Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем



МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК З КУРСУ «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ»

Київ – 2018

УДК 519.22.35(075.8)
ББК 22.172я73

Рецензенти:
канд. фіз.-мат. наук, доц. Радченко О.М.,
доктор фіз.-мат. наук, доц. Шевченко Г.М.

Єфіменко С.В., Іваненко Д.О., Сугакова О.В.

Методичний посібник з курсу «Теорія ймовірностей»

Методичний посібник призначений для студентів 2 курсу факультету радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем напряму підготовки «Прикладна фізика» при вивченні курсу «Теорія ймовірностей». Посібник повністю відповідає програмі курсу, побудований у відповідності до тематики занять і містить численні задачі для розв'язування на практичних заняттях та для виконання домашніх завдань. Задачі розділені на 2 рівні – типові задачі та задачі підвищеної складності. У посібник включені також індивідуальні домашні завдання, кожне з яких складається з 25 варіантів. На початку розділів наведені детальні теоретичні відомості, необхідні для виконання завдань, а також багато розібраних прикладів. В кінці посібника наведені додатки – таблиці деяких розподілів, необхідних при виконанні завдань.

Затверджено вченою радою факультету радіофізики,
електроніки і комп'ютерних систем
(протокол №4 від 12 листопада 2018 року)

УДК 519.22.35(075.8)
ББК 22.172я73

© Єфіменко С.В., Іваненко Д.О., Сугакова О.В., 2018
© Видавнича лабораторія факультету
радіофізики, електроніки і комп'ютерних систем
Київського університету імені Тараса Шевченка

Тема 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ.....3
Тема 2. ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ.....10
Тема 3. УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. 17
Тема 4. ПОСЛІДОВНОСТІ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ.....26
Тема 5. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ 32
Тема 6. ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ (БАГАТОВИМІРНІ РОЗПОДІЛИ) 44
Тема 7. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.....55
Тема 8. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ 63
Індивідуальна домашня робота №1 69
«Основи теорії ймовірностей» 69
Індивідуальна домашня робота №2 80
«Випадкові величини і вектори та їх характеристики» 80
Додаток 1 99
Додаток 2. 100
Додаток 3 101
Література.....103

Тема 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Комбінаторика

Основний принцип комбінаторики (Правило множення).

Нехай треба виконати одне за одним k дій. Першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, третю – n_3 і т. д., к-ту дію можна виконати n_k способами. Тоді всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ способами.

Приклад 1.1. В кафе подають 4 перших страви, 5 других і 3 види десертів. Скількома способами можна скласти з цих страв повноцінний обід?

Розв'язок. Нам треба виконати три дії: вибрати першу страву, другу та десерт. За правилом множення перемножуємо можливості: $4 \times 5 \times 3 = 60$.

Приклад 1.2. Скількома різними способами можна розташувати на шаховій дошці 2 тури, чорну і білу, таким чином, щоб вони били одна одну?

Розв'язок. Шахова дошка містить : $8 \times 8 = 64$ клітини. Для першої тури маємо 64 можливих розташувань. Якщо тури б'ють одна одну, то вони стоять в одному рядку по вертикалі або по горизонталі. А таких клітинок буде $7 + 7 = 14$. Отже, за правилом множення маємо $64 \times 14 = 896$ способів.

► Довільна k-елементна підмножина множини з n елементів називається **комбінацією (сполукою) з n елементів по k.** Комбінація є

невпорядкованою множиною. Число можливих комбінацій з n елементів по k рівне:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад 1.3. Скількома способами з 10-ти студентів можна скласти підгрупу, що складається з 5-ти осіб?

Розв'язок. Число можливих підгруп дорівнює числу всіх п'ятиелементних підмножин множини з 10-ти елементів, тобто $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = 252.$

► **Перестановкою** називають впорядковану множину з n елементів. Число можливих перестановок з n елементів:

$$P_n = n!.$$

Приклад 1.4. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4, якщо кожна цифра входить в зображення числа лише один раз?

Розв'язок. Таких чотиризначних чисел буде стільки, скільки існує різних перестановок з 4-х елементів, тобто $P_n = 4! = 24.$

► **Розміщенням з n елементів по k** називають впорядковану k-елементну підмножину множини з n елементів. В розміщенні порядок елементів є суттєвим. Число можливих розміщень з n елементів по k:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад 1.5. В класі вивчають 10 предметів. В понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

Розв'язок. Число різних розкладів на понеділок визначається тим, скільки існує різних впорядкованих 6-елементних підмножин множини з 10-ти елементів, тобто скільки існує розміщень з 10-ти по 6. $A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = 151\,200$.ё

Розбиття множини на підмножини (перестановки з повтореннями)

Нехай Ω – множина з n елементів. Нам треба представити множину Ω у вигляді: $\Omega = \bigcup_{i=1}^m B_i;\ \ B_i \cap B_j = \emptyset;\ \ i \neq j$, де кожна множина B_i містить k_i елементів і $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Число способів, яким n-елементну множину Ω можна подати у вигляді об'єднання m множин B_i, що не перетинаються і мають відповідно $k_1, k_2, \dots, k_m$ елементів, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}.$$

Приклад 1.6. Скількома способами можна розселити 8 студентів по 3 кімнатах: одномісній, трьохмісній, чотирьохмісній?

Розв'язок. Нам треба розбити множину з 8 студентів на 3 підмножини: одноелементну, трьохелементну і чотирьохелементну: $C_8(1,3,4) = \frac{8!}{1!3!4!} = 280.$

Розміщення розрізнених частинок по комірках. Модель Максвелла-Больцмана

Припустимо, що n розрізнених частинок розподіляються по m комірках. Число всіх розміщень частинок по комірках дорівнює m^n. Число розміщень n частинок по m комірках, коли в 1-й комірці знаходиться k_1 частинок; в 2-й - k_2 частинок,…, в m-тій - k_m частинок (тут $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$) дорівнює $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$.

Комбінації з повтореннями

Комбінаціями з m елементів по n з повтореннями називаються групи, які містять по n елементів, причому кожний елемент може належати одному з m типів.

Число різних комбінацій з m елементів по n з повтореннями є $f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n$.

Приклад 1.7. Скільки існує різних кісток доміно?

Розв'язок. Оскільки кістка доміно визначається двома цифрами, кожна з яких вибирається з 7 можливих – 0,1,2,3,4,5,6; при цьому можливі повторення (в доміно бувають дублі), то кожну кістку доміно можна розглядати як комбінацію з 7 елементів по 2 з повтореннями. Отже, їх кількість рівна $f_7^2 = C_8^6 = \frac{8!}{6!2!} = 28.$

Розміщення нерозрізнених частинок по комірках. Модель Бозе-Ейнштейна

Припустимо, що n нерозрізнених частинок розподіляються по m комірках. Тоді число всіх можливих розташувань дорівнює $f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n$.

Число розміщень, при яких в кожній комірці є хоча б одна частинка, є C_{n-1}^{m-1}.

Стохастичний експеримент, простір елементарних подій, операції над подіями.

Під **стохастичним експериментом (випробуванням)** розуміємо експеримент, результат якого неможливо передбачити заздалегідь, але який можна повторити багато разів. Нехай в результаті випробування відбувається одна і тільки одна з подій $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ Події ω_i називають **елементарними наслідками (елементарними подіями).**

► Множина всіх елементарних подій, які можуть з'явитись у стохастичному експерименті, називається **простором елементарних подій Ω.**

► **Випадкові події –** підмножини простору елементарних подій.

Приклад 1.8. Один раз підкидають гральний кубик, фіксується кількість очок, що випала. Простір елементарних подій має вигляд $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що кількість очок, що випала, ділиться на 3. Тоді $A = \{3,6\};\ A \subset \Omega$.

Операції над випадковими подіями

(аналогічні операціям над множинами).

Позначення	Теорія множин	Теорія ймовірностей
Ω	Ω – універсальна множина.	Ω – простір елементарних подій **(достовірна подія)**.
$\emptyset$	Порожня множина.	Неможлива подія.
$A \subset \Omega$	A – підмножина Ω.	A – випадкова подія.
$A \subset B$	A – підмножина B.	З події A випливає подія B або A сприяє B.
$A \cup B$	Об'єднання множин A і B.	Сума подій – подія, яка полягає в тому, що відбудеться хоча б одна з подій $A,\ B$.
$A \cap B$	Перетин множин A і B.	Добуток подій – подія, яка полягає в тому, що відбудеться і подія A, і подія B.
$A \cap B = \emptyset$	Множини A і B не перетинаються.	Події A і B несумісні, тобто не відбуваються одночасно.

$A\backslash B$	Різниця множин A і B.	Різниця подій – подія, яка полягає в тому, що відбудеться A, але не відбудеться B.
$\bar{A} = \Omega\backslash A$	Доповнення до множини A.	Подія, протилежна A, тобто подія, яка полягає в тому, що A не відбудеться.

Операції над подіями часто ілюструють за допомогою діаграм Венна.

Приклад 1.9. З урни, в якій міститься 5 куль – 3 білих і 2 чорних – послідовно без повернення дістаємо 2 кулі. Скласти простір елементарних подій даного експерименту. Розглянемо події: $A = \{\text{Перша куля біла}\}$; $B = \{\text{Обидві кулі білі}\}$; $C = \{\text{Обидві кулі різного кольору}\}$. В чому полягають події $A \cup B$; $A\backslash B$; $A \cap B$; $A\backslash C$; $A \cap C$?

Розв'язок. Позначимо подію Б, яка полягає в тому, що витягнуто білу кулю і Ч – витягнуто чорну. Зрозуміло, що простір елементарних подій – всі результати з діставання двох куль – буде мати вигляд $\Omega = \{\text{БЧ}, \text{ЧБ}, \text{ББ}, \text{ЧЧ}\}$. Тепер розглянемо такі події:

$A \cup B = \{\text{Перша куля Б або обидві кулі Б}\} = \{\text{Перша куля Б}\} = A$;

$A\backslash B = \{\text{Перша куля Б }\}\backslash\{\text{Обидві кулі Б}\} = \text{БЧ}$;

$A \cap B = \{\text{Перша куля Б та обидві кулі Б}\} = B$;

$A \setminus C$ = {Перша куля Б}\{Обидві кулі різного кольору} =

{Перша куля Б і обидві однакового кольору} = ББ;

$A \cap C = \{\text{Перша куля Б та обидві різного кольору}\} = \text{БЧ}$.

Задачі до теми 1.

Рівень 1

1.1. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4,5 ?
1.2. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,4, якщо кожну з цифр використовувати не більше одного разу?
1.3. Скільки існує п'ятизначних чисел, які діляться на 5?
1.4. В селі живуть 1500 жителів. Довести, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.
1.5. Скільки діагоналей має опуклий n-кутник?
1.6. Скількома способами з 30-ти студентів можна вибрати делегацію, що складається з 3-х осіб?

1.7. Скільки різних кісток доміно можна утворити, використовуючи числа 1,2,3,…,*n* ?

1.8. Скількома способами можуть розміститись 5 покупців в черзі в касу?

1.9. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,3,\dots,n\}$ так, щоб числа 1,2,3 стояли поряд в порядку зростання?

1.10. У розіграшу першості країни з футболу приймає участь 10 команд. Команди, які займуть перше, друге і третє місця, нагороджуються відповідно золотою, срібною і бронзовою медалями. Команди, які займуть останні два місця, покинуть вищу лігу. Скільки різних результатів першості може бути?

1.11. Скількома різними способами можна розташувати 11 ящиків по 7 поверхах?

1.12. Кожна з *n* різних частинок потрапляє в один з *N* лічильників. Знайти ймовірність того, що перший лічильник зареєструє *k* частинок, другий – *j*.

1.13. З колоди, яка налічує 52 карти, вибрали 10 карт. У скількох випадках серед цих карт є а)хоча б один туз; б)рівно один туз; в)не менше двох тузів; г)рівно два тузи?

1.14. Скількома способами можна розділити колоду з 52 карт навпіл так, щоб в кожній частині було по 2 тузи?

1.15. Скількома способами можна розділити *n* однакових цукерок серед *m* дітей? Скільки серед них способів, коли кожна дитина отримає хоча б одну цукерку?

1.16. Скільки цілих невід'ємних розв'язків має рівняння $x_1 + x_2 + \dots + x_n = N$? Скільки цілих додатних розв'язків має це рівняння?

1.17. Скільки слів можна скласти, переставляючи літери слова «математика»?

1.18. В хокейному клубі 8 нападаючих, 5 захисників і 2 воротаря. Скільки різних варіантів команди може створити тренер, якщо на лід виходять воротар, 2 захисника і трійка нападаючих?

1.19. На полиці стоять 7 книг різних авторів і трьохтомник одного автора. Скількома способами можна розставити ці книги на полиці так, щоб книги одного автора стояли поряд?

1.20. Скількома способами можна розсадити *n* чоловік за круглим столом?

1.21. Скількома способами можна розділити $a + b + c$ різних предметів на три групи так, щоб у першій групі було a, в другій - b, і в третій - c предметів?

1.22. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати події: А – один раз з'явиться герб, В – при другому підкиданні з'явиться герб. Описати події: $A \cap B, A \cup \bar{B}, \bar{A}$.

1.23. Нехай A, B, C – довільні події. Виразити через них наступні події – з цих трьох подій:

$A_1 =$ {Відбулась лише A};

$A_2 =$ {Відбулись A і B ,але C не відбулось};

$A_3 =$ {Відбулись всі три події};

$A_4 =$ {Відбулась хоча б одна з подій};

$A_5 =$ {Відбулись хоча б дві події};

$A_6 =$ {Відбулась одна і тільки одна з подій};

$A_7 =$ {Відбулись дві і тільки дві з подій};

$A_8 =$ {Жодна подія не відбулась};

$A_9 =$ {Відбулось не більше двох подій}.

