Елементи простору Ω називаються елементарними подіями: $\omega \in \Omega$.

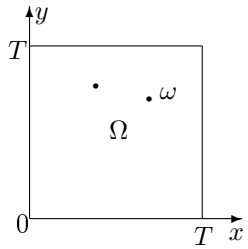
Означення 3. Випадковими подіями називаються підмножини Ω. В експерименті відбулася подія $A \subseteq \Omega$, якщо в експерименті відбулася одна з елементарних подій, які входять в A.

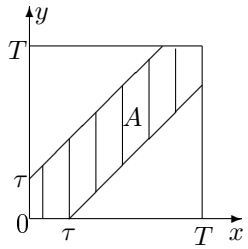
Приклад 1. Підкидається гральний кубик.
$\triangle$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\omega_1 = 1; \omega_2 = 2; \ldots; \omega_6 = 6$. Приклади випадкових подій:
$A = \{$випало число, яке не перевищує $3\} = \{1, 2, 3\}$,
$B = \{$випало парне число$\} = \{2, 4, 6\}$. ∇

Приклад 2. Монета підкидається двічі.
$\triangle$ $\Omega = \{\omega_1 = \text{ГГ}, \omega_2 = \text{ГР}, \omega_3 = \text{РГ}, \omega_4 = \text{РР}\}$.
$A = \{$випав хоча б один $\text{Г}\} = \{\text{ГГ}, \text{ГР}, \text{РГ}\}$. ∇

Приклад 3. Монета підкидається до першої появи Г.
$\triangle$ $\Omega = \{\omega_1 = \text{Г}, \omega_2 = \text{РГ}, \omega_3 = \text{ РРГ}, \ldots, \omega_n = \text{РР}\ldots\text{РГ}, \ldots\}$.
$A = \{$відбулося не більше трьох підкидань$\} = \{\text{Г}, \text{РГ}, \text{РРГ}\}$. ∇

Приклад 4. "Задача про зустріч". Дві особи A і B домовилися зустрітися в проміжок часу $[0; T]$. Нехай $x \in [0; T]$ – момент приходу A, $y \in [0; T]$ – момент приходу B. Нехай кожна з осіб очікує на іншу час не більший τ, $\tau \in [0; T]$. Нас цікавіть наступна подія: $A = \{$зустріч відбулася$\}$.
$\triangle$ Маємо наступний простір елементарних подій: $\Omega = \{(x; y) : x, y \in [0; T]\}$, де $\omega = (x; y)$ – елементарна подія. Тоді подію A можна записати наступним чином: $A = \{$зустріч відбулася$\} = \{(x; y) : |x - y| \leq \tau; x, y \in [0; T]\}$. Множину Ω і подію A можна також представити у вигляді рисунка:





. ∇

Означення 4. Достовірною називається подія, яка обов'язково відбувається в результаті стохастичного експерименту, тобто Ω. Неможливою називається подія, яка не може відбутися в результаті стохастичного експерименту, тобто подія, яка не містить жодної елементарної події $\emptyset$.
Зауважимо, що над випадковими подіями (множинами) розглядають аналогічні

операції, що і в теорії множин.

Позначення	Мова теорії множин	Мова теорії ймовірностей
Ω	Універсальна множина (множина, яка містить всі можливі елементи)	Простір елементарних подій
ω	Елемент Ω ($\omega \in \Omega$)	Елементарна подія
A	Деяка множина елементів Ω ($A \subset \Omega$)	Випадкова подія
Ω	Множина всіх ω	Достовірна подія
$\emptyset$	Пуста множина (множина, яка не містить жодного елемента)	Неможлива подія
$A \subset B$	A підмножина B (всі елементи A належать B)	З того, що відбулася подія A з необхідністю випливає, що відбулася подія B
$A \cup B$	Об'єднання множин A і B (множина тих елементів, які входять в A або в B)	Подія, яка полягає в тому, що відбулася A або B
$A \cap B$	Перетин множин A і B (множина тих елементів, які входять і в A і в B)	Подія, яка полягає в тому, що відбулася і A і B
$A \cap B = \emptyset$	A і B не перетинаються (нема елементів, які входять і в A і в B)	A і B – несумісні події
$A \backslash B$	Різниця множин A і B (елементи, які входять в A і не входять в B)	Подія, яка полягає в тому, що відбулася A і не відбулася B
$\overline{A} = \Omega \backslash A$	Доповнення множини A (елементи, які не входять в A)	Подія, протилежна до A (не відбулася A)

Властивості:

1. За означенням: $\emptyset \subset A$ для кожної множини A.
2. $A \cup \emptyset = A$; $\quad A \cup \Omega = \Omega$.
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$; $\quad A \cap \Omega = A$.
4. $A \cup \overline{A} = \Omega$; $\quad A \cap \overline{A} = \emptyset$.
5. $\overline{\Omega} = \emptyset$; $\quad \overline{\emptyset} = \Omega$.

Приклад 5. Підкидається гральний кубик (див. приклад 1).
$\triangle\ \Omega = \{1, \ldots, 6\}$; $\quad A = \{1, 2, 3\}$; $\quad B = \{2, 4, 6\}$.
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$; $\quad A \cap B = \{2\}$; $\quad A \setminus B = \{1, 3\}$; $\quad B \setminus A = \{4, 6\}$;
$\overline{A} = \{4, 5, 6\}$; $\quad \overline{B} = \{1, 3, 5\}$. ∇

Вправа 1. Виразити через події A, B і операції над множинами подію $\{5\}$.

Приклад 6. Є три деталі. Розглянемо наступні три події:
$A_1 =$ {перша деталь бракована}, $A_2 =$ {друга деталь бракована}, $A_3 =$ {третя деталь бракована}. Виразити наступні події: {Рівно дві деталі браковані}, {Всі деталі справні}, {Хоча б одна з деталей бракована}.

$\triangle$ {Рівно дві деталі браковані}= $\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) \cup \left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) \cup \left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right)$,
{Всі деталі справні}= $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$,
{Хоча б одна з деталей бракована}= $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. ∇

Вправа 2. Виразити наступні події: {Рівно одна деталь бракована}, {Не більш, ніж дві деталі браковані}, {Хоча б дві деталі справні}.

1.2 Ймовірність та її властивості

Означення 5. Множина $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega\}$, яка складається з підмножин множини Ω називається полем подій (σ-алгеброю подій), якщо виконуються наступні умови:

1. $\Omega \in \mathcal{F}, \emptyset \in \mathcal{F}$.
2. якщо $A \in \mathcal{F}$, тоді $\overline{A} \in \mathcal{F}$.
3. якщо $A_1, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$, тоді $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Приклад 7. Підкидається гральний кубик (див. приклад 1).
$\triangle$ Маємо: $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$. В якості поля подій можна вибрати наступні множини:
$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\} = \{\{\emptyset\}, \{1, 2, ..., 6\}\}$,
$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \overline{\{1\}}\} = \{\{\emptyset\}, \{1, 2, ..., 6\}, \{1\}, \{2, ..., 6\}\}$,
$\mathcal{F}$ =\{всі підмножини Ω\}= 2^{Ω}. ∇

Означення 6. Ймовірністю (ймовірнісною мірою) називається функція , яка задовольняє наступні властивості (аксіоми ймовірності):

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \mathcal{F}$.
2. $\forall A_1, ..., A_n, ... : A_i \cap A_j = \emptyset$ (попарно несумісні) виконується рівність: $P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.
3. P(Ω)=1.

Означення 7. Трійка об'єктів $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, де Ω – простір елементарних подій, $\mathcal{F}$ – поле (σ-алгебра) випадкових подій, P – ймовірнісна міра, називається ймовірнісним простором.

Властивості ймовірності:

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A), \forall A \in F$.
   $\triangle$ $A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \emptyset \Rightarrow P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$. ∇

   Наслідок 1. $P(\emptyset) = 0$, оскільки $\overline{\emptyset} = \Omega$.
2. $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.
   $\triangle$ $B = A \cup (B \backslash A), A \cap (B \backslash A) = \emptyset \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$. ∇

   Наслідок 2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{F} : P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   $\triangle$ $A \cup B = (A \backslash (A \cap B)) \cup (B \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B)$. Оскільки дані події попарно не перетинаються і за другою властивістю виконуються наступні рівності: $P(A \backslash (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B)$, $P(B \backslash (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B)$, то: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. ∇

   Наслідок 3. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

1.3 Приклади ймовірнісних просторів

I. Дискретний ймовірнісний простір.
Нехай $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$. Розглядається $\mathcal{F} = 2^\Omega$ – множина всіх підмножин Ω. Кожній елементарній події $\omega_n \in \Omega$ поставимо у відповідність ймовірність цієї події $p_n \in [0;1]$ таким чином, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Тоді ймовірність події $A \in \mathcal{F}$ визначається наступним чином: $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p_i$.