1.24. Спростити вирази:

а)$(A \cup B) \cup (A \cup \bar{B})$;

б)$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$;

в)$(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

1.25. По каналу зв'язку передається повідомлення з трьох сигналів, кожен з яких може бути або перекручено, або передано правильно. Розглянемо події

$A =$ {Перший сигнал перекручено},

$B =$ {Перекручено не більше одного сигналу},

$C =$ {Перекручень в повідомленні немає}.

Чому дорівнюють $A \cap C,\ A \cap B,\ B \backslash A,\ B \cup C$?

1.26. Гральний кубик підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Позначимо події: А - сума очок, що з'явилось, дорівнює 8; В - хоча б один раз випало 6 очок. Описати події: $A \cup B; A \cap B; A \backslash B;\ \bar{B}$.

1.27. Суму $A \cup B$ двох подій можна виразити як суму двох несумісних подій: $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$. Виразити аналогічним чином суму трьох подій.

Рівень 2

1.28. Скільки існує чотиризначних чисел, в яких кожна наступна цифра а)більша за попередню? б)менша за попередню?

1.29. Скількома способами можна впорядкувати множину $\{1,2,3,\ldots,n\}$ так, щоб кожне число, кратне 2, і кожне число, кратне 3, мали номери, кратні 2 і 3 відповідно?

1.30. Довести, що кількість способів, якими двоє людей можуть розділити порівну $2n$ предметів першого типу, $2n$ предметів другого і $2n$ предметів третього типу становить $3n^2 + 3n + 1$.

1.31. Довести формулу Бінома Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k};\quad n \in N$ засобами комбінаторики.

Тема 2. ЙМОВІРНІСТЬ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Класичне означення ймовірностей.

Нехай проводиться випробування з простором елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ та всі елементарні наслідки $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ випробування **рівноможливі**. Нехай A – деяка подія, яка в результаті випробування може відбутись, а може й ні: $A \subset \Omega$. Зроблені припущення приводять до **класичного означення ймовірності**:

► **Ймовірність події А** дорівнює відношенню числа тих елементарних подій, що сприяють А, до загального числа можливих подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Приклад 2.1. В ящику знаходяться 10 шкарпеток чорного кольору і 5 сірого. Поспішаючи на першу пару, студент дістає навпомацки 2 шкарпетки з ящика. Знайти ймовірності подій а)А={обидві шкарпетки різних кольорів}; б)В={обидві шкарпетки одного кольору}; в)С={обидві шкарпетки сірі}.

Розв'язок. Загальне число можливих наслідків вибору двох шкарпеток з 15-ти є $n = C_{15}^2 = \frac{15!}{2!13!} = 15 \times 7$. а)Знайдемо кількість наслідків, які сприяють події А. Для вибору чорної шкарпетки маємо 10 можливостей, для вибору сірої – 5. За правилом множення $m = 10 \times 5$. За класичним означенням $P(A) = \frac{10 \times 5}{15 \times 7} = \frac{10}{21}$. б)Якщо обидві шкарпетки одного кольору, то вони або обидві чорні, або сірі. Тоді $m = C_{10}^2 + C_5^2 = 55$; $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{55}{15 \times 7} = \frac{11}{21}$. в)Аналогічно $P(C) = \frac{C_5^2}{C_{15}^2} = \frac{2}{21}$.

Аксіоматика теорії ймовірностей.

Зрозуміло, що класичне означення не є загальним і не може задовольняти всім задачам, що розглядаються в теорії ймовірностей. Остання, як і будь-яка наука, базується на системі аксіом.

Аксіоматика теорії ймовірностей була введена А.М.Колмогоровим у 1929-1933 рр. Вона дозволила узагальнити та об'єднати різні імовірнісні моделі, які існували на той час у математиці та фізиці.

Щоб сформулювати систему аксіом А.М.Колмогорова, використаємо деякі означення з теорії множин. Отже, нехай Ω – деяка множина.

► Клас К підмножин з Ω називається **алгеброю**, якщо

1) $\Omega \in K$;
2) Якщо $A, B \in K$, то $A \cup B \in K$;

3) Якщо $A \in K$, то $\bar{A} \in K$.

► Клас F підмножин з Ω називається **сігма-алгеброю**, якщо

1) $\Omega \in F$;

2) Якщо $A_n \in F$, $n \in N$ то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$;

3) Якщо $A \in F$, то $\bar{A} \in F$.

► **Сігма-алгеброю борелівських множин на R** називають найменшу сігма-алгебру, що містить клас всіх можливих проміжків виду $[a,b)$: $\boldsymbol{B^1} = \sigma\big([a,b)\big)$. Аналогічно визначається борелівська сігма-алгебра на R^n: $B^n = \sigma\big([a_1,b_1) \times \ldots \times [a_n,b_n)\big)$.

► **Борелівською функцією на R** називається функція $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ така, що $\forall y \in \mathbf{R}$ множина $\{x \in \mathbf{R} : f(x) < y\}$ є борелівською множиною на $\mathbf{R}$.

Аксіоми теорії ймовірностей

Нехай Ω – простір елементарних подій деякого стохастичного експерименту. Через $\mathcal{F}$ позначимо всі можливі випадкові події даного експерименту.

$\mathcal{F}$ має бути σ-алгеброю підмножин з Ω, отже, для $\mathcal{F}$ мають бути виконані наступні аксіоми:

$A_1) \Omega \in \mathcal{F}$;

$A_2) \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$;

$A_3) \forall A_n \in \mathcal{F}, n = 1,2,\ldots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Припустимо, що кожній події $A \in \mathcal{F}$ поставлено у відповідність число $P(A)$ – **ймовірність події**, яка має такі властивості:

$P_1) P(A) \geq 0$;

$P_2) P(\Omega) = 1$;

$P_3) A_n \in \mathcal{F};\ A_n \cap A_m = \emptyset;\ n \neq m: \quad P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

► Одержана трійка об'єктів $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ має назву **ймовірнісний простір.**

Приклад ймовірнісного простору. (***Класичне означення ймовірностей***). $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, де всі елементарні події рівноможливі. Кожному наслідку ω_i ставимо у відповідність ймовірність число $1/n$. Тут $\mathcal{F}$ – сігма-алгебра всіх підмножин Ω, **дискретна сігма-алгебра.** Тоді

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Для такого означення аксіоми $A_1 - P_3$ виконані.

Приклад ймовірнісного простору. (***Геометричне означення ймовірностей***).

$\Omega = D$ – деяка квадровна (тобто така, що має площу) область на площині. Стохастичний експеримент полягає у рівномірному випадковому виборі точки з області ***D***. Випадкова подія **A** відбувається, якщо точка потрапляє в множину **A**. Нехай $\mathcal{F}$ – борелівська сігма-алгебра підмножин з ***D***. Для всіх $A \in \mathcal{F}$ визначена площа (міра множини **A**) $mes(A)$. Тоді $P(A) = \frac{mes(A)}{mes(D)}$. Для такого означення також виконані аксіоми $A_1 - P_3$.

Властивості ймовірності, які випливають з аксіом

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Наслідок. $P(\emptyset) = 0$.

2) $A \subset B \;\Rightarrow\; P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$.

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Теорема додавання для сумісних подій).

4) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \cdots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n})$

Приклад 4.4. Яка ймовірність дістати з колоди в 52 карти фігуру довільної масті або карту пік? Фігурою називаються валет, дама або король.

Розв'язок. Позначимо випадкові події

$A = \{\text{Ми витягнемо фігуру}\};\;\; B = \{\text{Ми витягнемо карту пік}\}.$

Тоді за властивістю 3):

$P\{\text{Дістати або фігуру, або карту пік}\} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{52} + \frac{13}{52} - \frac{3}{52} = \frac{11}{26}$

Геометричні ймовірності.

Геометричними називаються ймовірності в ймовірнісному просторі, що вже розглядався в попередньому параграфі. Для повноти викладу повторимо означення такого простору. Нехай $\Omega = D$ – деяка область на площині або в просторі. Область D квадровна, тобто така, що має площу або об'єм. Випадкові події – ті підмножини Ω, які теж мають площу або об'єм: $A \subset \Omega$.

► $$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}.$$

Тут mes(.) означає «міра», тобто площа або об'єм. Аналогічне означення існує для випадку, коли $\Omega \subset R$, тоді під мірою розуміємо довжину.

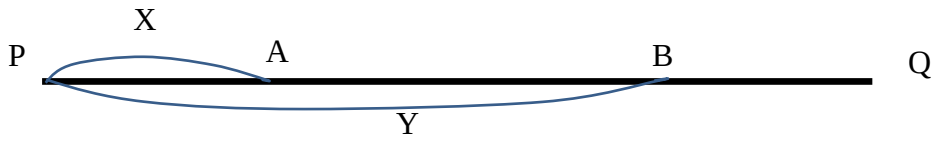
Приклад 3.1. На перехресті встановлений автоматичний світлофор, в якому одну хвилину горить зелене світло і півхвилини – червоне, потім знов хвилину – зелене, півхвилини – червоне і т.д. У випадковий момент часу до перехрестя наближається легковик. Яка ймовірність, що він перетне перехрестя без зупинки?

Розв'язок. Оскільки відрізки часу з зеленим і червоним світлом розташовуються однаково, однорідно за часом, можемо вважати, що час прибуття легковика до світлофора – точка, поставлена навмання на відрізок довжини 1,5 одиниці, який розбивається на два відрізка – довжини 1 од., що відповідає за зелене світло і 0,5 од. – за червоне. Якщо прибуття легковика попаде на перший відрізок – машина не буде зупинятись, на другий – зупиниться. Згідно геометричному означенню ймовірностей

$$P\{\text{Легковик проїде без зупинки}\} = \frac{\text{Довжина відрізка часу зеленого світла}}{\text{Довжина всього відрізка}} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 3.2. На відрізку $[P, Q]$ довжини l навмання вибрано 2 точки A і B. Знайти ймовірність того, що точка A виявиться ближчою до точки B, ніж до точки P.

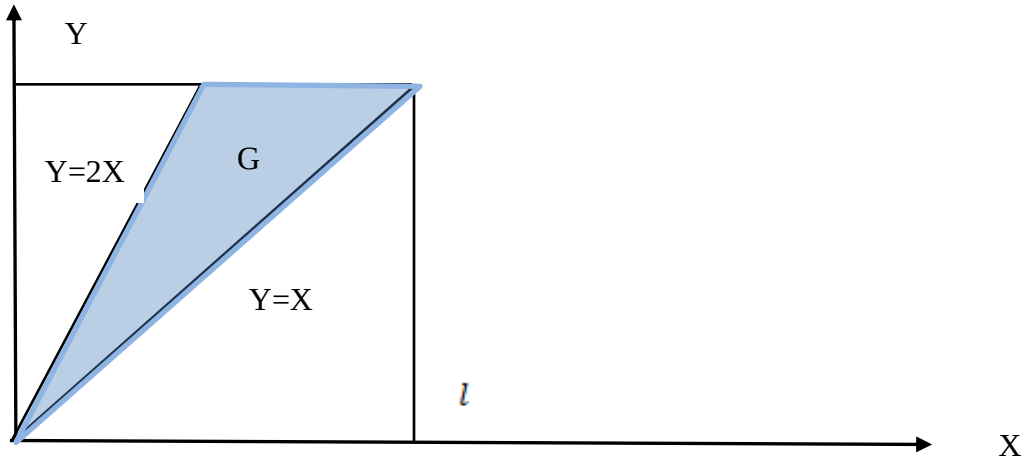
Розв'язок. Позначимо за X координату точки A (відстань від P до A), за Y – координату точки B. Простір елементарних подій матиме вигляд $\Omega = \{(X, Y); 0 \le X \le l,\ 0 \le Y \le l\}$.



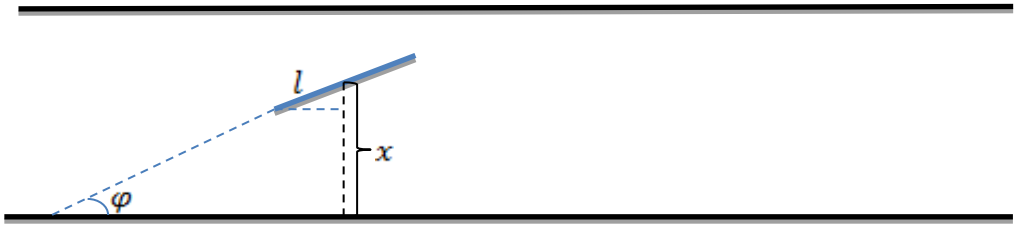
За геометричним означенням ймовірності треба знайти відношення площ відповідних фігур.

$$P\{\text{Точка } A \text{ виявиться ближчою до точки } B, \text{ніж до точки } P\} =$$

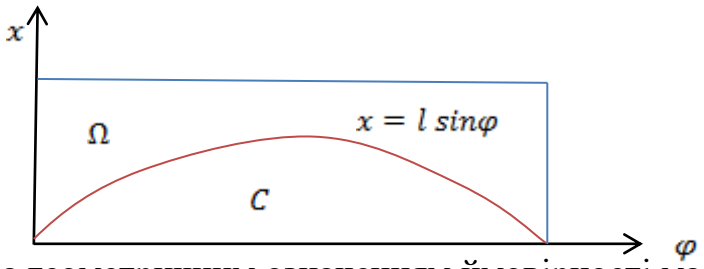
$$P\{|AB| < |AP|\} = P\{|Y - X| < X\} = P\{X < Y < 2X\} = \frac{S_G}{S_\Omega} = \frac{\frac{l^2}{4}}{l^2} = \frac{1}{4}$$



Приклад 3.3. Задача Бюффона. Площина покрита сіткою паралельних прямих, відстань між якими дорівнює $2a$. На площину навмання кидають голку довжиною $2l$, $(l < a)$. Знайти ймовірність того, що голка перетне якусь пряму.



Розв'язок. Позначимо за x відстань від середини голки до найближчої прямої; φ – кут між голкою і цією прямою. Величини (x, φ) повністю визначають положення голки. Отже, простір елементарних подій
$\Omega = \{(x, \varphi); 0 \le x \le a, 0 \le \varphi \le \pi\}$.
З рисунка видно, що голка перетинає пряму тоді і тільки тоді, коли $x \le l\,sin\varphi$. Отже, подія, що голка перетне пряму, виглядає наступним чином: $C = \{(x, \varphi); 0 \le x \le l\,sin\varphi, 0 \le \varphi \le \pi\}$.



За геометричним означенням ймовірності маємо:

$$P(C) = \frac{mes(C)}{mes(\Omega)} = \frac{\int_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{l}{a\pi}(-cos\varphi)|_0^{\pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

Задачі до теми 2.

Рівень 1

2.1. В ящику знаходяться 10 деталей, помічених номерами 1,2,…,10. Навмання виймають 6 деталей. Знайти ймовірність того, що серед цих 6-ти деталей буде а)деталь №1; б)деталі №1 і №2.

2.2. В офісі працюють 6 чоловіків і 4 жінки. Навмання відбирають 7 працівників. Знайти ймовірність того, що серед відібраних осіб виявиться рівно 3 жінки.

2.3. Чому дорівнює ймовірність того, що серед k відібраних цифр а)не зустрінеться 0; б)не зустрінеться 1; в)не зустрінеться ані 0, ані 1?

2.4. Набираючи номер телефону, абонент забув 3 останні цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри.

2.5. В три вагони входять 9 пасажирів, кожен з яких обирає вагон навмання. Знайти ймовірність того, що а)в перший вагон зайдуть 3 пасажири; б)в кожний вагон зайде по 3 пасажири; в)в один вагон зайде 4, в другий – 3, в третій – 2 пасажири.

2.6. Знайти ймовірність того, що в добре перемішаній колоді з 36 карт хоча б 3 тузи розташовані поряд.

2.7. З урни, що містить n пронумерованих куль, m разів виймають кулю, щоразу кладучи її назад. Яка ймовірність того, що хоча б одну кулю буде вийнято двічі?

2.8. З множини $\{1,2,\dots,n\}$ послідовно без повернення вибирають 2 числа. Знайти ймовірність того, що різниця між першим і другим вибраними числами буде меншою за $m,\ m > 0.$

2.9. Обчислити ймовірність того, що в січні навмання обраного року буде а)5 неділь; б)4 неділі; в)3 неділі.

2.10. З множини $\{1,2,\dots,n\}$ послідовно навмання обирають 2 числа. Обчислити ймовірність того, що друге з них буде більше за перше, якщо вибір здійснюється а)без повернення; б)з поверненням.

2.11. Учасник лотереї «5 з 36» заповнив одну картку. Обчислити ймовірності подій

$A = \{\text{Не вгадано жодного номера}\};\ B = \{\text{Вгадано точно 3 номери}\};\ C = \{\text{Вгадано всі номери}\};\ D = \{\text{Отримано який} - \text{небудь виграш}\}$

Обчислити ймовірність того, що дні народження k навмання обраних людей ($k \le 12$) припадають на різні місяці року.

2.12. Групу з n осіб навмання розсаджують навколо круглого столу. Обчислити ймовірність того, що певні особи А та В опиняться поруч.

2.13. Було проведене вибіркове обстеження 125-ти замовлень клієнтами обідів в ресторані «Джо» на предмет: як часто відвідувачі просять принести пиво, часниковий хліб або чізкейк. Результати обстеження були такими:
15 обідів містили все ці три пункти;
43 обіди були замовлені з часниковим хлібом;
40 обідів – з пивом; 20 містили пиво і чізкейк;
26 – часниковий хліб і чізкейк; 25 – часниковий хліб і пиво.
Зобразити на діаграмі Венна структуру вибірки.
Випадковим чином обирають один обід. Знайти ймовірність, що цей обід містить: а)всі ці три пункти меню; б)пиво, але без чізкейку і часникового хлібу; в)часниковий хліб, але без пива і чізкейку; г)не містить жодного з цих трьох пунктів.

2.14. Маємо 2 концентричних кола з радіусами r і R, $r < R$. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у великий круг, потрапить і в кільце, утворене побудованими колами.

2.15. На відрізок ОА довжини L числової вісі ОХ навмання поставлена точка $B(x)$. Знайти ймовірність того, що менший з відрізків ОВ і ВА має довжину, більшу за $L/3$.

2.16. Андрій та Богдана домовились про зустріч в кафе з 12 до 13 години. Кожний з них приходить у навмання обраний час та чекає на іншого, причому Андрій чекатиме 5 хв., а Богдана – 15 хв. Яка ймовірність, що вони зустрінуться?

2.17. Монета радіуса r випадковим чином кидається на стіл, розграфлений на квадрати зі стороною l $(2r < l)$. Знайти ймовірність того, що а)монета не перетне жодної зі сторін квадратів; б)монета перетне не більше однієї сторони квадратів.

2.18. В квадрат з вершинами $(0,0);(0,1);(1,0);(1,1)$ навмання кинута точка. Нехай (ξ,η) - її координати. Довести, що для будь-яких $0 \le x, y \le 1$

$$P\{\xi < x, \eta < y\} = P\{\xi < x\}P\{\eta < y\} = xy.$$

Для $0 < z < 1$ знайти:

а) $P\{|\xi - \eta| < z\}$; г) $P\{\xi\eta < z\}$;

б) $P\{min(\xi,\eta) < z\}$; д) $P\{max(\xi,\eta) < z\}$;

в) $P\left\{\frac{(\xi+\eta)}{2} < z\right\}$; е) $P\{\xi + 2\eta < z\}$.

2.19. Випадкова точка А обирається навмання в прямокутнику зі сторонами 1 і 2. Знайти ймовірності подій: відстань від А
а)до найближчої сторони прямокутника не перевищує x;

б)до кожної сторони прямокутника не перевищує x;

в)до кожної діагоналі прямокутника не перевищує x.

2.20. На колі радіуса R навмання взято 2 точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує r ?

2.21. В квадрат з вершинами $(0,0);(1,0);(0,1);(1,1)$ навмання кинули точку. Нехай (ξ,η)– її координати. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2+\xi x+\eta=0$ а)дійсні; б)додатні.

2.22. Для кожного x знайти ймовірність того, що довжина перпендикуляра, опущеного з центра кола на випадкову хорду, менша за x. Остання визначається як пряма, що проходить через 2 точки, незалежно вибрані на колі.

2.23. Навмання взято два додатних числа x та y, кожне з яких не перевищує 2. Знайти ймовірність того, що добуток xy не перевищуватиме 1, а частка y/x не перевищуватиме 2.

Рівень 2

2.24. З колоди, що складається з 52 карт, навмання вибирають 6 карт. Знайти ймовірність того, що серед цих карт а)є туз; б)є карти всіх мастей; в)є хоча б 2 карти з однаковим рангом.

2.25. В ряду з n крісел сидять троє людей. Знайти ймовірність того, що жодні дві людини не сидять поруч.

2.26. Стрижень довжиною l навмання розламали на 3 частини. Яка ймовірність того, що з отриманих частин можна скласти трикутник?

2.27. В одиничне коло навмання вписаний трикутник. Знайти ймовірності подій: $A=\{\text{Трикутник гострокутний}\};\ B=\{\text{Трикутник рівнобедренний}\}$.

Тема 3. УМОВНА ЙМОВІРНІСТЬ. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.

Умовні імовірності.

► Розглянемо випадкові події $A,B\in\mathcal{F}$. **Умовною ймовірністю** $P(A/B)$ назвемо ймовірність події A при умові, що подія B вже відбулась.

Приклад 3.1. В урні 2 білих і 2 чорних кулі. З урни двічі виймають по одній кулі, не повертаючи назад. Знайти ймовірність того, що при другому випробуванні з'явиться біла куля (подія A), якщо при першому випробуванні була вийнята чорна куля (подія B).

Розв'язок. Треба знайти $P(A/B)$. Уявимо, що подія B відбулась. Тоді в урні залишилось 3 кулі, з яких 2 білих і 1 чорна. Отже, $P(A/B) = \frac{2}{3}$.

Дамо тепер точне означення умовної ймовірності.

► Розглянемо ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Нехай $A, B \in \mathcal{F},\ P(B) > 0$. **Умовною ймовірністю $P(A/B)$ події A відносно події B** називатимемо величину

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

З означення умовних ймовірностей виплаває **теорема множення для залежних подій**:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Наслідок. Нехай $A_1, \ldots, A_n$ – деякі події. Тоді

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Властивості умовних ймовірностей

1) $0 \le P(A/B) \le 1.$

2) $P(\Omega/B) = 1.$

3) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n / B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n/B)$ при попарно несумісних подіях $A_1, \ldots, A_n$.

Незалежні випадкові події.

► Нехай $A, B \in \mathcal{F}$. Події A і B називаються **незалежними**, якщо

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Цю формулу називають **теоремою множення для незалежних подій**.

Теорема 3.1. Нехай $A, B \in \mathcal{F};\ P(B) \neq 0$. Тоді A і B незалежні $\Leftrightarrow$, коли $P(A/B) = P(A)$.

Теорема 3.2. A і B незалежні $\Rightarrow$

$A, \overline{B}$ незалежні; $\overline{A}, B$ незалежні; $\overline{A}, \overline{B}$ незалежні.

► Випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називаються **незалежними в сукупності**, якщо для $\forall\, k = \overline{2,n};\ \ \forall i_1, \dots, i_k$ справедливо:

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right) \times \dots \times P\left(A_{i_k}\right).$$

Зауваження. Якщо події попарно незалежні, то це не означає, що вони незалежні в сукупності. Незалежність в сукупності є більш сильною вимогою, ніж попарна незалежність.

Приклад 3.2. Поль і Майк грають в настільну гру. Ймовірність, що Поль виграє одну партію, дорівнює 0,25; ймовірність, що виграє Майк – 0,3. Вони вирішили зіграти три партії. Вважаючи, що результати кожної партії – незалежні в сукупності події, знайти ймовірність того, що: а)Поль виграє всі три партії; б)Майк виграє 2 партії, а Поль – одну; в)в усіх партіях буде нічия; г)кожний гравець виграє по одній партії.

Розв'язок. Позначимо події, що стосуються, наприклад, першої партії: $\text{П1} = \{\text{В першій партії виграє Поль}\};\ \ \text{М1} = \{\text{В першій партії виграє Майк}\};$ $\text{Н1} = \{\text{В першій партії буде нічия}\}$; для інших партій вводимо аналогічні позначення. Тоді для кожної партії $P(\text{П}) = 0{,}25;\ \ P(\text{М}) = 0{,}3;$ $P(\text{Н}) = 1 - 0{,}25 - 0{,}3 = 0{,}45.$

Використовуючи незалежність подій, маємо:

а)

$$P\{\text{Поль виграє всі три партії}\} = P(\text{П1} \cap \text{П2} \cap \text{П3}) = P(\text{П1})P(\text{П2})P(\text{П3}) =$$

$$= 0{,}25 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0156.$$

б)

$$P\{\text{Майк виграє 2 партії, а Поль одну}\} = P\big((\text{П1} \cap \text{М2} \cap \text{М3}) \cup (\text{М1} \cap \text{П2} \cap \text{М3}) \cup (\text{М1} \cap \text{М2} \cap \text{П3})\big) = P(\text{П1})P(\text{М2})P(\text{М3}) + P(\text{М1})P(\text{П2})P(\text{М3}) + P(\text{М1})P(\text{М2})P(\text{П3}) = 3 \times 0{,}25 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}0675$$

в)$P\{\text{В усіх партіях буде нічия}\} = P(\text{Н1} \cap \text{Н2} \cap \text{Н3}) = 0{,}45^3 = 0{,}0911.$

г)З метою мінімізації обчислень формалізуємо задачу дещо по-іншому. Зрозуміло, що якщо кожний гравець виграє по одній партії, то одну партію виграє Поль, ще одну – Майк, і в третій буде нічия. Ймовірність такої події, якщо відомо, в якій партії що відбулось, дорівнює $P(\text{П})P(\text{М})P(\text{Н}) = 0{,}25 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}45 = 0{,}03375$. А скільки може бути таких різних розташувань результатів по партіях? Стільки, скільки існує різних

перестановок з трьох елементів, тобто 6. Тому $P\{\text{Кожний гравець виграє по одній партії}\} = 6 \times 0{,}03375 = 0{,}2025$.

Теорема 3.3.(Ймовірність появи хоча б однієї з подій, незалежних в сукупності).

Нехай події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні в сукупності. Тоді

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) \times \dots \times P(\overline{A_n}) =$$

$$= 1 - \big(1 - P(A_1)\big) \times \dots \times \big(1 - P(A_n)\big).$$

Приклад 3.3. В електричний ланцюг послідовно ввімкнені 3 елементи, що працюють незалежно одне від одного. Ймовірність відмов першого, другого, третього елементів дорівнюють 0,1; 0,15 і 0,2 відповідно. Знайти ймовірність того, що струму в мережі не буде.

Розв'язок. Струму не буде, якщо відмовить хоча б один елемент. Введемо наступні позначення подій.

$A_1 = \{\text{Відмовить перший елемент}\};\ P(A_1) = 0{,}1;$

$A_2 = \{\text{Відмовить другий елемент}\};\ P(A_2) = 0{,}15;$

$A_3 = \{\text{Відмовить третій елемент}\};\ P(A_3) = 0{,}2.$

За умовою ці події незалежні в сукупності. За формулою появи хоча б однієї з подій, незалежних в сукупності, маємо

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \big(1 - P(A_1)\big)\big(1 - P(A_2)\big)\big(1 - P(A_3)\big) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}388$

Формула повної ймовірності.

► Події $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють **повну групу подій**, якщо

1) $H_i \cap H_j = \emptyset;\ i \neq j;$ 2) $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$ 3) $P(H_i) > 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

(тобто це події попарно несумісні, і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій).