Приклад 8. Монета підкидається до першої появи Г (див. приклад 3).
$\triangle$ Маємо простір елементарних подій:
$\Omega = \{\omega_1 = \Г, \omega_2 = \text{РГ}, \omega_3 = \text{РРГ}, \ldots, \omega_n = \text{РР}\ldots\text{РГ}, \ldots\}$,
для якого $p_1 = P(\omega_1) = \frac{1}{2}$, $p_2 = P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $p_n = P(\omega_n) = \frac{1}{2^n}$, ..., причому: $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.
Підрахуємо ймовірність події $A = \{$відбулося не більше трьох підкидань$\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$: $P(A) = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
Розглянемо подію $B = \{$була парна кількість підкидань$\} = \{\omega_2, \omega_4, \ldots\}$:
$P(B) = p_2 + p_4 + \ldots + p_{2n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$. ∇

Частковим випадком дискретного ймовірнісного простору є "класичне означення ймовірності". Зробимо наступні припущення:

1. Ω складається зі скінченого числа елементів: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$;
2. всі елементарні події є рівноможливими: приписуємо кожній події ω_1, ω_2, $\ldots, \omega_N$ ймовірність (міру) $p \in [0;1]$.

За введеними властивостями ймовірності маємо наступну рівність: $p+p+\ldots+p = Np = 1$, отже, $p = \frac{1}{N}$. У класичній схемі ймовірність визначена для будь-якої події, що може бути представлена у вигляді об'єдняння деяких елементарних подій ω_i, $i \in \overline{1, N}$. Таким чином, для події $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ ймовірність обчислюється за формулою:
$P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} \frac{1}{N} = \frac{|A|}{N}$, де $|A|$ означає кількість елементів A.

Приклад 9. Підкидається гральний кубик (див. приклад 1).
$\triangle$ Маємо: $\Omega = \{\omega_1 = 1; \omega_2 = 2; \ldots; \omega_6 = 6\}$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}$.
Підрахуємо ймовірності розглянутих у прикладі 1 випадкових подій:
$A = \{1, 2, 3\}$, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
$B = \{2, 4, 6\}$, $P(B) = \frac{1}{2}$. ∇

Приклад 10. Монета підкидається двічі (див. приклад 2)
$\triangle$ Маємо: $\Omega = \{\Г\Г, \Г\text{Р}, \text{Р}\Г, \text{РР}\}$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}$.
$A = \{$випав хоча б один Г$\} = \{\Г\Г, \Г\text{Р}, \text{Р}\Г\}$, $P(A) = \frac{3}{4}$. ∇

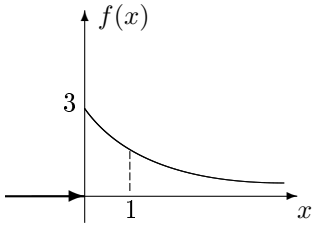
II. Ймовірність на прямій.
Нехай $\Omega = R$ і нехай $f : R \to R$ – дійсна функція така, що:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in R$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Тоді $\forall A \subset R$ визначимо ймовірність наступним чином: $P(A) = \int\limits_A f(x)dx$. Отже, ймовірність події A – це площа під графіком функції f над множиною A, а

саму функцію f можна розглядати як густину розподілу одиничної маси вздовж дійсної прямої. Функцію f ще називають густиною розподілу ймовірностей.

Приклад 11. Нехай $f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$. Знайти ймовірності наступних подій: $A_1 = [0,1]$, $A_2 = [1, +\infty)$.

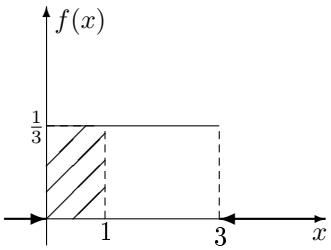


$\triangle$ Неважко переконатися, що $f(x)$ задовольняє переліченим вище умовам (переконатись самостійно в якості вправи). Отже, згідно з введеним означенням ймовірності:

$P(A_1) = \int_0^1 3e^{-3x}dx = -e^{-3x}\big|_0^1 = 1 - e^{-3}$,

$P(A_2) = \int_1^{+\infty} 3e^{-3x}dx = 1 - P(A_1) = e^{-3}$. ∇

Приклад 12. Нехай $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, x \in [0,3] \\ 0, x \notin [0,3] \end{cases}$ (самостійно переконатися, що $f(x)$ задовольняє умовам густини розподілу). Знайти ймовірності наступних подій: $A_1 = [0,1]$, $A_2 = [1, +\infty)$.



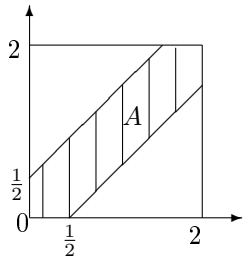
$\triangle$ $P(A_1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}dx = \frac{1}{3}$, $P(A_2) = 1 - P(A_1) = \frac{2}{3}$. ∇

III. Геометричне означення ймовірності.

Нехай $\Omega \subset R^n$ і $m(\Omega)$ – міра множини в просторі R^n, $m(\Omega) < \infty$ (довжина у випадку $n = 1$, площа у випадку $n = 2$, об'єм при $n = 3$). Експеримент полягає в киданні точки на область Ω навмання, тобто для довільної множини $A \subset \Omega$ ймовірність того, що точка потрапить в A залежить виключно від $m(A)$ і пропорційна їй і не залежить від форми або розташування A. Тобто ймовірнісна міра рівномірно розподілена по Ω. В цьому випадку ймовірність того, що точка потрапить в A визначається наступним чином: $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

Приклад 13. "Задача про зустріч"(див. приклад 4). Розв'яжемо частковий випадок цієї задачі, для якого $T = 2$ і $\tau = \frac{1}{2}$.

$\triangle$ Маємо: $\Omega = \{(x;y) : x, y \in [0;2]\}$. Підрахуємо ймовірність події A ={зустріч відбулася}= $\{(x;y) : |x - y| \leq \frac{1}{2}; x, y \in [0;2]\}$. Для цього зобразимо множину Ω і відмітимо на ній множину точок, що задовільняють умові події A:



Маємо: $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{4-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4} = \frac{4-\frac{9}{4}}{4} = \frac{7}{16}$. ∇

1.4 Елементи комбінаторики

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає розташування об'єктів у відповідності зі спеціальними правилами і методи підрахунку числа всіх можливих способів, якими ці розташування можуть бути виконані.

1. Основний принцип комбінаторики ("правило множення").

Нехай потрібно виконати одну за іншою k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, ..., k-ту – n_k способами, то всі k дій можуть бути виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Приклад 14. Скільки існує чотирьохзначних чисел: а) всі цифри яких різні; б) цифри яких можуть повторюватись; в) що є непарними.

$\triangle$ Використовуючи правило множення, одержимо наступні відповіді:

а) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$; б) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$; в) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5$. ∇

2. Число перестановок множини з n елементів: $P_n = n!$

$\triangle$ Будемо послідовно обирати елементи множини і розташуємо їх у певному порядку на n місцях. На перше місце можна поставити один з n елементів, на друге – один з $n-1$ елементів, ... За правилом множення всього n місць можна заповнити $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ способами. ∇

3. Число k-елементних підмножин множини з n елементів.

а) підмножини впорядковані ((521) і (215) – різні): $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ (розміщення з n по k).

$\triangle$ За правилом множення $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. ∇

б) підмножини невпорядковані ((521) і (215) однакові): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (сполучення з n по k).

$\triangle$ Кількість сполучень з n по k одержимо наступним чином: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, де $k!$ – число перестановок k елементів. ∇

Приклад 15. (Система Максвелла-Больцмана)

Нехай є k розрізненних частинок, кожна з яких може знаходитись у будь-якій з n комірок (станів) незалежно від того, де знаходяться інші частинки. Скільки існує різних розміщень k частинок по n коміркіх? Знайти ймовірність наступної події: A ={в першій комірці k_1 частинок, в другій комірці k_2 частинок, ... , в n-й комірці k_n частинок} ($k_1 + k_2 + ... + k_n = k$).

$\triangle$ Перша частинка може потрапити в будь-яку з n комірок, друга частинка може потрапити в будь-яку з n комірок, ... , k-та частинка може потрапити в будь-яку

з n комірок, отже, за правилом множення існує $n \cdot n \cdot .... \cdot n = n^k$ різних розміщень. Всі розміщення рівноймовірні, тому $|\Omega| = n^k$.

За правилом множення: $|A| = C_k^{k_1} \cdot C_{k-k_1}^{k_2} \cdot .... \cdot C_{k-k_1-....-k_{n-2}}^{k_{n-1}} \cdot C_{k-k_1-....-k_{n-1}}^{k_n} =$
$= \frac{k!}{k_1!(k-k_1)!} \cdot \frac{(k-k_1)!}{k_2!(k-k_1-k_2)!} \cdot .... \cdot \frac{(k-k_1-k_2-....-k_{n-2})!}{k_{n-1}!(k-k_1-k_2-....-k_{n-1})!} \cdot \frac{(k-k_1-k_2-....-k_{n-1})!}{k_n!(k-k_1-k_2-....-k_n)!} =$
$= \frac{k!}{k_1!\cdot.....\cdot k_n!}$.

Отже, $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k!}{k_1!\cdot.....\cdot k_n!\cdot n^k}$. ∇

Приклад 16. (Система Бозе-Ейнштейна)
Нехай є k однакових частинок, кожна з яких може знаходитись у будь-якій з n комірок (станів) незалежно від того, де знаходяться інші частинки. Скільки існує різних розміщень k частинок по n коміркіх? Знайти ймовірність наступної події: $B =$\{в деяких k комірках по одній частинці\}.
$\triangle$ Існує різних $C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k$ розміщень. Цю формулу можна пояснити наступним чином. Кожному розміщенню частинок по n комірках поставимо у відповідність впорядкований набір k нулів та $n-1$ одиниць. Кількості частинок в першій комірці відповідає кількість нулів, що знаходяться зліва від першої одиниці. Кількість наступних нулів між першою та другою одиницями відповідає кількості частинок, що знаходяться в другій комірці. Таком чином, кожному розміщенню частинок по n коміркіх ставимо у відповідність розміщення k нулів та $n-1$ одиниць на $k+n-1$ місцях. Кількість таких роміщень C_{n+k-1}^{n-1}, тому що після розміщення $n-1$ одиниці C_{n+k-1}^{n-1} способами, всі інші незаповнені місця автоматично заповнюються нулями. Всі розміщення рівноймовірні, тому $|\Omega| = C_{n+k-1}^k$.

$|B| = C_n^k$ – кількість способів, якими можна обрати k зайнятих комірок серед n комірок.

Отже, $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{C_n^k}{C_{n+k-1}^k}$. ∇

Приклад 17. (Система Фермі-Дірака)
Нехай є k однакових частинок, кожна з яких може знаходитись у будь-якій з n комірок (станів), причому в кожній комірці може бути не більше однієї частинки, $k \leq n$. Скільки існує різних розміщень k частинок по n комірках? Знайти ймовірність наступної події: $C =$\{в k заданих комірках по одній частинці\}.
$\triangle$ Існує різних C_n^k розміщень. Це відповідь на питання, скількома способами можна обрати k зайнятих комірок серед n комірок. Всі розміщення рівноймовірні, тому $|\Omega| = C_n^k$.

Оскільки $|C| = 1$, то $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1}{C_n^k}$. ∇

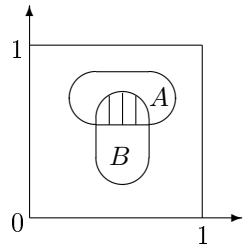
1.5 Умовні ймовірності

Розглянемо наступні приклади.

Приклад 18. Підкидаємо гральний кубик двічі. Обчислити ймовірність того, що при першому підкиданні випала одиниця за умови, що сума чисел, що випали, не перевищує 3.
$\triangle$ Маємо наступні події:
A=\{при першому підкиданні випала одиниця\}=$\{(1,i), i = \overline{1,6}\}$,
B=\{сума чисел, що випали, не перевищує 3\}=$\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$,
$A \cap B = \{(1,1),(1,2)\}$.
Порахуємо ймовірності цих подій:

$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.
Якщо відомо, що подія B відбулася, тоді подія A могла відбутися тоді і тільки тоді, якщо відбулася одна з елементарних подій (1,1) або (1,2). Тому:
$P(A|B) = \frac{2}{3} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. ∇

Приклад 19. На квадрат зі стороною одиничної довжини кидаємо точку. Треба знайти ймовірність того, що точка попала в множину A за додатковим припущенням, що точка попадає в множину B ($m(B) > 0$).



$\triangle$ Безпосередньо з малюнка та формули геометричної ймовірності випливає, що шукана ймовірність обчислюється за формулою: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. ∇

Означення 8. Нехай B – випадкова подія така, що $P(B) > 0$. Умовною ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B називається: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
Властивості:

1. $P(A|B) \in [0, 1]$.
2. $P(B|B) = 1$.
3. $P(\Omega|B) = 1$.
4. Для довільного набору $A_1, ..., A_n, ...$ попарно несумісних подій ($A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$) має місце наступна рівність: $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$.
   $\triangle$ $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \frac{1}{P(B)} P((\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B) = \frac{1}{P(B)} P(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B)) =$
   $= \frac{1}{P(B)} \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$. ∇
5. Формула множення. Нехай $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, тоді:
   $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$.

   Наслідок 4. $P(A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot .... \times$
   $\times P(A_n|A_{n-1} \cap .... \cap A_1)$.

Зауваження 1. При обчисленні умовних ймовірностей можна розглядати новий простір елементарних подій $\Omega' = B$, випадкові події $A \cap B$ та ймовірність $P(\cdot|B)$.

1.6 Формула повної ймовірності

Означення 9. Набір випадкових подій $H_1, ..., H_m$ утворює повну групу подій (ПГП), якщо

1. $H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j$ (несумісні події);

2. $H_1 \cup .... \cup H_m = \Omega$.

Теорема 1. (Формула повної ймовірності). Нехай $H_1, ..., H_m$ – повна група подій і $P(H_i) > 0, i = \overline{1,m}$. Тоді для довільної випадкової події A виконується:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(H_i)P(A|H_i).$$

$\triangle$ Враховуючи, що подію A можна представити у вигляді наступного об'єднання попарно несумісних подій

$$A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i=1}^{m} H_i) = \cup_{i=1}^{m}(A \cap H_i),$$

отримаємо

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{m} P(H_i)P(A|H_i).$$

∇

Приклад 20. Є m урн: і-та урна містить m_i куль, серед яких k_i білих. З навмання обраної урни витягуємо кулю. Знайти ймовірність того, що вона біла.
$\triangle$ Події H_i={обрана і-та урна} утворюють ПГП і $P(H_i) = \frac{1}{m}$. Нас цікавить ймовірність події: А={обрана біла куля}. Оскільки $P(A|H_i) = \frac{k_i}{m_i}$, то за формулою повної ймовірності маємо: $P(A) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i}{m_i}$. ∇

Приклад 21. Є N екзаменаційних білетів, серед яких n щасливих. Студенти по черзі витягують білети. У кого більша ймовірність витягнути щасливий білет: у того, хто підійшов першим чи другим?
$\triangle$ Введемо події A_i={і-тий студент витягнув щасливий білет}, і=1,2. Введемо повну групу подій: $H_1 = A_1, H_2 = \overline{A}_1$, тоді: $P(H_1) = \frac{n}{N}, P(H_2) = 1 - \frac{n}{N}$. За формулою повної ймовірності:
$P(A_2) = P(H_1)P(A_2|H_1) + P(H_2)P(A_2|H_2) = \frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1} + \frac{N-n}{N}\frac{n}{N-1} = \frac{n}{N(N-1)}(n-1+$
$+N-n) = \frac{n}{N} = P(A_1)$. ∇

1.7 Формули Байєса

Теорема 2. (Формули Байєса). Нехай $H_1, ..., H_m$ – повна група подій, причому $P(H_i) > 0, i = \overline{1,m}$. Тоді для довільної випадкової події B виконується:

$$P(H_i|B) = \frac{P(H_i)P(B|H_i)}{\sum_{k=1}^{m} P(H_k)P(B|H_k)}.$$

$\triangle$ За формулою умовної ймовірності, формулою множення та формулою повної ймовірності маємо

$$P(H_i|B) = \frac{P(H_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(H_i)P(B|H_i)}{\sum_{k=1}^{m} P(H_k)P(B|H_k)}.$$

∇

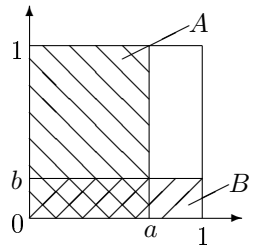
Приклад 22. Задача Керрола. В урні знаходиться 1 куля: біла або чорна. В урну поклали білу кулю, кулі перемішали, після чого навмання витягли кулю, яка виявилась білою. Яка ймовірність того, що після цього з урни витягнуть білу кулю.
$\triangle$ Маємо наступні події: H_1={в урні знаходилася біла куля}, H_2={в урні знаходилася чорна куля}, B={витягли білу кулю}. За формулою Байєса
$P(H_1|B) = \frac{P(H_1)P(B|H_1)}{P(H_1)P(B|H_1)+P(H_2)P(B|H_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$. ∇

1.8 Незалежні випадкові події

Означення 10. Випадкові події A, B називаються незалежними, якщо виконується наступна рівність: $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Приклад 23. Монета підкидається двічі. Перевірити незалежність подій:
A={в перший раз випав герб}, B={в другий раз випав герб}.
$\triangle$ A={ГГ, ГР}, $P(A) = \frac{1}{2}$; B={РГ, ГГ}, $P(B) = \frac{1}{2}$; $A\cap B$={ГГ}, $P(A\cap B) = \frac{1}{4}$.
Отже, події A і B – незалежні. ∇

Приклад 24. На квадрат зі стороною одиничної довжини кидається точка. Перевірити незалежність подій: $A = \{x \le a\}$ і $B = \{y \le b\}$ $(a, b \in (0, 1))$.