Зауваження. Якщо $H_1, H_2, \dots, H_n$ - повна група подій, то

$$P(H_1) + P(H_2) + \dots + P(H_n) = 1.$$

Теорема 3.4. (Формула повної ймовірності). Нехай $H_1, H_2, \dots, H_n$ – повна група подій. Тоді для довільної випадкової події A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A/H_i).$$

Приклад 3.4. В першій урні міститься m_1 білих і n_1 чорних куль; в другій - m_2 білих і n_2 чорних. З кожної урни навмання виймається одна куля, а потім з цих двох куль навмання вибирається одна. Знайти ймовірність, що ця куля – біла.

Розв'язок. За повну групу подій можемо взяти таку: ми дістали 2 білих, 2 чорних або одну білу і одну чорну кулі: $H_1 = \{ББ\}$, $H_2 = \{ЧЧ\}$, $H_3 = \{БЧ\}$. Оскільки ми дістаємо кулі з урн незалежно, за теоремою множення маємо:

$$P(H_1) = P\{\text{(З першої урни Б)} \cap \text{(з другої урни Б)}\} = \frac{m_1}{m_1+n_1} \cdot \frac{m_2}{m_2+n_2};$$

$$P(H_2) = P\{\text{(З першої урни Ч)} \cap \text{(з другої урни Ч)}\} = \frac{n_1}{m_1+n_1} \cdot \frac{n_2}{m_2+n_2};$$

$$P(H_3) = P\{\text{(З першої урни Б)} \cap \text{(з другої урни Ч)}\} + P\{\text{(З першої урни Ч)} \cap \text{(з другої урни Б)}\} = \frac{m_1}{m_1+n_1} \cdot \frac{n_2}{m_2+n_2} + \frac{n_1}{m_1+n_1} \cdot \frac{m_2}{m_2+n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)}$$

Позначимо подію $A = \{\text{Навмання вибрана куля} - \text{біла}\}$. Зрозуміло, що $P(A/H_1) = 1;\ P(A/H_2) = 0;\ P(A/H_3) = 0{,}5.$ Маємо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) = \frac{m_1 m_2}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)} \cdot 1 + \frac{n_1 n_2}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)} \cdot 0 + \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2m_1 m_2 + m_1 n_2 + n_1 m_2}{2(m_1+n_1)(m_2+n_2)}$$

Формула Байєса.

Теорема 3.5. (Формула Байєса). Нехай $H_1, H_2, \dots, H_n$ – повна групу подій, їх ще називають гіпотезами. Припустимо, що відбулась деяка подія *A*. Ймовірності гіпотез у зв'язку з тим, що подія *A* відбулась, виражаються такими формулами:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}; \quad k = 1, \dots, n.$$

Приклад 3.5. Розслідуються причини авіакатастрофи, про які можна зробити 4 припущення: H_1, H_2, H_3, H_4. Відповідно статистиці, $P(H_1) = 0{,}2;\ P(H_2) = 0{,}4;\ P(H_3) = 0{,}3;\ P(H_4) = 0{,}1.$ Виявилось, що під час катастрофи відбулась подія $A = \{\text{займання пального}\}$. Умовні ймовірності A при гіпотезах H_1, H_2, H_3, H_4 відповідно тій самій статистиці дорівнюють $P(A/H_1) = 0{,}9;\ P(A/H_2) = 0;\ P(A/H_3) = 0{,}2;\ P(A/H_4) = 0{,}3.$ Знайти ймовірності гіпотез при умові, що A відбулась.

Розв'язок. Підставляючи ймовірності в формулу Байєса, обчислюємо

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) + P(H_4)P(A/H_4)}$$
$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}9}{0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}3} = \frac{2}{3};$$

$$P(H_2/A) = 0;\ P(H_3/A) = \frac{2}{9};\ P(H_4/A) = \frac{1}{9}.$$

Таким чином, найбільш ймовірним припущенням про причину катастрофи є гіпотеза H_1.

Задачі до теми 3.

Рівень 1

3.1. Підкидають три гральних кубики. Знайти ймовірність того, що а)хоча б раз випала шістка, якщо на всіх кубиках випали різні грані; б)хоча б раз випала шістка, якщо на всіх кубиках випали однакові грані.

3.2. З урни, яка містить n білих і m чорних куль, послідовно виймають 2 кулі (без повернення). Знайти ймовірність того, що а)друга куля біла, якщо відомо, що перша куля біла; в)обидві кулі одного кольору; г)кулі різного кольору.

3.3. В урні міститься 5 чорних, 6 білих і 8 червоних куль. Послідовно без повернення з урни виймають 3 кулі. Знайти ймовірність того, що а)перша куля – чорна, друга – біла, третя – червона; б)перша куля – біла, друга і третя – червоні.

3.4. Нехай A, B – такі події, що $P(A) = 0{,}6;\ P(B) = 0{,}7;\ P(A \cup B) = 0{,}9$. Знайти $P(A \cap B);\ P(\bar{A} \cup B);\ P(\bar{A});\ P(\bar{A} \cap B)$.

3.5. Нехай A, B – такі події, що $P(A) = 0{,}6;\ P(B) = 0{,}5;\ P(A \cap B) = 0{,}4$. Знайти $P(A \cup B);\ P(B/A);\ P(A/B);\ P(A/\bar{B})$.

3.6. Нехай C, D – такі події, що $P(C/D) = \frac{1}{3};\ P(C/\bar{D}) = \frac{1}{5};\ P(D) = \frac{1}{4}$. Знайти $P(C \cap D);\ P(C);\ P(\bar{D}/C);\ P(C \cap \bar{D});\ P(D/C);\ P(\bar{D}/\bar{C})$.

3.7. Два стрільця незалежно один від одного стріляють в вовка. Ймовірність влучення в ціль при одному пострілі для першого мисливця дорівнює 0,7: для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що при одному залпі а)у вовка попаде тільки один з мисливців; б)жоден з мисливців; в)хоча б один з мисливців.

3.8. Тричі підкидають монету. Подія А = {Двічі випав герб}; подія В={При другому підкиданні випав герб}. Обчислити $P(A);\ P(B);\ P(A/B);\ P(B/A)$.

3.9. Ймовірність влучення в десятку при одному пострілі дорівнює 0,2. Скільки треба зробити пострілів (з незалежними подіями влучення), щоб влучити в десятку хоча б 1 раз із ймовірністю, не меншою за 0,9?

3.10. Кожна з m радіолокаційних станцій за час Т робить n обертів антени і за один оберт антени виявляє об'єкт із ймовірністю p незалежно від інших

станцій. Знайти ймовірність того, що а)за час Т об'єкт буде виявлено хоча б однією станцією; б)за час Т об'єкт буде виявлено кожною станцією.

3.11. Два гравці Вася і Коля по черзі стріляють в мішень. Виграє той, хто влучить першим. Ймовірності влучення в мішень для Васі і Колі рівні відповідно p_1 і p_2. Першим стріляє Вася. Знайти ймовірність виграшу для кожного з гравців.

3.12. Підкидаються 2 гральних кубики. Розглянемо події: A_1 – на першому кубику випала парна кількість очок; A_2 – на другому кубику випала непарна кількість очок; A_3 – сума очок на кубиках непарна. Довести, що події A_1, A_2, A_3 попарно незалежні, але не є незалежними в сукупності.

3.13. Нехай дві події А і В визначені на одному і тому ж просторі елементарних подій, не є тотожними, і нехай $0 < P(A) < 1;\ 0 < P(B) < 1$. Використовуючи знаки " < ", " = ", впорядкувати величини 0, $P(A \cap B)$, $P(A) + P(B)$, $P(A/B)$, $P(A \cup B)$, $P(A)$ за припущення, що а)події А і В несумісні; б)події А і В незалежні.

3.14. Для підвищення надійності приладу він дублюється n – 1 іншими такими самими приладами. Надійність кожного приладу дорівнює p. Знайти надійність цієї системи приладів. Скільки потрібно взяти приладів, щоб надійність системи була не меншою, ніж p_0? Знайти надійність системи, якщо пристрій, що вмикає дублюючий прилад, має надійність q. (**Надійність системи** – ймовірність безвідмовної роботи системи).

3.15. Відомі ймовірності трьох незалежних подій: $P(A_i) = p_i;\ i = 1,2,3$. Після проведення випробування виявилось, що якісь дві події з A_i відбулись, а третя – ні. Знайти ймовірність, що за цих умов відбулась подія A_1.

3.16. Ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань успіх буде хоча б один раз, дорівнює 0,5. Визначити ймовірність успіху при одному випробуванні, якщо ця ймовірність однакова для всіх випробувань.

3.17. Підкидають два гральних кубика. Знайти ймовірність того, що а)хоча б 1 раз випала шістка, якщо відомо, що сума очок, які випали, дорівнює 8; б)сума очок більше, ніж 9, якщо відомо, що один раз випало 5 очок.

3.18. В урні містяться 2 білих і 3 чорних кулі. З урни послідовно виймають 2 кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі, якщо а)проводиться вибірка без повернення; б)проводиться вибірка з поверненням.

3.19. В трьох урнах містяться білі та чорні кулі. В першій – 2 білі і 3 чорні; в другій - 2 білих і 2 чорних; в третій - 3 білих і 1 чорна. З першої урни переклали кулю в другу, з другої – в третю; з третьої – в першу. Який склад куль в першій урні найбільш ймовірний? Знайти ймовірність, що склад куль в усіх урнах залишиться без змін.

3.20. При переливанні крові треба враховувати групи крові донора і хворого. Людині, що має 4-ту групу крові, можна перелити кров будь-якої групи. Людині з 2-ю або 3-ю групою крові можна перелити кров або тієї ж групи, або першої. Людині з 1-шою групою можна перелити кров тільки 1-ї групи. Серед населення 33,7% мають першу, 37,5% - другу, 20,9% - третю і

7,9% - четверту групу крові. Знайти ймовірність того, що випадково взятому хворому можна перелити кров випадково взятого донора.

3.21. **(Парадокс Монті-Хола)** Уявіть себе на телегрі, де вам пропонують вибір між трьома дверима – за ними приз!: за одними з них автомобіль; за іншими – по козі. Ви обираєте одні з дверей, наприклад, перші, ведучий відкриває одні з двох інших, наприклад, треті, за яким знаходиться коза. Тоді він каже вам: «Бажаєте змінити вибір на інші двері?» Чи отримаєте ви перевагу, якщо зміните свій вибір? Ведучий завжди знає, за якими дверима що знаходиться, він завжди відкриває ті з дверей, за якими знаходиться коза, і завжди пропонує гравцю змінити вибір.

3.22. В цеху працюють 20 станків. З них 10 марки А, 6 марки В, 4 марки С. Ймовірність того, що деталь, виготовлена на кожному зі станків А,В,С, виявиться якісною, для цих станків відповідно дорівнює: 0,9; 0,8 і 0,7. Який відсоток якісних деталей виготовляє цех в цілому?

3.23. Є три однакові урни. В першій знаходяться 2 білих і 1 чорна кулі; в другій – 3 білих і 1 чорна; в третій – 2 білих і 2 чорних. Дехто навмання вибирає 1 урну і виймає з неї кулю. Знайти ймовірність, що ця куля біла.

3.24. Радіолокаційна станція веде спостереження за об’єктом, який може застосовувати або не застосовувати перешкоди(шум). Якщо об’єкт не застосовує шум, то за один цикл обзору станція виявляє його з ймовірністю 0,9; якщо застосовує – з ймовірністю 0,6. Ймовірність того, що за цикл об’єкт застосовуватиме шум, дорівнює 0,8 і не залежить від того, як і коли застосовується шум в інших циклах. Знайти ймовірність того, що об’єкт буде виявлений за один цикл.

3.25. З урни, яка містить 3 білих і 2 чорних кулі, переклали дві навмання вибрані кулі в урну, яка містить 4 білих і 4 чорних кулі. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята з другої урни куля буде білою.

3.26. Султану набрид його астролог зі своїми невірними передбаченнями, і той вирішив його стратити. Але вирішив дати астрологу останній шанс. Йому треба розкласти по 2 урнам 4 кулі: 2 білих і 2 чорних. Кат навмання обере урну, з неї – кулю. Якщо куля чорна, то астролога стратять, якщо біла – помилують. Яким чином астролог повинний розташувати кулі в урнах, щоб забезпечити собі максимальну ймовірність бути врятованим?

3.27. В урні міститься 1 кулька, про яку відомо, що вона або білого, або чорного кольору. Після того, як в урну поклали білу кульку і перемішали, з неї навмання вибрали кульку, колір якої виявився білим. Яка ймовірність того, що і колір кульки, що залишилась, білий?

3.28. На трьох дочок – Алісу, Марину і Олену в сім’ї покладений обов’язок мити посуд. Оскільки Аліса старша, їй доводиться виконувати 40% всієї роботи. Інші 60% роботи Марина і Олена ділять порівну. Коли Аліса миє посуд, ймовірність для неї розбити хоча б одну тарілку дорівнює 0,02. Для Марини і Олени ця ймовірність дорівнює відповідно 0,03 і 0,04. Батьки не знають, хто мив посуд ввечері, але вони чули брязкіт розбитої тарілки. Яка ймовірність, що посуд мила Аліса? Марина? Олена?

3.29. Ймовірності влучення при кожному пострілі для першого, другого і третього стрільця дорівнюють $\frac{4}{5}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}$ відповідно. При одночасному пострілі усіх трьох стрільців відбулось рівно 2 влучення. Знайти ймовірність того, що не влучив третій стрілець.

3.30. Є 10 однакових урн, у дев'яти з яких по 2 чорних і 2 білих куль, в одній – 5 білих і 1 чорна. Зі взятої навмання урни вийнято білу кульку. Яка ймовірність того, що цю кульку вийняли з урни, що містила 5 білих кульок?

3.31. Припустимо, що серед всіх чоловіків дальтоніки становлять 5%, а серед жінок – 0,25%. Вважаючи, що кількість чоловіків і жінок є однаковою, обчислити ймовірність того, що навмання обраний дальтонік є чоловіком.