$\triangle$ $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = a, P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = b, P(A\cap B) = \frac{m(A\cap B)}{m(\Omega)} = ab$. Отже, події A і B незалежні. ∇
Властивості:

1. Нехай $P(B) > 0$. Події A і B незалежні $\iff$ $P(A|B) = P(A)$.
   $\triangle$ $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \iff P(A\cap B) = P(A)P(B)$. ∇

2. Якщо події A і B незалежні, то події A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і B, $\overline{A}$ і $\overline{B}$ теж є незалежними.
   $\triangle$ Перевіримо незалежність подій A і $\overline{B}$:
   $A\cap\overline{B} = A\backslash(A\cap B) \Rightarrow P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)P(B) =$
   $= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\overline{B})$.
   Отже, події A і $\overline{B}$ є незалежними. Незалежність інших подій перевіряється аналогічно. ∇

Означення 11. Випадкові події $B_1, ..., B_n$ називаються незалежними у сукупності, якщо: $P(B_{i_1}\cap ....\cap B_{i_k}) = P(B_{i_1})\cdot ....\cdot P(B_{i_k}), \forall k = \overline{1,n}, \forall i_1, ..., i_k$.

Зауваження 2. Якщо події незалежні у сукупності, то вони є і попарно незалежними. Обернене твердження, взагалі кажучі, невірне.

Приклад 25. Приклад Бернштейна. На площину кидають правильний тетраедр, три грані якого розфарбовані в червоний, жовтий, зелений кольори, а на четверту

нанесено всі три кольори. Перевірити незалежність наступних подій: $A_{\text{ч}}$=\{випала грань, де є червоний колір\}, $A_{\text{ж}}$=\{випала грань, де є жовтий колір\}, $A_{\text{з}}$=\{випала грань, де є зелений колір\}.
$\triangle$ $P(A_{\text{ч}}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = P(A_{\text{ж}}) = P(A_{\text{з}})$, $P(A_{\text{ч}} \cap A_{\text{ж}}) = \frac{1}{4} = P(A_{\text{ч}} \cap A_{\text{з}}) = P(A_{\text{ж}} \cap A_{\text{з}})$.
Отже, події є попарно незалежними.

$P(A_{\text{ч}} \cap A_{\text{ж}} \cap A_{\text{з}}) = \frac{1}{4} \neq P(A_{\text{ч}})P(A_{\text{ж}})P(A_{\text{з}}) = \frac{1}{8}$.
Отже, події не є незалежними у сукупності. ∇

2 Випадкові величини і функції розподілу

2.1 Випадкові величини і їх розподіли

Означення 12. Випадковою величиною називається функція $\xi : \Omega \to R$, яка кожній елементарній події ставить у відповідність дійсне число так, що $\forall x \in R$ $\{\omega : \xi(\omega) < x\}$ є випадковою подією.
Надалі будемо використовувати позначення: $\{\omega : \xi(\omega) \in B\} = \{\xi \in B\}$.

Приклад 26. Монета підкидається двічі. Нехай ξ – число появ герба. Знайти ймовірність події $P\{\xi \leq 1\}$.
$\triangle$ Маємо простір елементарних подій: Ω = {ГГ, РГ, ГР, РР} і таблицю значень випадкової величини $\xi = \xi(\omega)$:

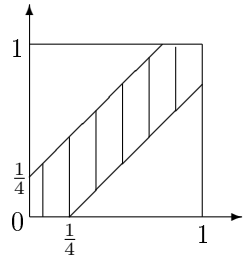
ω	ГГ	РГ	ГР	РР
$\xi(\omega)$	2	1	1	0

.

Звідси: $P\{\omega : \xi(\omega) \leq 1\} = P\{\xi \leq 1\} = \frac{3}{4}$. ∇

Приклад 27. Монета підкидається до першої появи герба. Нехай ξ – число підкидань. Знайти ймовірність події $P\{\xi > 2\}$.
$\triangle$ Маємо простір елементарних подій: Ω = {Г, РГ, РРГ, ... , Р....РГ, ...} і випадкову величину $\xi(\omega_n) = n$. Звідси: $P\{\xi > 2\} = 1 - P\{\xi \leq 2\} = 1 - P(\{\xi = 1\} \cup \{\xi = 2\}) =$ (несумісні події) $= 1 - P\{\xi = 1\} - P\{\xi = 2\} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. ∇

Приклад 28. Нехай випадкова величина ξ – час очікування із "задачі про зустріч"(приклад 9), де максимальний час очікування $T = 1$. Знайти ймовірність події $P\{\xi < \frac{1}{4}\}$.



$\triangle$ Маємо простір елементарних подій: $\Omega = [0,1]^2 = \{(x,y) : x,y \in [0,1]\}$ і випадкову величину $\xi(\omega) = |x - y|, \omega = (x,y)$. Звідси: $P\{\xi < \frac{1}{4}\} = 1 - \frac{3^2}{4^2} = \frac{7}{16}$. ∇

Означення 13. Випадкова величина має дискретний розподіл, якщо множина її значень скінчена або злічена (множину значень можна порахувати). Іншими словами: існує скінчений або злічений набір дійсних чисел $\{a_n : n \geq 1\}$ і набір ймовірностей $\{p_n : n \geq 1\}$ таких, що: а) $P\{\xi = a_n\} = p_n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$.

Зауваження 3. $P\{\xi \in B\} = \sum\limits_{a_i \in B} p_i$, $B \subset R$.

Зауваження 4. Дискретний розподіл зручно задавати таблицею:

ξ	a_1	a_2	....	a_n	....
P	p_1	p_2	....	p_n	....

.

Приклад 29. Задати розподіл випадкової величини із прикладу 22.

$\triangle$ Маємо:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

. ∇

Приклад 30. Задати розподіл випадкової величини із прикладу 23.

$\triangle$ Маємо:

ξ	1	2	....	n	....
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	....	$\frac{1}{2^n}$	....

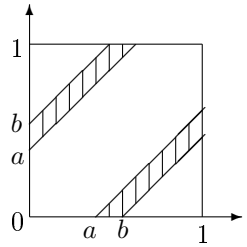
. ∇

Означення 14. Випадкова величина ξ має абсолютно неперервний розподіл, якщо існує невід'ємна функція $f_\xi(x), x \in R$ така, що: $P\{a < \xi < b\} = \int_a^b f_\xi(x)dx$. Функція f_ξ називається густиною розподілу.

Зауваження 5. $P\{\xi \in R\} = \int\limits_R f_\xi(x)dx = 1.$

Зауваження 6. $P\{\xi \in B\} = \int\limits_B f_\xi(x)dx.$

Приклад 31. Знайти густину розподілу часу очікування із прикладу 24.



$\triangle$ Нехай $0 \le a < b \le 1$, тоді: $P\{a < \xi < b\} = 2\frac{1}{2}((1-a)^2 - (1-b)^2) = 2\int_a^b (1-x)dx$.

Отже: $f_\xi(x) = \begin{cases} 2(1-x), x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$ – густина розподілу. ∇

Зауваження 7. Кожна випадкова величина задає свій розподіл одиничної маси на R. Якщо випадкова величина має дискретний розподіл, це означає, що в точках a_i зосереджена маса p_i. Якщо випадкова величина має абсолютно неперервний розподіл з густиною $f_\xi(x)$, то одинична маса розподілена вздовж прямої з густиною розподілу маси $f_\xi(x)$.

2.2 Функція розподілу випадкової величини та її властивості

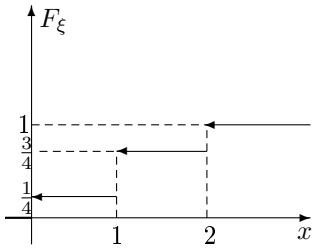
Означення 15. Функцією розподілу випадкової величини ξ називається функція $F_\xi(x)$, яка при кожному $x \in R$ дорівнює ймовірності, з якою ξ приймає значення менші за x: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$.

Приклад 32. Нехай ξ має розподіл:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

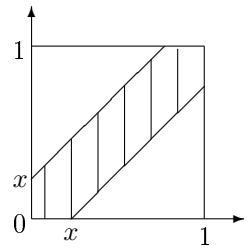
. Знайти $F_\xi(x)$.

$\triangle$ $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \frac{1}{4}, 0 < x \le 1 \\ \frac{3}{4}, 1 < x \le 2 \\ 1, x > 2 \end{cases}$.



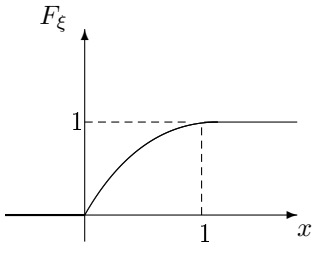
∇

Приклад 33. Нехай ξ – час очікування із "задачі про зустріч"(приклад 24). Знайти $F_\xi(x)$.



$\triangle$ $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = |x \in [0,1]| = 1 - (1-x)^2$,

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1-(1-x)^2, 0 < x \le 1 \\ 1, x > 2 \end{cases} .$$



∇

Властивості функції розподілу.