3.32. В урні 3 кулі, які можуть бути білими або чорними. Всі припущення про склад урни рівноймовірні. З урни 4 рази виймали кулю, щоразу кладучи її назад. З'явились кольори: ч, б, б, б. Як змінились ймовірності припущень про склад урни?

3.33. Дмитро бреше у половині випадків, Петро – у ¾ (кожен раз вибираючи, збрехати чи ні, навмання і незалежно від інших почутих відповідей). Підкинуто гральний кубик, і Дмитро з Петром стверджують, що випала шістка. Яка ймовірність того, що насправді випала шістка?

3.34. У нас є 3 карточки, на одній – з обох сторін написана літера А; на іншій – з обох сторін написана літера В. На третій карточці з однієї сторони написано А, з іншої – В. Одна з карточок обирається навмання і кладеться на стіл. Бачимо, що там написана літера А. Яка ймовірність, що з іншої сторони – теж А?

Рівень 2

3.35. На відрізок $[-1,1]$ навмання і незалежно одна від одної кинуто дві точки з координатами ξ і η. Перевірити, чи є незалежними події $\{\xi \text{ або } \eta < 1/2\}$ і $\{\eta < 0\}$.

3.36. На відрізок [0,2] навмання і незалежно одна від одної кинуто дві точки з координатами ξ і η. Перевірити, чи є незалежними події $\{\xi \geq 1\}$ і $\{\xi + \eta < 2\}$.

3.37. Нехай $P(A/B) = 0{,}7;\ P(A/\bar{B}) = 0{,}3;\ P(B/A) = 0{,}6.$ Знайти $P(A)$.

3.38. Деяка комаха з ймовірністю $P = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ відкладає k яєць, $k = 0,1,2,\ldots,$ а ймовірність розвитку комахи з яйця дорівнює p. Припускаючи взаємну незалежність розвитку яєць, знайти ймовірність того, що у комахи буде рівно n нащадків.

3.39. З урни, яка містить n кульок невідомого кольору, вибрали кульку, яка виявилась білою. Після цього знов взяли кульку. Яка ймовірність, що друга кулька теж біла?

3.40. Стрільці А і В по черзі стріляють в ціль. Ймовірність влучення першими пострілами для них становить відповідно 0,4 та 0,5, а ймовірність влучення

при наступних пострілах для кожного стрільця збільшується на 0,05. Яка ймовірність того, що першим почав стріляти стрілець А, якщо при п'ятому пострілі було перше влучення?

Тема 4. ПОСЛІДОВНОСТІ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ.

Формула Бернуллі

Нехай проводиться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може або відбутись, або ні. Будемо для визначеності називати подію A «успіх». Нехай в результаті кожного випробування відбудеться або «успіх» з ймовірністю p або «невдача» з ймовірністю $q = 1 - p$. Така постановка задачі називається **схемою Бернуллі**.

Ймовірність того, що при випробуваннях подія «успіх» відбудеться рівно k разів і, отже, не відбудеться $n - k$ разів, можна знайти за допомогою **формули Бернуллі:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k};\ k = 0,1,\dots,n.$$

Приклад 4.1. Оптова база постачає товар 10-ти магазинам, від кожного з яких може поступити заявка на поставку в поточний день з ймовірністю 0,4 незалежно від заявок інших магазинів. Знайти ймовірність того, що в поточний день на базу надійде а)рівно 5 заявок; б)від 2-х до 5-ти заявок; в)хоча б одна заявка.

Розв'язок. Застосуємо формулу Бернуллі. В поточний день проводиться 10 незалежних випробувань: від кожного з 10-ти магазинів може або надійти заявка(успіх) з ймовірністю $p = 0,4$ або не надійти(невдача) з ймовірністю $q = 1 - p = 0,6$.

а)Треба знайти ймовірність, що «успіх» відбудеться рівно 5 разів.

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 (p)^5 (q)^{10-5} = \frac{10!}{5!5!}(0,4)^5(0,6)^{10-5} = 252 \cdot 0,01024 \cdot 0,07776 \approx 0,2007.$$

б)Подію $\{\text{Надійде від 2 до 5 заявок}\}$ можна розкласти в суму несумісних подій: $\{\text{Надійде 2 заявки}\}$, $\{\text{Надійде 3 заявки}\}$, $\{\text{Надійде 4 заявки}\}$, $\{\text{Надійде 5 заявок}\}$. Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$P\{\text{Надійде від 2 до 5 заявок}\} = P_{10}(2) + P_{10}(3) + P_{10}(4) + P_{10}(5) = C_{10}^2 (p)^2 (q)^8 + C_{10}^3 (p)^3 (q)^7 + C_{10}^4 (p)^4 (q)^6 + C_{10}^5 (p)^5 (q)^5 = \frac{10!}{2!8!}(0,4)^2(0,6)^8 + \frac{10!}{3!7!}(0,4)^3(0,6)^7 + \frac{10!}{4!6!}(0,4)^4(0,6)^6 + 0,2007 \approx 0,7874$$

.

в)Подія {Надійде хоча б одна заявка} протилежна події {Не надійде жодної заявки}. Тому

$P\{\text{Надійде хоча б одна заявка}\} = 1 - P\{\text{Не надійде жодної заявки}\} = 1 - P_{10}(0) = 1 - (0{,}6)^{10} \approx 1 - 0{,}006 = 0{,}994$

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо p дуже мале у порівнянні з n, а значення n велике, то справедлива наближена формула

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad \text{де } x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Значення функції $\varphi(x)$ (це шільність стандартного нормального розподілу – про неї говоритимемо у подальших темах) знаходимо з таблиць (Додаток 1).

Властивості функції $\varphi(x)$

1) $\varphi(x)$ парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

2)$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$.

Приклад 4.2. За соціологічними опитуваннями відомо, що в даному місті лише 0,5% населення на минулих виборах голосували за Партію Зелених. Фабрика, що знаходиться в місті, налічує 10 000 робітників. Знайти ймовірність того, що на наступних виборах за Партію Зелених проголосують рівно 55 робітників.

Розв'язок. Маємо $n = 10\,000$ незалежних випробувань – як робітник проголосує: за Партію Зелених (з ймовірністю $p = 0{,}005$, «успіх») або ні (з ймовірністю $q = 1 - p = 0{,}995$, «невдача») . Треба знайти ймовірність, що «успіх» відбудеться 55 раз. Очевидно, що n велике, p мале. Використаємо локальну теорему Лапласа.

$$P_{10\,000}(55) \approx \frac{1}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}}\varphi(x),$$

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{55 - 10\,000 \cdot 0{,}005}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995}} = \frac{5}{7{,}0533} \approx 0{,}71.$$

За таблицями (Додаток 1) знаходимо $\varphi(0{,}71) = 0{,}3101$.

$$P_{10\,000}(55) \approx \frac{\varphi(0{,}71)}{7{,}0533} = \frac{0{,}3101}{7{,}0533} \approx 0{,}044.$$

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Якщо p дуже мале у порівнянні з n, n велике, то ймовірність того, що подія «успіх» відбудеться не менше ніж k_1 разів і не більше ніж k_2 разів,

наближено дорівнює

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad \text{де } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}};$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Значення функції $\Phi(x)$ (це функція розподілу вже згаданого вище стандартного нормального розподілу) знаходимо з таблиць (Додаток 2).

Властивості функції $\Phi(x)$

1) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Тому таблиці для $\Phi(x)$ складені лише для додатних x.

2)$0 \le \Phi(x) \le 1$.

3)$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1$. Для значень x, більших за 4, в таблиці відсутні значення функції, оскільки вони мало відрізняються від 1.

Приклад 4.3. В страховій компанії зареєстровано 10 000 персон одного віку і однієї соціальної групи. Ймовірність померти на протязі року для кожної застрахованої персони становить $p = 0{,}006$. Кожна з цих персон на початок року вносить страховий внесок 12 доларів. У випадку смерті застрахованої персони спадкоємець, зазначений у заповіті, отримає від компанії 1000 доларів. Знайти ймовірність того, що а)страхова компанія стане збитковою; б)страхова компанія отримає прибуток не менший, ніж 40 000 доларів.

Розв'язок. В даній задачі також присутня схема Бернуллі. Маємо $n = 10\,000$ незалежних випробувань, в результаті кожного з них або відбудеться подія $A = \{\text{Смерть даного клієнта на протязі року}\}$ з ймовірністю $p = 0{,}006$, або не відбудеться з ймовірністю $q = 1 - p = 0{,}994$. Позначимо k – кількість смертей серед 10 000 клієнтів на протязі року.

а) Коли страхова компанія понесе збитки? Коли обсяг виплат компанії на протязі року перевищить дохід, тобто суму страхових внесків. Дохід складає $12 \times 10\,000 = 120\,000$ доларів. Обсяг виплат складає $k \times 1000 = 1000k$ доларів. Отже,

$P\{\text{Страхова компанія понесе збитки}\} = P\{1000k > 120\,000\} =$
$P\{k > 120\} = P\{121 \le k \le 10\,000\} = P_{10\,000}(121; 10\,000)$

Для підрахунку цієї ймовірності скористуємось інтегральною теоремою Муавра-Лапласа.

$$P_{10\,000}(121; 10\,000) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{121 - 10\,000 \times 0{,}006}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994}} \approx 7{,}899;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{121 - 10\,000 \times 0{,}006}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994}} \approx 1287.$$

$P_{10\,000}(121;10\,000) \approx \Phi(1287) - \Phi(7{,}899) \approx 1 - 1 = 0.$

Аргументи у функції більші за 4, тому значення $\Phi \approx 1$. Ймовірність збанкрутувати для страхової компанії практично нульова.

б) Знайдемо тепер ймовірність, що прибуток буде не менший, ніж 40 000 доларів. Прибуток – це різниця між доходом і збитками, тобто $120\,000 - 1000\text{k}$.

$P\{120\,000 - 1000k \geq 40\,000\} = P\{0 \leq k \leq 80\} = P_{10\,000}(0;80).$

Знов застосуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

$$P_{10\,000}(0;80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1);$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 10\,000 \times 0{,}006}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994}} \approx -7{,}77;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 10\,000 \times 0{,}006}{\sqrt{10\,000 \cdot 0{,}006 \cdot 0{,}994}} \approx 2{,}59.$$

Значення для першого аргументу знаходимо з таблиць (Додаток 2), для другого використовуємо властивість (1) функції Ф

$P_{10\,000}(0;80) \approx \Phi(2{,}59) - \Phi(-7{,}77) \approx 0{,}9952 - \big(1 - \Phi(7{,}77)\big) =$
$069952 - (1 - 1) = 0{,}9952$

Формула Пуассона

Якщо p мале у порівнянні з n, n велике, але при цьому значення величини $\lambda = np$ залишається невеликим (припустимо, $0 < np < 10$), то справедлива наближена формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \text{де } k = 0,1,\dots,n.$$

Значення функції з правої частини формули знаходимо з таблиць (це ймовірності розподілу Пуассона з параметром λ) (Додаток 3).

Приклад 4.4. Деяка суспільна організація налічує 400 членів. Знайти ймовірність, що в трьох людей з даної спільноти день народження припаде на Різдво. Вважаємо, що ймовірність народження в фіксований день дорівнює 1/365.

Розв'язок. Маємо схему Бернуллі з $n = 400$ незалежних випробувань; ймовірність «успіху» - що день народження падає на Різдво – стала і дорівнює $p = \frac{1}{365} \approx 0{,}00274$. Тут доречно скористатись теоремою

Пуассона: n велике, p мале, при цьому $\lambda = np = 400:365 \approx 1{,}096 \approx 1 < 10$ – досить невелике. Залишається скористатись таблицями (Додаток 3)

$$P_{400}(3) \approx P(\lambda = 1, k = 3) \approx 0{,}0613.$$

Задачі до теми 4.

Рівень 1

4.1. Два рівносильні шахісти грають в шахи. Що ймовірніше – виграти 2 партії з чотирьох чи 3 партії з шести? (Нічиї не враховуються).

4.2. Продукція містить 10% браку. Знайти ймовірність того, що серед шести навмання взятих виробів а)немає бракованих; б)рівно 3 бракованих; в)не менше двох бракованих.

4.3. Для прядіння змішали білу і фарбовану бавовну у відношенні 1:3. З суміші навмання вибрали 5 волокон. Яка ймовірність того, що а)серед них рівно 2 білих; б)не менше 4-х білих; в)хоча б 1 волокно біле?

4.4. (**Проблема Джона Сміта**) Чи однакові шанси на успіх у трьох гравців, якщо першому потрібно отримати хоча б одну шістку при підкиданні гральної кості 6 разів, другому – не менше двох шісток при 12 підкиданнях, а третьому – не менше трьох шісток при 18 підкиданнях?

4.5. Знайти ймовірність того, що подія А відбудеться рівно 70 разів в 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,25.

4.6. Знайти ймовірність того, що подія А відбудеться 1400 разів в 2400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,6.

4.7. Ймовірність поцілити в мішень дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах попадань буде рівно 75.

4.8. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених буде рівно 50 хлопчиків.

4.9. Ймовірність появи події в кожному зі 100 незалежних випробувань $p = 0{,}8$. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться а)не менше 75 і не більше 90 разів; б)не менше 75 разів; в)не більше 74 разів.

4.10. Виробництво дає 1% браку. Яка ймовірність того, що серед 11000 виробів бракованих буде не більше 40-ка.

4.11. Схожість насіння льону становить 90%. Знайти ймовірність того, що з 900 посаджених насінин число проростих буде між 790 і 830.

4.12. Серед насіння рису є 0,4% насінин бур'яну. Яка ймовірність виявити 5 насінин бур'яну при випадковому відборі 500 насінин?

4.13. Пристрій складається з 1000 елементів, які працюють незалежно одне від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента на протязі години дорівнює 0,001. Знайти ймовірність того, що за годину відмовлять рівно 2 елементи.

4.14. Ймовірність поцілити в мішень при одному пострілі дорівнює 0,01. Знайти ймовірність того, що при 200 пострілах буде 3 попадання.

4.15. Станок-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена на ньому деталь є бракованою, є 0,01. Знайти ймовірність, що серед 1000 деталей 3 бракованих.

4.16. Фабрика виготовляє 80% взуття найвищої якості. Знайти ймовірність того, що зі 100 пар взуття, випущених фабрикою, а)половина виявиться якісних; б)якісних буде не більше 90 і не менше 60.

4.17. Ймовірність отримання вдалого результату при проведенні складного хімічного досліду дорівнює 2/3. Знайти ймовірність того, що при проведенні 7-ми дослідів вдалих серед них буде рівно 4.

4.18. Викладач економіки пропонує студентам тест, який складається з 10 питань, на які треба відповісти лише «Так» чи «Ні». Студент, який не знає матеріалу, розставляє відповіді навмання. Яка ймовірність, що він отримає задовільну оцінку або вище, якщо для цього достатньо відповісти правильно лише на 6 питань?

4.19. Ймовірність виникнення небезпечного для приладу перевантаження дорівнює 0,4. Обчислити ймовірність відмови приладу в серії з трьох незалежних дослідів, якщо ймовірність відмови при одному, двох та трьох небезпечних перевантаженнях дорівнює відповідно 0,2; 0,5 та 0,8.

4.20. В кафе «Джо» 70% відвідувачів замовляють принаймні 1 чашку чаю. Частка тих відвідувачів, що купляють шоколадний мафін, дорівнює 0,35. Вважаємо ці замовлення незалежними.

а) Знайти ймовірність того, що Джо продасть перший шоколадний мафін п’ятому відвідувачу.

б) Знайти ймовірність, що в випадковій вибірці з 20 відвідувачів більше 15 замовлять чашку чаю і принаймні 6 куплять шоколадний мафін.

4.21. Керівництво фабрики розглядає 2 методи перевірки якості партії товару деякої продукції, яку виробляє фабрика.

Метод 1. Випадково обирається 10 одиниць з партії (що є великою) і партія приймається ВТК(відділом технічного контролю), якщо в даній вибірці немає дефектів. Якщо там є 2 або більше дефектів – відхиляється. Якщо є лише одна дефектна одиниця, тоді береться інша вибірка обсягу 10 і партія приймається, якщо в вибірці немає дефектів, інакше відхиляється.

Метод 2. Обирається вибірка з 20 одиниць з партії і партія приймається, якщо є не більше, ніж один дефект в вибірці, інакше відхиляється.

Насправді попередні обстеження показали, що рівно 1% одиниць товару, що виробляється фабрикою, з дефектами. Директор бажає використовувати той метод перевірки якості продукції, для якого ймовірність прийняти партію максимальна. Який метод слід використовувати?

Рівень 2

4.22. Відомо, що при підкиданні 10-ти гральних кубиків випало хоча б раз 6 очок. Яка ймовірність, що шістка випала 2 і більше разів?

4.23. Мері підкидає $n+1$ монету, а Джон - n монет. Яка ймовірність того, що в Мері випаде більше орлів, ніж у Джона?

4.24. Відомо, що при 10-ти підкиданнях правильної монети герб випав рівно 7 разів. Яка умовна ймовірність того, що при першому і другому підкиданнях випав герб?

4.25. Знайти ймовірність того, що п'ятий успіх в схемі Бернуллі з'явиться у вісімнадцятому випробуванні, а в усіх випробуваннях з непарними номерами буде невдача.

Тема 5. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - ймовірнісний простір.

► **Випадковою величиною ξ**, заданою на цьому просторі, називається функція $\xi(\omega): \Omega \to R$, ***вимірна відносно сігма-алгебри*** $\mathcal{F}$, тобто така, що для $\forall x \in R: \{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. Остання вимога хоча є суто технічною, але вкрай важлива, оскільки вона гарантує можливість визначення ймовірності події $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$. Це необхідно для подальшого визначення функції розподілу випадкової величини.

Наведемо декілька прикладів випадкових величин.

1) При підкиданні грального кубика кількість очок, що випала на верхній грані, є випадковою величиною.
2) При підкиданні двох гральних кубиків сума очок, що випали, а також різниця очок – будуть випадковими величинами.
3) Кількість підкидань монети до першої появи герба є випадковою величиною.
4) Нехай на відрізку $[a,b]$ випадковим чином вибирається точка. Тоді її координата буде випадковою величиною.

► **Функцією розподілу** випадкової величини ξ називається

$$F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = P\{\xi < x\}.$$

Ця функція характеризує розподіл значень випадкової величини і є її важливішою характеристикою.

Властивості функції розподілу

1) $0 \le F(x) \le 1$.
2) $F(x)$ – неспадна, тобто для довільних a та b, таких що $a < b$, виконується $F(a) \le F(b)$.

3) Для будь-яких $a < b$ ймовірність потрапляння випадкової величини ξ в напівінтервал $[a,b)$ дорівнює $P\{a \le \xi < b\} = F(b) - F(a)$.
4) Якщо можливі значення випадкової величини ξ належать інтервалу (a,b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$ і $F(x) = 1$ при $x > b$.
5) $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$; $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
6) Функція розподілу неперервна зліва: $F(x-0) = F(x)$.
7) Для будь-якого $x \in R$ ймовірність того, що ξ прийме значення x, дорівнює величині стрибка функції розподілу в точці x: $P\{\xi = x\} = F(x+0) - F(x-0) = F(x+0) - F(x)$.

Дискретні випадкові величини.

Випадкова величина на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ називається **дискретною**, якщо вона приймає скінченну або зліченну кількість значень.

► **Законом розподілу (або просто розподілом) дискретної випадкової величини** ξ називається відповідність між можливими значеннями випадкової величини x_i і їх ймовірностями $p_i = P\{\xi = x_i\}$. Закон розподілу можна задати таблицею:

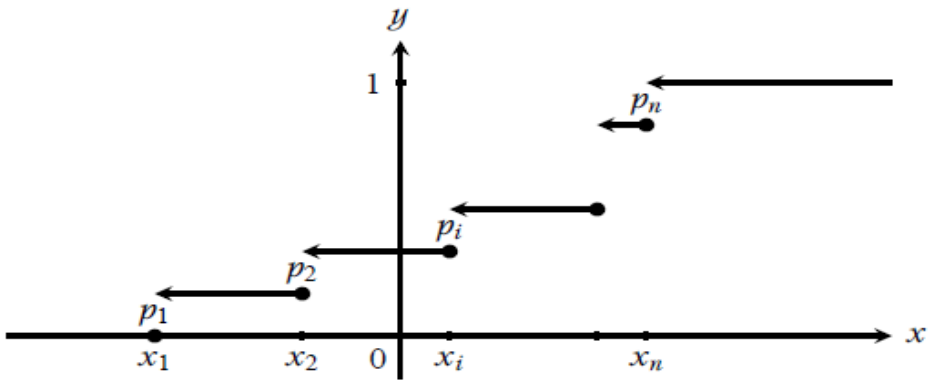
ξ	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

Очевидно, що $\sum_i p_i = 1$

Функція розподілу дискретної випадкової величини має східчастий вигляд, зі стрибками в точках x_i:

$$F(x) = \sum_{i:x_i<x} p_i$$

Якщо випадкова величина приймає скінченну кількість значень $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, то графік функції розподілу матиме наступний вигляд



Графік функції розподілу $F(x)$

Перелічимо деякі основні дискретні розподіли.

Біноміальний розподіл. Випадкова величина ξ має **біноміальний розподіл з параметрами n, p,** якщо вона приймає значення $k = 0,1,2,\dots,n$ з ймовірностями, що задаються формулою Бернуллі:

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}; \quad q = 1 - p.$$

Якщо розглядати серію із n незалежних випробувань, в кожному з яких стається успіх з ймовірністю p або невдача з ймовірністю $q = 1 - p$, то ξ виражає ***кількість успіхів в цій серії випробувань***.

Геометричний розподіл. Випадкова величина ξ має **геометричний розподіл з параметром p,** якщо вона приймає значення $k = 1,2,\dots,n,\dots$ з ймовірностями $P\{\xi = k\} = pq^{k-1}$.

Якщо розглядати експеримент, в якому проводяться послідовні незалежні випробування ***до першої появи успіху***, причому в кожному з випробувань може статися успіх з ймовірністю p або невдача з ймовірністю $q = 1 - p$, то ξ виражає ***номер випробування, в якому вперше стався успіх***.

Розподіл Пуассона. Випадкова величина ξ має **розподіл Пуассона з параметром λ $(\lambda > 0)$,** якщо вона приймає значення $k = 0,1,2,\dots,n,\dots$ з ймовірностями $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Приклад 5.1. Монету підкидають 2 рази, ξ – кількість поява гербів. Скласти закон розподілу випадкової величини ξ, визначити функцію розподілу $F_\xi(x)$, побудувати її графік.

Розв'язок. $\Omega = \{ГГ, ГР, РГ, РР\}$ – простір елементарних подій.

$P\{\xi = 0\} = P\{РР\} = P\{Р\}P\{Р\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;

$P\{\xi = 1\} = P\{ГР \cup РГ\} = P\{ГР\} + P\{РГ\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$;

$P\{\xi = 2\} = P\{ГГ\} = \frac{1}{4}$.

Отже, закон розподілу задається таким чином:

ξ	0	1	2
p_i	1/4	1/2	1/4

Знайдемо тепер функцію розподілу $F_\xi(x)$:

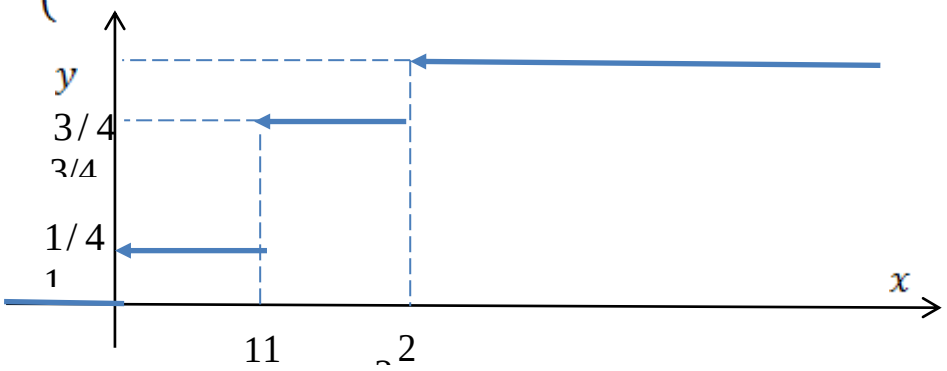
Якщо $x \le 0$: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 0$;

Якщо $0 < x \le 1$: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} = \frac{1}{4}$.

Якщо $1 < x \le 2$: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Якщо $x > 2$: $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 0\} + P\{\xi = 1\} + P\{\xi = 2\} = 1$.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1/4, & 0 < x \le 1, \\ 3/4, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$



Графік функції розподілу $F_\xi(x)$

Приклад 5.2. Нехай випадкова величина ξ має такий розподіл:

ξ	–2	–1	0	1	2
p_i	1/4	1/8	1/4	1/8	1/4

Яким буде розподіл випадкових величин $\eta = \xi^2$ та $\varsigma = \xi^3$?

Розв'язок. Неважко зрозуміти, що випадкова величина η набуватиме лише трьох значень: 0, 1 та 4, причому

$P\{\eta = 0\} = P\{\xi = 0\} = \frac{1}{4}$;

$P\{\eta = 1\} = P\{(\xi = 1) \cup (\xi = -1)\} = P\{(\xi = 1)\} + P\{(\xi = -1)\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$;

$P\{\eta = 4\} = P\{(\xi = 2) \cup (\xi = -2)\} = P\{(\xi = 2)\} + P\{(\xi = -2)\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Отже, випадкова величина η має такий розподіл:

η	0	1	4
p_i	1/4	1/4	1/2

Переконайтесь самостійно, що випадкова величина ς має розподіл, що задається таким чином:

ς	–8	–1	0	1	8
p_i	1/4	1/8	1/4	1/8	1/4

Приклад 5.3. Нехай ξ – біноміальна випадкова величина з параметрами n та p. Яке найімовірніше значення ξ?

Розв'язок. Порівняємо значення двох послідовних ймовірностей біноміального розподілу:

$$\frac{P\{\xi=k\}}{P\{\xi=k-1\}}=\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}p^{k-1}q^{n-k+1}}=\frac{p(n-k+1)}{qk}=1+\frac{p(n+1)-k}{qk}.$$

Звідси випливає, що $P\{\xi=k\}>P\{\xi=k-1\}$ при $k<p(n+1)$, і $P\{\xi=k\}<P\{\xi=k-1\}$ при $k>p(n+1)$. Тобто ймовірності $P_n(k)=P\{\xi=k\}$ спочатку зростають, сягають максимуму при $k_0=\lfloor p(n+1)\rfloor$, і далі спадають. Значення k_0 є ***найбільш ймовірним значенням випадкової величини*** ξ. Якщо ж значення $p(n+1)$ ціле, то $P_n(k_0)=P_n(k_0-1)$, тобто найбільш ймовірних значень буде два: k_0 та k_0-1.

Абсолютно неперервні випадкові величини

Нехай $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – ймовірнісний простір, ξ – випадкова величина з функцією розподілу $F(x)$.