1. F_ξ неспадна функція: $x_1 \le x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$
3. F_ξ неперервна зліва: $\forall x \in R\ F_\xi(x-0) = F_\xi(x)$.

Зауваження 8. Властивості (1)-(3) є необхідною і достатньою умовою того, що деяка функція F є функцією розподілу деякої випадкової величини.

Зауваження 9. $P\{a \le \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.
$\triangle$ $P\{a \le \xi < b\} = P\{\{\xi < b\} \setminus \{\xi < a\}\} = P\{\xi < b\} - P\{\xi < a\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$. ∇

Зауваження 10. Якщо ξ має абсолютно неперервний розподіл з густиною $f_\xi(x)$, то: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$, причому $F_\xi \in C(R)$ і $f_\xi(x) = F'_\xi(x)$ (за виключенням, можливо, не більш ніж зліченої множини точок, в яких F'_ξ може не існувати. В цих точках f_ξ можна покласти довільне значення).

2.3 Приклади розподілів

Дискретні розподіли.

1. $\xi \sim 1_a$ – вироджений розподіл в точці a: $\begin{array}{|c|c|}\hline \xi & a \\ \hline \text{P} & 1 \\ \hline \end{array}$.

2. $\xi \sim B_{n,p}$ – біноміальний розподіл з параметрами n, p $(n \in N, p \in (0,1))$.
   Є n незалежних випробувань. В кожному випробуванні можливі 2 наслідки: У (успіх) з ймовірністю p і Н (невдача) з ймовірністю $q = 1-p$. Тоді розподіл ξ – числа успіхів серед n випробувань називається біноміальним розподілом: $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

ξ	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

3. $\xi \sim G_p$ – геометричний розподіл з параметром p $(p \in (0,1))$.
   Є послідовність незалежних випробувань. В кожному випробуванні можливі 2 наслідки: У (успіх) з ймовірністю p і Н (невдача) з ймовірністю $q = 1-p$. Випробування відбуваються до першої появи У. Тоді розподіл ξ – числа випробувань називається геометричним розподілом: $P\{\xi = n\} = q^{n-1}p$.

ξ	1	2	...	n	...
P	p	qp	...	$q^{n-1}p$	...

   Вправа 3. Довести, що $P\{\xi = n+m | \xi \geq n\} = P\{\xi = m\}, m \geq 1$ ("відсутність післядії").

4. $\xi \sim P_\lambda$ – розподіл Пуассона з параметром $\lambda, (\lambda > 0)$:
   $P\{\xi = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n \geq 0$.

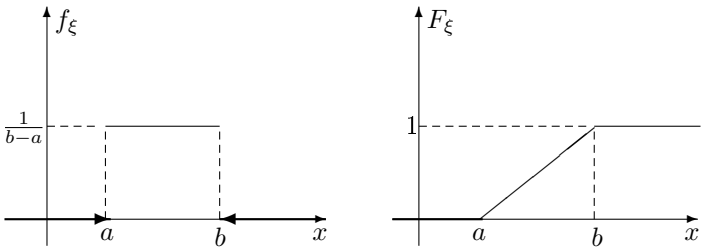
ξ	0	1	2	...	n	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$	...

   Зауваження 11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 1$.

Абсолютно неперервні розподіли.

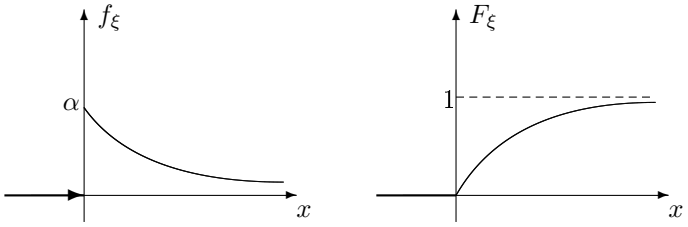
1. $\xi \sim U_{[a,b]}$ – рівномірний розподіл на $[a,b]$. На відрізок $[a,b]$ (геометрична ймовірність) випадково кидається точка: $\omega = x, x \in [a,b]$. Рівномірним розподілом називається розподіл випадкової величини: $\xi(\omega) = x - a$ (відстань до точки a). Тоді:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}, \; F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x \le b \\ 1, x > b \end{cases}.$$



2. $\xi \sim E_\alpha$ – показниковий розподіл з параметром $\alpha > 0$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}, \; F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}.$$

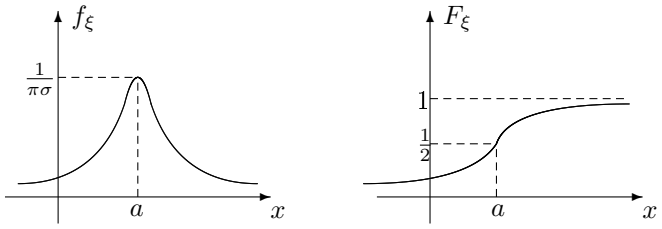


Приклад 34. Розглядається деякий прилад, який почав роботу в час $t = 0$. Нехай ξ – тривалість безвідмовної роботи приладу і припустимо, що:

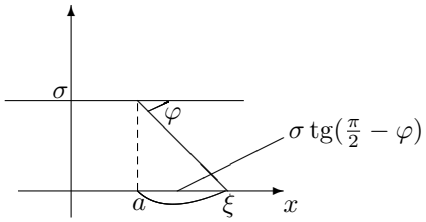
$P\{\xi \in (t, t+\Delta t) | \xi \ge t\} = \alpha \Delta t + o(\Delta t)$. Тоді $\xi \sim E_\alpha$.
$\triangle$ Нехай $Q(t) = P\{\xi \ge t\} \Rightarrow Q(t+\Delta t) = P\{\xi \ge t+\Delta t\} =$ (формула множення)
$= P\{\xi \ge t\} P\{\xi \ge t + \Delta t | \xi \ge t\} = Q(t)(1 - P\{\xi \in (t, t+\Delta t) | \xi \ge t\}) =$
$= Q(t)(1 - \alpha \Delta t + o(\Delta t)) \Rightarrow \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = -\alpha Q(t) + o(1), \Delta t \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow Q'(t) = -\alpha Q(t), Q(0) = 1 \Rightarrow Q(t) = e^{-\alpha t} \Rightarrow F_\xi(t) = P\{\xi < t\} = 1 - Q(t) =$
$= 1 - e^{-\alpha t}, t > 0$. ∇

Вправа 4. Довести, що $P\{\xi \ge x + y | \xi \ge x\} = P\{\xi \ge y\}$ ("відсутність післядії").

3. $\xi \sim C_{a,\sigma}$ – розподіл Коші зпараметрами $a \in R, \sigma > 0$:
$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-a)^2}$, $F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\sigma}$.



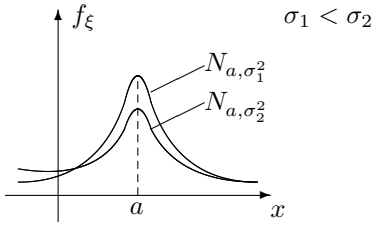
Приклад 35. З точки площини (a, σ) випускають промінь світла в напрямку осі Ox під випадковим кутом $\varphi \sim U_{[0,\pi]}$. Тоді абсциса перетину променя з віссю Ox: $\xi = a + \sigma \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ має розподіл Коші.



$\triangle$ $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{a + \sigma \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi) < x\} = P\{\frac{\pi}{2} - \varphi < \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\sigma}\} =$
$= P\{\varphi > \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\sigma}\} = 1 - P\{\varphi \le \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\sigma}\} = 1 - F_\varphi(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\sigma}) =$
$= |F_\varphi(x) = \frac{1}{\pi}(x - 0) = \frac{x}{\pi}| = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\sigma} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{\sigma}$. ∇

4. $\xi \sim N_{a,\sigma^2}$ – нормальний розподіл з параметрами a, σ^2 $(a \in R, \sigma > 0)$:

   $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x \in R.$



   $\xi \sim N_{0,1}$ $(a = 0, \sigma = 1)$ – стандартний нормальний розподіл:

   $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, $F_\xi(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy.$

   Властивості.

   (a) $\xi \sim N_{a,\sigma^2} \Rightarrow \frac{\xi - a}{\sigma} \sim N_{0,1}$, $F_\xi(x) = \Phi(\frac{x-a}{\sigma})$.

   (b) $\xi \sim N_{a,\sigma^2} \Rightarrow P\{|\xi - a| < 3\sigma\} = 0,9973 \approx 1$ ("правило 3σ").

Теорема 3. Лінійне перетворення випадкових величин. Нехай випадкова величина ξ має абсолютно неперервний розподіл з густиною $f_\xi(x)$ і нехай $a \neq 0$, тоді випадкова величина $\eta = a\xi + b$ має густину розподілу $f_\eta(x) = \frac{1}{|a|} f_\xi(\frac{x-b}{a})$.
$\triangle$ Нехай $a > 0 \Rightarrow F_\eta(x) = P\{a\xi + b < x\} = P\{\xi < \frac{x-b}{a}\} = F_\xi(\frac{x-b}{a}) \Rightarrow f_\eta(x) =$
$= \frac{1}{a} f_\xi(\frac{x-b}{a})$.