► Кажуть, що випадкова величина ξ має **щільність розподілу**, якщо існує інтегровна функція $p(x)$, така, що $F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du$. Тоді випадкову величину ξ відносять до **абсолютно неперервного типу**. (Щільність випадкової величини позначають як $p(x)$, так і $f(x)$)

Властивості щільності розподілу

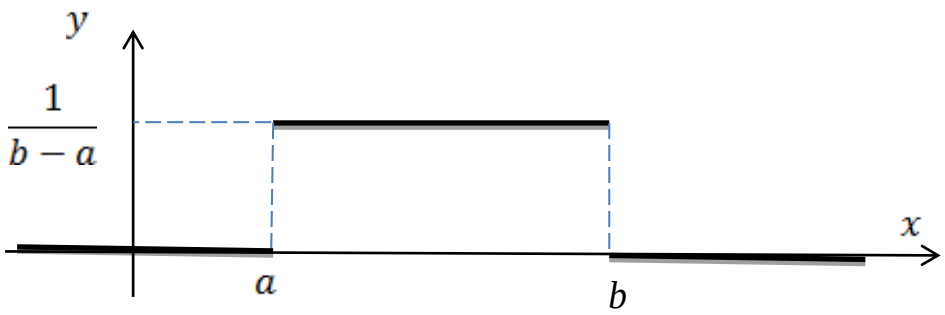
1) Якщо щільність $p(x)$ неперервна в точці x, то $F'(x)=p(x)$.
2) Щільність розподілу випадкової величини – невід'ємна функція: $p(x)\geq 0$.
3) $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$ (**Умова нормування**).
4) Для будь-яких $a<b$ ймовірність потрапляння випадкової величини ξ в напівінтервал $[a,b)$ дорівнює $P\{a\leq\xi<b\}=\int_a^b p(x)dx$. І взагалі, $P\{\xi\in B\}=\int_B p(x)dx$ для будь-якої події $B\in\mathcal{F}$.
5) Для абсолютно неперервної випадкової величини ξ : $P\{\xi=x_1\}=0$, де x_1 – деяке можливе значення ξ.

Розглянемо деякі основні абсолютно неперервні розподіли.

Рівномірним на відрізку [*a, b*] називають розподіл ймовірностей випадкової величини ξ, який описується щільністю

$$p(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

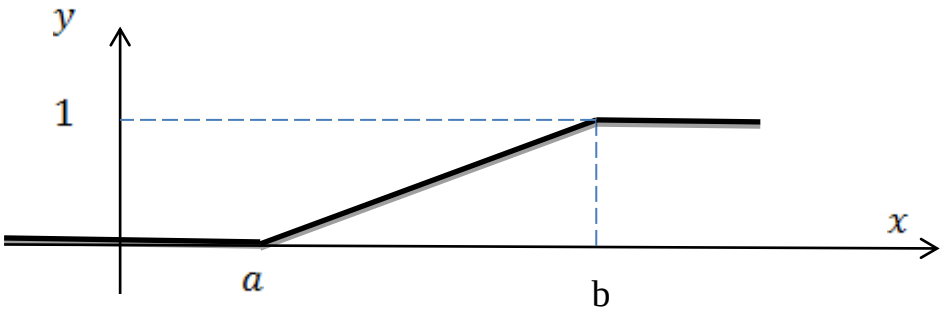
(тут $a,\ b$ – параметри рівномірного розподілу).



Графік щільності $p(x)$

Функція розподілу має вигляд

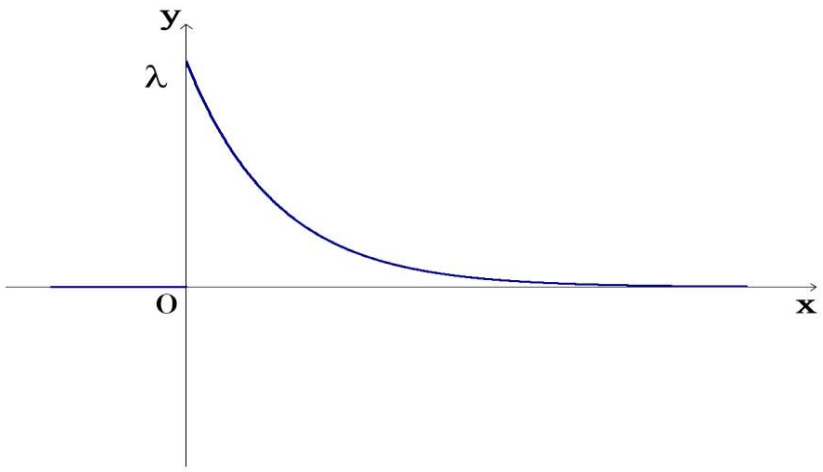
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$



Графік функції розподілу $F(x)$

Показниковий (експоненціальний) розподіл з параметром λ $(\lambda>0)$ – це розподіл випадкової величини ξ зі щільністю

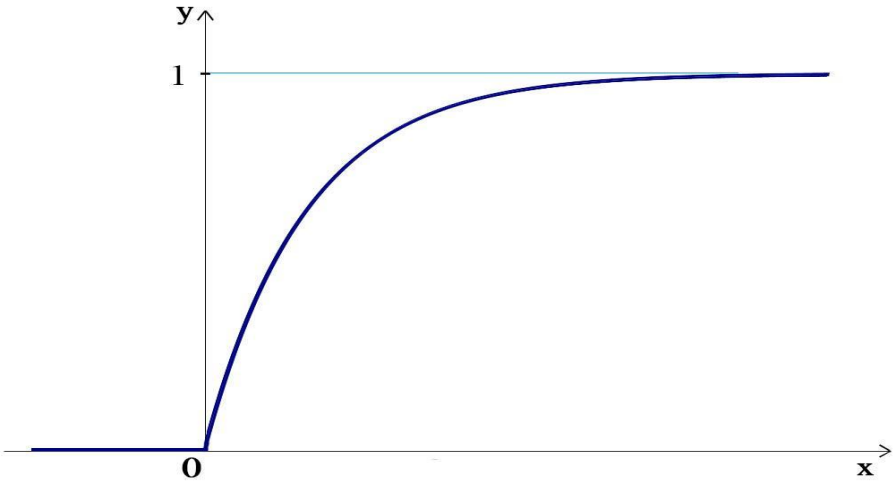
$$p(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$



Графік щільності $p(x)$

Функція цього розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$



Графік функції розподілу $F(x)$

<u>Нормальним (гаусовим)</u> називають розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини ξ, який на всій прямій описується щільністю

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

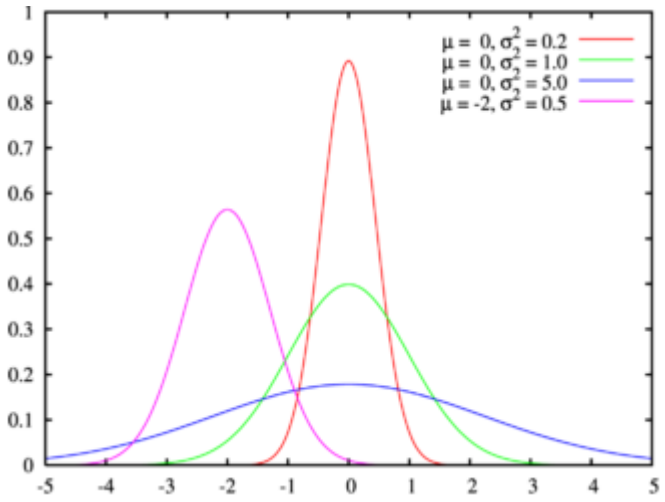
(тут a та σ^2 – параметри розподілу, $\sigma > 0$). Функція нормального розподілу має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du.$$

Загальним називають нормальний розподіл з довільними параметрами a та σ^2. **Стандартним (нормованим)** називають нормальний розподіл з параметрами $a=0$ та $\sigma^2=1$. Для нормального розподілу прийняте таке позначення: $\xi \sim N(a,\sigma^2)$. Щільність $\varphi(x)$ і функція розподілу $\Phi(x)$ стандартної нормальної величини табульовані і знаходяться в Додатках 1,2.

Ймовірність попадання нормальної випадкової величини в інтервал: $P\{\alpha < \xi < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

Нормальна крива – графік щільності нормального розподілу. Це крива, симетрична відносно прямої $x=a$, яка має єдиний максимум в цій точці. Зміна параметра a призводить до зсуву нормальної кривої вздовж вісі. Зі зростанням параметру σ крива стає більш пологою, при спаданні – більш „гостровершинною" (На рисунку параметр a позначений як μ).



Правило трьох сігм: $P\{|\xi - a| < 3\sigma\} \approx 0{,}9973$, тобто значення випадкової величини з нормальним законом розподілу з ймовірністю, досить близькою до одиниці, зосереджені на проміжку $[a-3\sigma, a+3\sigma]$.

Приклад 5.4. Випадкова величина ξ задана щільністю

$$p(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^4}, & x \le -1 \\ 0, & -1 < x \le 1 \\ \frac{A}{x^4}, & x > 1 \end{cases}$$

Знайти: а)сталу А; б) $F(x)$; в)$P\left\{\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Розв'язок. а)Знайдемо сталу А з умови нормування: $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{A}{x^4}dx + \int_{1}^{\infty} \frac{A}{x^4}dx = 2\int_{1}^{\infty} \frac{A}{x^4}dx = 2A\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^{+\infty} = \frac{2A}{3} = 1 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

б) Для знаходження функції розподілу використаємо формулу $F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(u)du$. Розглянемо окремо інтервали, на яких щільність задається по-різному.

При $x\le -1$ $F(x)=\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{x} u^{-4}\,du=-\frac{1}{2x^3}$.

При $-1<x\le 1$ $F(x)=\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{-1} u^{-4}\,du=\frac{1}{2}$.

При $x>1$ $F(x)=\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{-1} u^{-4}\,du+\frac{3}{2}\int_{1}^{x} u^{-4}\,du=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{u^{-3}}{-3}\Big|_1^x=1-\frac{1}{2x^3}$.

Отже, визначена функція розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2x^3}, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{2}, & -1<x\le 1;\\ 1-\dfrac{1}{2x^3}, & x>1. \end{cases}$$

в) $P\left\{\xi\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$

Приклад 5.5. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу (показниковий розподіл з параметром 1):

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0;\\ 1-e^{-x}, & x\ge 0. \end{cases}$$

Знайти: а) $P\left\{\xi<1/\xi>\frac{1}{2}\right\}$; б) $P\{\xi^2+\xi>6\}$.

Розв'язок. а)Розпишемо умовну ймовірність за означенням

$$P\left\{\xi<1/\xi>\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left\{\{\xi<1\}\cap\left\{\xi>\frac{1}{2}\right\}\right\}}{P\left\{\xi>\frac{1}{2}\right\}}=\frac{P\left\{\frac{1}{2}<\xi<1\right\}}{P\left\{\xi>\frac{1}{2}\right\}}=\frac{F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)}{1-F\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{1-e^{-1}-\left(1-e^{-\frac{1}{2}}\right)}{e^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$1-e^{-\frac{1}{2}}$$

б)Розв'яжемо нерівність , яка описує задану подію.

$$P\left\{\xi^2+\xi>6\right\}=P\left\{(\xi+3)(\xi-2)>0\right\}=P\left\{\xi\in(-\infty,-3)\right\}+P\left\{\xi\in(2,+\infty)\right\}=$$

$$=F(-3)+1-F(2)=e^{-2}.$$

Приклад 5.6. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу випадкових величин а)$\eta_1=|\xi|$; б)$\eta_2=\frac{1}{\xi^2}$.

Розв'язок. а) Спочатку знайдемо функцію розподілу випадкової величини η_1: $F_{\eta_1}(x)=P\{\eta_1<x\}=P\{|\xi|<x\}$. Очевидно, що $F_{\eta_1}(x)=0$, якщо $x\le 0$. Нехай $x>0$. Тоді

$$F_{\eta_1}=P\{\eta_1<x\}=P\{|\xi|<x\}=P\{-x<\xi<x\}=\Phi(x)-\Phi(-x)=\Phi(x)-(1-\Phi(x))=$$

$=2\Phi(x)-1$. Отже,

$$F_{\eta_1}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2\Phi(x)-1, & x>0.\end{cases}$$

Диференціюючи знайдену функцію розподілу, визначаємо щільність.

$$p_{\eta_1}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, & x>0\end{cases}$$

б) Діємо аналогічно: $F_{\eta_2}(x)=0$, якщо $x\le 0$. Нехай $x>0$.

$$F_{\eta_2}(x)=P\{\eta_2<x\}=P\left\{\frac{1}{\xi^2}<x\right\}=P\left\{|\xi|>\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}=P\left\{\xi>\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}+$$
$$P\left\{\xi<-\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}=1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=2-2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$F_{\eta_2}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2-2\Phi\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right), & x>0.\end{cases}$$

Оскільки $\left(\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)'=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2x}}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{-1}{2\sqrt{2\pi x^3}}e^{-\frac{1}{2x}}$,

то $$p_{\eta_2}(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x^3}}e^{-\frac{1}{2x}}, & x>0\end{cases}$$

Приклад 5.7. Випадкова величина ξ має щільність $p(x)=e^{-2|x|}$. Визначити щільність розподілу випадкової величини $\eta=\lfloor\xi\rfloor$.

Розв'язок. Очевидно, що випадкова величина η, яка визначена як ціла частина ξ, є дискретною випадковою величиною, що набуває всіх можливих цілих значень. Знайдемо її закон розподілу:

$$p_k=P\{\eta=k\}=P\{\lfloor\xi\rfloor=k\}=P\{k\le\xi<k+1\}=\int_k^{k+1}e^{-2|x|}dx$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $k\ge 0$. Тоді

$$p_k=\int_k^{k+1}e^{-2x}dx=\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{k+1}^{k}=\frac{e^2-1}{2e^{2k+2}}\ .$$

Якщо ж $k<0$, то $p_k=\int_k^{k+1}e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{k}^{k+1}=\frac{e^2-1}{2e^{-2k}}$.

Отже, $$P\{\eta=k\}=\begin{cases}\dfrac{e^2-1}{2e^{2k+2}}, & при\ k\ge 0\\ \dfrac{e^2-1}{2e^{-2k}}, & при\ k<0\end{cases}$$

Переконайтесь самостійно, що $\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}P\{\eta=k\}=1$.

Задачі до теми 5.