Нехай $a < 0 \Rightarrow F_\eta(x) = P\{a\xi + b < x\} = P\{\xi > \frac{x-b}{a}\} = 1 - P\{\xi \le \frac{x-b}{a}\} =$
$= 1 - F_\xi(\frac{x-b}{a}) \Rightarrow f_\eta(x) = -\frac{1}{a} f_\xi(\frac{x-b}{a})$. ∇

Наслідок 5. Деякі лінійні перетворення.

1. $\xi \sim N_{0,1} \Rightarrow \eta = \sigma\xi + a \sim N_{a,\sigma^2}$.
2. $\xi \sim N_{a,\sigma^2} \Rightarrow \eta = c\xi + d \sim N_{ca+d,c^2\sigma^2}$.

3. $\xi \sim U_{[a,b]} \Rightarrow \eta = c\xi + d \sim U_{[ca+d,cb+d]}$ $(c > 0)$.

4. $\xi \sim E_\alpha \Rightarrow \eta = \alpha\xi \sim E_1$.

2.4 Спільний розподіл випадкових величин

Нехай $\xi_1, ..., \xi_n$ – випадкові величини. Через $\vec{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_n)$ будемо позначати випадковий вектор, складений із випадкових величин $\xi_1, ..., \xi_n$.

Означення 16. Функцією розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$ (спільною функцією розподілу випадкових величин $\xi_1, ..., \xi_n$) називається:
$F(x_1, ..., x_n) = P\{\xi_1 < x_1, ..., \xi_n < x_n\}$.
Надалі $n = 2$ і $F_{\xi,\eta}(x, y) = P\{\xi < x, \eta < y\}$ – спільна функція розподілу (ξ, η).
Властивості.

1. $F_{\xi,\eta}(x, y)$ неспадна по x, y.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = 0$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F_{\xi,\eta}(x, y) = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\eta(y)$, $\lim\limits_{y\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x)$.

2.5 Дискретний спільний розподіл випадкових величин

Нехай ξ і η – дискретні випадкові величини з розподілами:

ξ	a_1	a_2	....	a_n	....
P	p_1^ξ	p_2^ξ	....	p_n^ξ	....

,

η	b_1	b_2	....	b_n	....
P	p_1^η	p_2^η	....	p_n^η	....

.

Означення 17. Дискретним спільним розподілом випадкових величин ξ і η називаються наступні ймовірності: $P\{\xi = a_i, \eta = b_j\} = p_{ij}$.
Спільний розподіл ξ і η зручно задавати таблицею:

$\xi\backslash\eta$	b_1	b_2	....	b_n	....	Σ
a_1	p_{11}	p_{12}	....	p_{1n}	....	p_1^ξ
a_2	p_{21}	p_{22}	....	p_{2n}	....	p_2^ξ
....	....	....	....	....	....	....
a_n	p_{n1}	p_{n2}	....	p_{nn}	....	p_n^ξ
....	....	....	....	....	....	....
Σ	p_1^η	p_2^η	....	p_n^η	....	1

.

Приклад 36. Монету підкидають тричі. Нехай ξ – кількість гербів, що випали при перших двох підкиданнях, а η – кількість решіток, що випали при усіх трьох підкиданнях. Записати спільний розподіл ξ і η.
△ Маємо наступний простір елементарних подій:
$\Omega = \{$ГГГ, ГГР, ГРГ, ГРР, РГГ, РГР, РРГ, РРР$\}$.
Звідси маємо наступні розподіли ξ, η і їх спільний розподіл:

ξ	0	1	2
P	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$

,

η	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

,

$\xi\backslash\eta$	0	1	2	3	Σ
0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
1	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{4}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{2}{8}$
Σ	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

. ∇

2.6 Абсолютно неперервний спільний розподіл

Означення 18. Випадкові величини ξ і η мають абсолютно неперервний спільний розподіл з густиною $f(x,y)$, якщо

$P\{a<\xi<b, c<\eta<d\} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy$, де $f(x,y)\geq 0\ \forall x,y\in R$.

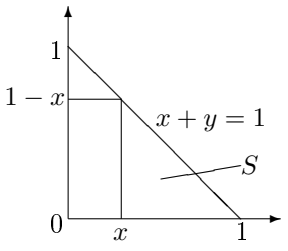
Властивості:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$.
2. $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu$.
3. $f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)$ в тих точках, де похідна існує.
4. $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$, $f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$.

Приклади багатовимірних розподілів.

1. $(\xi,\eta)\sim U_S$ мають рівномірний розподіл на S, де S – множина точок площини $(0<m(S)<+\infty)$, якщо $f(x,y) = \begin{cases}\frac{1}{m(S)}, (x,y)\in S\\ 0, (x,y)\notin S\end{cases}$.
2. $(\xi_1,....,\xi_n)\sim N_{\vec{0},I}$ мають нормальний розподіл з параметрами $\vec{0} = (0,....,0)$, I – одинична матриця, якщо $f(x_1,....,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+....+x_n^2)}$.

Приклад 37. Нехай $(\xi,\eta)\sim U_S$, де S – прямокутний рівнобедренний трикутник з одиничним катетом. Знайдемо щільність спільного розподілу (ξ,η), а також щільності розподілів ξ і η.



$\triangle$ $m(S) = \frac{1}{2}$, отже $f(x,y) = \begin{cases}2, (x,y)\in S\\ 0, (x,y)\notin S\end{cases}$,

$f_\xi(x) = \int_0^{1-x} f(x,y)dy = 2(1-x), x\in(0,1)$,

$f_\eta(y) = \int_0^{1-y} f(x,y)dx = 2(1-y), y\in(0,1)$.

Як бачимо, $f(x,y)\neq f_\xi(x)f_\eta(y)$, тобто $f_\xi(x), f_\eta(y)$ не визначають $f(x,y)$. ∇

2.7 Незалежні випадкові величини

Означення 19. Випадкові величини $\xi_1, ..., \xi_n$ називаються незалежними, якщо $\forall B_1, ..., B_n$: $P\{\xi_1 \in B_1, ..., \xi_n \in B_n\} = P\{\xi_1 \in B_1\} \cdot ..... \cdot P\{\xi_n \in B_n\} \Leftrightarrow$ (рівносильне означення) $\forall x_1, ..., x_n : F(x_1, ..., x_n) = F(x_1) \cdot .... \cdot F(x_n)$.

Наслідок 6. Якщо $\xi_1, ..., \xi_n$ мають дискретний розподіл, то $\xi_1, ..., \xi_n$ незалежні $\Leftrightarrow \forall a_1, ..., a_n : P\{\xi_1 = a_1, ..., \xi_n = a_n\} = P\{\xi_1 = a_1\} \cdot .... \cdot P\{\xi_n = a_n\}$.

Наслідок 7. Якщо $\xi_1, ..., \xi_n$ мають абсолютно неперервний розподіл, то $\xi_1, ..., \xi_n$ незалежні $\Leftrightarrow \forall x_1, ..., x_n : f(x_1, ..., x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot .... \cdot f_{\xi_n}(x_n)$.

Приклад 38. Нехай $(\xi_1, ..., \xi_n) \sim N_{\vec{0},I}$. Перевіримо $\xi_1, ..., \xi_n$ на незалежність.

$\triangle$ $f(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + ... + x_n^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdot .... \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}} =$
$= f_{\xi_1}(x_1) \cdot .... \cdot f_{\xi_n}(x_n) \Rightarrow \xi_1, ..., \xi_n$ – незалежні. ∇

2.8 Розподіл суми незалежних випадкових величин

Теорема 4. Нехай ξ, η – незалежні випадкові величини, які мають абсолютно неперервний розподіл з густинами $f_\xi(x), f_\eta(y)$, тоді густина розподілу випадкової величини $\xi + \eta$ дорівнює згортці функцій $f_\xi(x), f_\eta(y)$:
$f_{\xi+\eta} = f_\xi * f_\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(z-x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(y) f_\xi(z-y) dy$.
$\triangle$ $F_{\xi+\eta}(z) = P\{\xi + \eta < z\} = |B_z = \{(x, y) : x + y < z\}| = P\{(\xi, \eta) \in B_z\} =$
$= \iint_{B_z} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_\xi(x) f_\eta(y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) \int_{-\infty}^{z-x} f_\eta(y) dy dx =$
$= |x' = x, y' = y + x, y' \in (-\infty, z)| = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) \int_{-\infty}^{z} f_\eta(y - x) dy dx =$
$= \int_{-\infty}^{z} dy \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) f_\eta(y - x) dx$. ∇

Наслідок 8. Стійкість по підсумовуванню.

1. $\xi \sim N_{a_1, \sigma_1^2}$, $\eta \sim N_{a_2, \sigma_2^2}$, ξ, η – незалежні $\Rightarrow \xi + \eta \sim N_{a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.
2. $\xi \sim B_{n,p}$, $\eta \sim B_{m,p}$, ξ, η – незалежні $\Rightarrow \xi + \eta \sim B_{n+m,p}$.
3. $\xi \sim P_{\lambda_1}$, $\eta \sim P_{\lambda_2}$, ξ, η – незалежні $\Rightarrow \xi + \eta \sim P_{\lambda_1 + \lambda_2}$.

3 Математичне сподівання

3.1 Математичне сподівання випадкової величини з дискретним розподілом

Нехай ξ – випадкова величина з дискретним типом розподілу:

ξ	a_1	a_2	....	a_n
P	p_1	p_2	....	p_n

Означення 20. Математичним сподіванням випадкової величини з дискретним типом розподілу називається

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P\{\xi = a_n\}$$

за умови, що даний ряд збігається абсолютно ($\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|p_n < +\infty$). В протилежному випадку математичне сподівання ξ не існує або дорівнює $+\infty$.

Зауваження 12. Математичне сподівання дискретної випадкової величини можна розглядати як координати центру мас на прямій, де в точках a_i зосереджена маса p_i.

Приклад 39. Знайдемо математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ з розподілом $\begin{array}{c|c|c|c|c|} \xi & a_1 & a_2 & .... & a_n \\ \hline \mathrm{P} & 1/n & 1/n & .... & 1/n \\ \hline \end{array}$.
$\triangle$ $M\xi = \frac{a_1+....+a_n}{n}$. ∇

Приклад 40. Знайдемо математичне сподівання розподілу Пуасона з параметром λ.
$\triangle$ $M\xi = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = |n-1 := k| = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} =$
$= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$. ∇

Вправа 5. Довести, що математичне сподівання біноміального розподілу з параметрами n, p дорівнює np.

Вправа 6. Довести, що математичне сподівання геометричного розподілу з параметром p дорівнює q/p.

3.2 Математичне сподівання випадкової величини з абсолютно неперервним типом розподілом

Нехай ξ – випадкова величина, яка має абсолютно неперервний тип розподілу з густиною $f_\xi(x)$ ($f_\xi(x)dx = dF_\xi(x)$).

Означення 21. Математичним сподіванням випадкової величини, яка має абсолютно неперервний тип розподілу з густиною $f_\xi(x)$ називається

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x)$$

за умови, що даний інтеграл збігається абсолютно ($\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f_\xi(x)dx < +\infty$). В протилежному випадку математичне сподівання ξ не існує або дорівнює $+\infty$.

Зауваження 13. Математичне сподівання абсолютно неперервної випадкової величини можна розглядати як координати центру мас на прямій з густиною розподілу одиничної маси $f_\xi(x)$.

Приклад 41. Знайдемо математичне сподівання рівномірного розподілу на відрізку $[a, b]$.
$\triangle$ $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{2}\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{a+b}{2}$. ∇

Приклад 42. Знайдемо математичне сподівання нормального розподілу з параметрами a, σ^2.
$\triangle$ $M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}(y+a)^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy =$
$= a$. ∇

Вправа 7. Довести, що математичне сподівання показникового розподілу з параметром α дорівнює $\frac{1}{\alpha}$.

Приклад 43. Знайдемо математичне сподівання розподілу Коші з параметрами $0, 1$.
$\triangle$ Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_\xi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}dx = +\infty$, математичне сподівання не існує. ∇

3.3 Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання функції від випадкової величини. Нехай $g(x)$ – функція, що приймає дійсні значення. Тоді:
   $Mg(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g(a_n)p_n$, якщо ξ має дискретний тип розподілу;
   $Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_\xi(x)dx$, якщо ξ має абсолютно неперервний тип розподілу.

   Приклад 44. Нехай $\xi \sim B_{n,p}$ має біноміальний розподіл з параметрами n, p, $g(x) = x^3$.
   $\triangle$ $M\xi^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 C_n^k p^k q^{n-k}$. ∇

   Приклад 45. Нехай $\xi \sim P_\lambda$ має розподіл Пуасона з параметром λ.
   $\triangle$ $M(\xi - 4)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n-4)^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$. ∇

   Приклад 46. Нехай $\xi \sim U_{[a,b]}$ має рівномірний розподіл на відрізку $[a, b]$.
   $\triangle$ $M\sin\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x f_\xi(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \sin x dx = \frac{\cos a - \cos b}{b-a}$. ∇

   Приклад 47. Нехай $\xi \sim N_{a,\sigma^2}$ має нормальний розподіл з параметрами a, σ^2.
   $\triangle$ $Me^{i\xi t} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = e^{ita - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$. ∇

   Зауваження 14. Аналогічне визначення математичного сподівання функції від випадкового вектора. Нехай ξ, η – випадкові величини з густиною спільного розподілу $f(x, y)$, $g(x, y)$ – функція двох змінних. Тоді:
   $Mg(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)f(x, y)dxdy$.

2. $Mc = c$ $(\xi = const)$.

3. $Mc\xi = cM\xi$.

4. $\forall\alpha, \beta$ $M(\alpha\xi + \beta\xi) = \alpha M\xi + \beta M\eta$.

5. $\xi \geq 0 \Rightarrow M\xi \geq 0$.

   Наслідок 9. 1) $\xi \leq \eta \Rightarrow M\xi \leq M\eta$; 2) $a \leq \xi \leq b \Rightarrow a \leq M\xi \leq b$.

6. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин. Якщо ξ, η – незалежні випадкові величини, то $M\xi\eta = M\xi M\eta$.

   Зауваження 15. Обернене твердження, взагалі кажучі, невірне.

   Наслідок 10. ξ, η – незалежні $\Rightarrow Mg(\xi)h(\eta) = Mg(\xi)Mh(\eta)$.

3.4 Моменти k-го порядку від випадкових величин. Дисперсія випадкових величин

Нехай ξ – випадкова величина, тоді $\eta = \xi - M\xi$ – центрована випадкова величина $(M\eta = 0)$. Нехай $\forall k \in N$ виконується умова: $M|\xi|^k < \infty$.

Означення 22. Моментом k-го порядку випадкової величини ξ називається число $M\xi^k$. Центральним моментом k-го порядку випадкової величини ξ називається число $M(\xi - M\xi)^k$.

Означення 23. Дисперсією випадкової величини ξ називається центральний момент 2-го порядку: $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$. Середньоквадратичним відхиленням випадкової величини ξ називається величина $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$.

Зауваження 16. Дисперсія та середньоквадратичне відхилення характеризують наскільки тісно групуються значення випадкової величини ξ навколо $M\xi$.

Властивості дисперсії:

1. $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.
   $\triangle$ $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 - M\xi^2 - (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$. ∇
2. $D(c\xi) = c^2 D\xi$.
3. $D\xi \geq 0$.
4. $D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = const$.
5. $D(\xi + c) = D\xi, \forall c \in R$.
6. ξ, η – незалежні $\Rightarrow D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

Приклад 48. Знайдемо дисперсію рівномірного розподілу на відрізку $[a, b]$.
$\triangle$ $M\xi^2 = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}\frac{b^3 - a^3}{b-a} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$.
$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$. ∇

Приклад 49. Знайдемо дисперсію розподілу Пуасона з параметром λ.
$\triangle$ $M\xi(\xi - 1) = M\xi^2 - M\xi = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} =$
$= |n - 2 := k| = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2 \Rightarrow M\xi^2 = \lambda^2 + \lambda$.
$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda$. ∇

Вправа 8. Довести, що дисперсія біноміального розподілу з параметрами n, p дорівнює npq.

Вправа 9. Довести, що дисперсія геометричного розподілу з параметром p дорівнює q/p^2.

Вправа 10. Довести, що дисперсія нормального розподілу з параметрами a, σ^2 дорівнює σ^2.

Вправа 11. Довести, що дисперсія показникового розподілу з параметром α дорівнює $\frac{1}{\alpha^2}$.

3.5 Характеристики залежності випадкових величин

Означення 24. Коваріацією випадкових величин ξ і η називається число
$cov(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta$.
Коефіцієнтом кореляції випадкових величин ξ і η називається число
$\rho(\xi, \eta) = \frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$.

Зауваження 17. Якщо $cov(\xi,\eta)\neq 0$, випадкові величини ξ і η – залежні. Обернене твердження, взагалі кажучі, невірне.

Властивості:

1. $cov(\xi,\xi)=D\xi$.
2. $cov(\xi,\eta)=cov(\eta,\xi)$.
3. $cov(\alpha\xi_1+\beta\xi_2,\eta)=\alpha cov(\xi_1,\eta)+\beta cov(\xi_2,\eta)$.
4. $cov(\xi,\eta)=0\Rightarrow \xi,\eta$ – некорельовані.

Означення 25. Нехай $\vec{\xi}=(\xi_1,....,\xi_n)$ – випадковий вектор. Матрицею коваріації випадкового вектора $\vec{\xi}$ називається

$$\Sigma_{\vec{\xi}}=\begin{pmatrix} cov(\xi_1,\xi_1) & \dots & cov(\xi_1,\xi_n)\\ \vdots & & \vdots\\ cov(\xi_n,\xi_1) & \dots & cov(\xi_n,\xi_n)\end{pmatrix}.$$

4 Граничні теореми теорії ймовірностей

4.1 Нерівність Чебишева

Теорема 5. Загальна нерівність Чебишева. Нехай $g(x)$ – додатна неспадна функція, $\xi\geq 0$ – випадкова величина. Тоді: $P\{\xi\geq c\}\leq\frac{Mg(\xi)}{g(c)}$.

Наслідок 11. $P\{|\xi|\geq c\}\leq\frac{M|\xi|}{c}$.

Теорема 6. Нерівність Чебишева для дисперсій. $\forall c>0: P\{|\xi-M\xi|\geq c\}\leq\frac{D\xi}{c^2}$.

Приклад 50. Нехай $M\xi=a, D\xi=\sigma^2, c=k\sigma$. Запишемо нерівність Чебишева для дисперсій.

$\triangle$ $P\{|\xi-a|\geq k\sigma\}\leq\frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2}=\frac{1}{k^2}$. ∇

Приклад 51. Нехай у попередньому прикладі $\xi\sim N_{a,\sigma^2}$ має нормальний розподіл з параметрами a,σ^2, і $c=3\sigma$ ("правило 3σ").

$\triangle$ $P\{|\xi-a|\geq 3\sigma\}\leq\frac{1}{9}\approx 0,1$ – оцінка за нерівністю Чебишева.

При безпосередньому обчисленні за означенням отримаємо:

$P\{|\xi-a|<3\sigma\}=P\{\frac{|\xi-a|}{\sigma}<3\}=|\eta:=\frac{|\xi-a|}{\sigma},\eta\sim N_{0,1}|=P\{|\eta|<3\}=$

$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^3 e^{-x^2/2}dx\approx 0,997.$

Отже, більше ніж 99% інформації зосереджено в проміжку $(a-3\sigma,a+3\sigma)$. ∇

4.2 Збіжність за ймовірністю

Нехай $\{\xi_n\}$ – послідовність випадкових величин: $\xi_1,\xi_2,....,\xi_n,....$.

Означення 26. Послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}$ збігається за ймовірністю до випадкової величини ξ: $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$, якщо $\forall\epsilon>0: P\{|\xi_n-\xi|>\epsilon\}\to 0, n\to\infty$.

Властивості:

1. $\xi_n\xrightarrow{P}\xi$, $\eta_n\xrightarrow{P}\eta\Rightarrow\alpha\xi_n+\beta\eta_n\xrightarrow{P}\alpha\xi+\beta\eta$, $\xi_n\eta_n\xrightarrow{P}\xi\eta$, $n\to\infty$.

2. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $f \in C(R) \Rightarrow f(\xi_n) \xrightarrow{P} f(\xi)$, $n \to \infty$.

3. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $|\xi_n| < c \Rightarrow M\xi_n \to M\xi$, $M|\xi_n - \xi| \to 0$, $n \to \infty$.

4. $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $f \in C(R)$ – обмежена $\Rightarrow Mf(\xi_n) \to Mf(\xi)$.

Приклад 52. Нехай $\{\xi_n\}$ – послідовність випадкових величин з розподілом:

ξ_n	0	n
P	$1-1/n$	$1/n$

. Покажемо, що $\xi_n \xrightarrow{P} 0$.

$\triangle$ $P\{|\xi_n - 0| > \epsilon\} = P\{\xi_n > \epsilon\} = P\{\xi_n = n\} = \frac{1}{n} \to 0, n \to \infty$. ∇

4.3 Закон великих чисел

Закон великих чисел (ЗВЧ) – це теореми, що стверджують наступну збіжність:
$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$.

Теорема 7. ЗВЧ Чебишева. Нехай $\{\xi_n\}$ – незалежні випадкові величини такі, що: $\forall n \geq 1$ $\exists D\xi_n$ і $D\xi_n \leq c \Rightarrow$ ЗВЧ.
$\triangle$ $P\{|\frac{\xi_1+....+\xi_n}{n} - \frac{M\xi_1+....+M\xi_n}{n}| > \epsilon\} = P\{|\frac{\xi_1+....+\xi_n}{n} - M\frac{\xi_1+....+\xi_n}{n}| > \epsilon\} \leq$ |за нерівністю Чебишева| $\leq \frac{1}{\epsilon^2} D\frac{\xi_1+....+\xi_n}{n} =$ |незалежність| $= \frac{1}{n^2\epsilon^2}(D\xi_1 + ... + D\xi_n) \leq$
$\leq \frac{nc}{n^2\epsilon^2} = \frac{c}{n\epsilon^2} \to 0, n \to \infty$. ∇

Наслідок 12. Нехай $\{\xi_n\}$ – незалежні випадкові величини, для яких виконується: $M\xi_n = a, D\xi_n \leq c, \forall n \geq 1$. Тоді: $\frac{\xi_1+....+\xi_n}{n} \xrightarrow{P} a, n \to \infty$ (правило середнього арифметичного при обробці результітів).

Наслідок 13. Теорема Бернуллі. Є послідовність випробувань Бернуллі:

ξ_n	0	1
P	q	p

, $\nu_n = \frac{\xi_1+....+\xi_n}{n}$ – частота появи одиниці ("успіху") серед n випробувань. Згідно ЗВЧ: $\nu_n \xrightarrow{P} M\xi_n = p, n \to \infty$. Крім того:
$P\{|\nu_n - p| \geq \epsilon\} \leq \frac{D\nu_n}{\epsilon^2} = \frac{D\frac{\xi_1+....+\xi_n}{n}}{\epsilon^2} = \frac{nD\xi_1}{n^2\epsilon^2} = \frac{pq}{n\epsilon^2}$.

Приклад 53. Монета підкидається 10000 раз. Оцінити ймовірність того, що частота випадань герба відрізняється від $\frac{1}{2}$ на $0,01$ і більше.
$\triangle$ $P\{|\nu_{10000} - \frac{1}{2}| \geq 0,01\} \leq \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{10000\cdot(0,01)^2} = \frac{1}{4}$. В середньому не більше одного разу з чотирьох при 10000 підкидань частота випадіння герба буде відрізнятися від $\frac{1}{2}$ на $0,01$ і більше. ∇

4.4 Центральна гранична теорема

Теорема 8. Центральна гранична теорема (ЦГТ). Нехай $\{\xi_n\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин: $M\xi_n = a, D\xi_n = \sigma^2$, $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. Тоді $P\{\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}} < x\} \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt, n \to \infty$.

Наслідок 14. Теорема Муавра-Лапласа. Нехай $\xi_n \sim B_{n,p_n}$ – схема серій випробувань Бернуллі: $M\xi_n = np, D\xi_n = npq$. Тоді:
$P\{a < \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} < b\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-t^2/2}dt, n \to \infty$.

Приклад 54. При оформленні звіту необхідно скласти 10000 чисел, кожне з яких округлено з точністю 10^{-5}. Припустимо, що похибки, які виникають при обчисленні незалежні і рівномірно розподілені в інтервалі $(-0,5 \cdot 10^{-5}; 0,5 \cdot 10^{-5})$. Знайти межі, в яких з ймовірністю $0,99$ буде лежати сумарна похибка.
$\triangle$ $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$ – сумарна похибка, де $\xi_k \sim U_{(-0,5\cdot 10^{-5}; 0,5\cdot 10^{-5})}$. Для рівномірного розподілу: $M\xi_k = 0, D\xi_k = \sigma^2 = \frac{10^{-10}}{12} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{2\sqrt{3}10^5}$. Отримаємо наступне рівняння для визначення невідомих меж:
$P\{-x < S_n < x\} = P\{\frac{-x}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{x}{\sigma\sqrt{n}}\} \approx \Phi(\frac{x}{\sigma\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{-x}{\sigma\sqrt{n}}) = 1 - 2\Phi(\frac{-x}{\sigma\sqrt{n}}) \approx$
$\approx 0,99$. За таблицею: $\frac{x}{\sigma\sqrt{n}} = 2,576 \Rightarrow x = 2,576 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot 10^{-3} \approx 74 \cdot 10^{-5}$. ∇

4.5 Теорема Пуассона

Нехай $\xi_n \sim B_{n,p_n}$ – схема серій випробувань Бернуллі.

Теорема 9. Нехай $p_n \sim \lambda/n, n \to \infty$, де $\lambda > 0$. Тоді $P\{\xi_n = k\} \sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, n \to \infty$.

Література

[1] Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. - К.: Вища школа, 1979. - 408 с.

[2] Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Елементи комбінаторики. - К.: Вища школа, 1972.

[3] Карташов М.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. - К.: ТВІМС, 2004. - 304 с.

[4] Майборода Р.Є., Сугакова О.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. - К.: ЕКОМЕН, 1998. - 186 с.

[5] Радченко О.М. Теорія ймовірностей. - К.: Вид.-поліг. Центр Київський університет, 2010. - 135 с.