Рівень 1

5.1. Тричі підкидають гральний кубик. Нехай ξ – число появ шісток. Знайти закон розподілу ξ.

5.2. В партії з 10 деталей знаходяться 8 стандартних. Навмання відбирають 2 деталі. Скласти закон розподілу ξ – числа стандартних деталей серед відібраних.

5.3. Проводиться ряд спроб ввімкнути двигун автомобіля. Кожне випробування займає 1 сек. і закінчується успіхом (включенням двигуна) незалежно від інших спроб з ймовірністю $p = 0{,}6$. Знайти розподіл випадкової величини ξ – часу, який витрачається на включення двигуна.

5.4. На заводі є 3 конвеєри, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність, що зламається перший дорівнює 0,1; другий – 0,01; третій – 0,03. Нехай ξ – кількість конвеєрів, які є справними. Скласти закон розподілу ξ.

5.5. Тривалість телефонної розмови вимірюється хвилинами і є геометричною випадковою величиною з параметром p. Яка ймовірність того, що розмова буде тривати ще 3 хвилини, якщо до цього вона продовжувалась 10 хвилин?

5.6. Які з послідовностей є розподілами дискретних випадкових величин? ($0 < p < 1$; $q = 1 - p$).

а) $p^k q^2;\ k = 1,2,\dots;$ б) $p^{k-n}q;\ k = n, n+1,\dots;$

в) $\frac{1}{k+1};\ k = 1,2,\dots;$ г) $\frac{2^k e^{-2}}{k!};\ k = 0,1,\dots$

5.7. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}, & -1 < x \le \frac{1}{3}; \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Знайти а)щільність розподілу $f(x)$; б)$P\left\{-\frac{1}{2} < \xi < 8\right\}$; в)$P\left\{\xi > -\frac{1}{2}\right\}$.

5.8. Задана щільність розподілу неперервної випадкової величини

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \le 2; \\ 2, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$. Побудувати її графік.

5.9. Задана щільність розподілу неперервної випадкової величини

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{4 - x^2}}, & x \in [-2,2]; \\ 0, & x \notin [-2,2]. \end{cases}$$

Знайти сталу с, функцію розподілу $F(x)$. Побудувати її графік.

5.10. Які умови треба накласти на параметри наступних функцій $p(x)$ для того, щоб вони були щільностями розподілу?

а) $p(x) = \begin{cases} asinx, & x \in [0,b]; \\ 0, & x \notin [0,b]. \end{cases}$ б) $p(x) = \begin{cases} 0, & x < c; \\ ax^b, & x \geq c. \end{cases}$

в) $p(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$.

5.11. Точка Р рівномірно розподілена всередині круга радіуса R. Нехай ξ - відстань від точки Р до центра круга. Знайти а) щільність розподілу випадкової величини ξ; б) $P\left\{\xi > \frac{R}{2}\right\}$.

5.12. Випадкова величина ξ має щільність Коші: $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Обчислити ймовірності: а) $P\left\{\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; б) $P\{\xi^2 + \xi > 0\}$; в) $P\{\xi^2 - \xi > 2/\xi > 0\}$.

5.13. Випадкова величина ξ має щільність $p(x) = e^{-2|x|}$. Обчислити а) $P\{\xi < 1\}$; б) $P\{\xi < 3/\xi \geq 2\}$.

5.14. Випадкова величина ξ має рівномірний на $[0,1]$ розподіл. Знайти щільність розподілів випадкових величин а) $\eta_1 = 3\xi - 2$; б) $\eta_2 = |2\xi - 1|$; в) $\eta_3 = -ln\xi$.

5.15. Випадкова величина ξ має щільність $p(x) = e^{-2|x|}$. Визначити щільності розподілів випадкових величин а) $\eta_1 = \xi^2$; б) $\eta_2 = e^{-\{\xi\}}$.

5.16. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Знайти щільності розподілів випадкових величин а) $\eta_1 = \xi^2$; б) $\eta_2 = |\xi|$.

5.17. Випадкова величина ξ має розподіл арксинуса, який задається щільністю:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Знайти щільності розподілів випадкових величин $\eta_1 = \arcsin\xi$ та $\eta_2 = 1 + \xi^2$.

5.18. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $|\sin\xi|$.

5.19. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Знайти щільність розподілу величин а) $\eta_1 = a\xi + b$; б) $\eta_2 = \frac{1}{\xi^2}$. Знайти розподіл величини $\eta = sign(\xi)$.

5.20. Два баскетболісти кидають по черзі в кільце м'ячі до першого влучання. Ймовірність влучити в кільце для першого спортсмена дорівнює 0,7; для другого – 0,8. Скласти закон розподілу ξ – числа м'ячів, кинутих обома спортсменами разом.

5.21. З урни, в якій міститься 3 білих і 2 чорних кулі, переклали 2 кулі до урни, в якій є 1 біла і 2 чорні кулі. Далі з другої урни беруть 2 кулі. Нехай ξ – число білих куль серед них. Знайти розподіл ξ.

5.22. Підкидають пару симетричних гральних кубиків і розглядають дві випадкові величини ξ та η, де ξ – число очок на першому гральному кубикові; η – на другому. Знайти: а)закон розподілу випадкової величини $max\{\xi,\eta\}$; б)закон розподілу $\xi+\eta$; в)$P\{|\xi-\eta|\geq 3\}$; в)$P\{min\{\xi,\eta\}\leq 1; max\{\xi,\eta\}\geq 5\}$.

Рівень 2

5.23. Нехай на декартовій площині задані точки $O(0,0);\ T(0,1)$. Випадкова точка Р лежить на вісі ОХ, і розташована таким чином, що $\angle OTP$ рівномірно розподілений на $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Знайти щільність розподілу абсциси точки Р.

5.24. Випадкова величина ξ має експоненціальний розподіл з параметром λ.
а) Довести, що при $\alpha>0$ величина $\xi^{1/\alpha}$ має розподіл Вейбула з параметрами α,λ, тобто що функція цієї величини має вигляд $F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x\geq 0\end{cases}$. б) Показати, що випадкова величина $[\xi]$ має геометричний розподіл. Визначити параметр цього розподілу.

5.25. Нехай $F(x)$ – функція розподілу випадкової величини ξ. Записати функції розподілу випадкових величин а)$\eta_1=a\xi+b$; б) б)$\eta_2=e^{\xi}$; в)$\eta_3=F(\xi)$.

5.26. Випадкова величина ξ має показниковий (експоненціальний) розподіл з параметром λ. Знайти щільності розподілів випадкових величин а)$\eta_1=\xi^2$; б)$\eta_2=e^{-\xi}$; в) $\eta_3=\{\lambda\xi\}$.

Тема 6. ВИПАДКОВІ ВЕКТОРИ (БАГАТОВИМІРНІ РОЗПОДІЛИ)

Нехай $(\Omega,\mathcal{F},P)$ - ймовірнісний простір, на якому визначені випадкові величини $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$.

► **Випадковим вектором** називатимемо функцію $\bar{\xi}(\omega)=(\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\dots,\xi_n(\omega))$.

Оскільки $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ – випадкові величини, то для $\forall x_1,x_2,\dots,x_n$ випадкова подія $\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\dots,\xi_n<x_n\}\in\mathcal{F}$. Отже, визначена ймовірність $P\{\omega:\xi_1(\omega)<x_1,\xi_2(\omega)<x_2,\dots,\xi_n(\omega)<x_n\}=P\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\dots,\xi_n<x_n\}$.

► Функція $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=P\{\xi_1<x_1,\xi_2<x_2,\dots,\xi_n<x_n\}$, визначена на R^n, називається **функцією розподілу випадкового вектора** $\bar{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ або функцією **сумісного розподілу** випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$.

Властивості функції розподілу випадкового вектора

1) $0 \le F(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 1.$
2) $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неспадна по кожному із своїх аргументів.
3) $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неперервна зліва по кожному із своїх аргументів: $F(x_1, \dots, x_i - 0, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)\ \forall x_i, i = \overline{1,n}.$
4) $\lim_{x_1, x_2, \dots, x_n \to \infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1.$
5) $\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = 0\ \ \forall i.$
6) $\lim_{x_1 \to \infty, \dots, x_{i-1} \to \infty, x_{i+1} \to \infty, \dots, x_n \to \infty} F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = F_{\xi_i}(x_i).$

► Випадковий вектор $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ називається **абсолютно неперервним**, якщо його функція розподілу допускає представлення:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} du_1 \int_{-\infty}^{x_2} du_2 \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, u_2, \dots, u_n) du_n ,$$

де функція n змінних $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є **щільністю розподілу** випадкового вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ або **сумісною щільністю** випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Властивості щільності розподілу випадкового вектора

1) $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \ge 0.$
2) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n = 1$
3) $P\{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in B\} = \int \dots \int_B p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$
4) Якщо $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неперервна в деякій області R^n, то в цій області

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots . x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}.$$

► **Рівномірним розподілом в області** $G \in \mathrm{R}^n$ називається розподіл випадкового вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, який задається щільністю:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{mes(G)}, & (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \\ 0, & (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin G \end{cases}, \quad \text{де} \quad mes(G) = \int_G dx_1 \dots \int_G dx_n \quad -$$

міра області G, зокрема при $n = 2$ це площа області, при $n = 3$ – її об'єм

Незалежність випадкових величин.

► Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ називаються **незалежними**, якщо для будь-яких множин $B_1, B_2, \dots, B_n$ з борелівської σ–алгебри множин на $\mathbf{R}^n$:

$$P\{\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \dots, \xi_n \in B_n\} = P\{\xi_1 \in B_1\} \cdot P\{\xi_2 \in B_2\} \cdot \dots \cdot P\{\xi_n \in B_n\},$$

зокрема при будь-яких $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^n$

$$P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\} = P\{\xi_1 < x_1\} P\{\xi_2 < x_2\} \dots P\{\xi_n < x_n\}$$

або $F_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)\ldots F_{\xi_n}(x_n)$.

Очевидно, що у випадку абсолютної неперервності випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ остання рівність буде рівносильна такій:

$$p(x_1,x_2,\ldots,x_n)=p_{\xi_1}(x_1)p_{\xi_2}(x_2)\ldots p_{\xi_n}(x_n),$$

Тобто сумісна щільність незалежних випадкових величин $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ є добутком одновимірних (маргінальних) щільностей цих випадкових величин.

Двовимірний випадковий вектор. (Система двох випадкових величин)

► Кажуть, що заданий **закон розподілу дискретного двовимірного випадкового вектора** $\zeta=(\xi,\eta)$, якщо задані можливі значення випадкового вектора $(x_i,y_j); i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}$ та ймовірності: $p(x_i,y_j)=P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}$. Такий закон розподілу зручно зображувати таблицею:

η \ ξ	x_1	…	x_i	…	x_n
y_1	$p(x_1,y_1)$	…	$p(x_i,y_1)$	…	$p(x_n,y_1)$
…	…	…	…	…	…
y_j	$p(x_1,y_j)$	…	$p(x_i,y_j)$	…	$p(x_n,y_j)$
…	…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1,y_m)$	…	$p(x_i,y_m)$	…	$p(x_n,y_m)$

Оскільки події $\{\xi=x_i,\eta=y_j\}$ утворюють повну групу, то сума ймовірностей з усіх клітинок таблиці дорівнює 1: $\sum_{i,j}p(x_i,y_j)=1$.

Неважко визначити одновимірні закони розподілів компонент дискретного вектора – для того, щоб знайти розподіл ξ , треба підсумувати ймовірності „по стовпчиках”, щоб знайти розподіл η – „по рядочках”.

► Дискретні випадкові величини ξ,η називаються **незалежними**, якщо $P\{\xi=x_n;\ \eta=y_k\}=P\{\xi=x_n\}P\{\eta=y_k\}$ для всіх можливих значень x_n,y_k.

Очевидно, що це означення – прямий наслідок загального означення незалежності випадкових величин ξ та η.

Припустимо, що розподіл двовимірного випадкового вектора заданий своєю функцією розподілу $F(x,y)=P\{\xi<x;\ \eta<y\}$. Якщо випадковий вектор (ξ,η) має неперервну щільність, то вона може бути знайдена диференціюванням функції розподілу вектора: $p(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$.

Одновимірні (маргінальні) функції розподілу окремих компонент вектора визначаються як границі:

$$F_\xi(x) = \lim_{y\to+\infty} F(x,y), \quad F_\eta(y) = \lim_{x\to+\infty} F(x,y)$$

А одновимірні (маргінальні) щільності через сумісну щільність вектора (ξ,η) очевидно, можна отримати так:

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy; \qquad p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx.$$

Розподіл суми двох незалежних випадкових величин.

Нехай ξ,η – **незалежні дискретні** випадкові величини, які приймають лише цілі значення $0,1,2,\dots,n,\dots$. Позначимо їх розподіли: $p_k = P\{\xi = k\};\ q_k = P\{\eta = k\};\ k = 0,1,\dots$ Знайдемо розподіл їх суми $\xi+\eta$ $(n = 0,1,\dots)$.

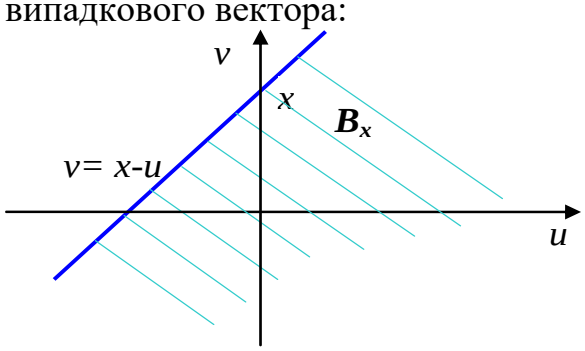
$$P\{\xi+\eta = n\} = P\left\{\bigcup_{k=0}^{n}\{\xi = k;\ \eta = n-k\}\right\} = \sum_{k=0}^{n} P\{\xi = k;\ \eta = n-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P\{\xi = k\}P\{\eta = n-k\} = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$$

Якщо ж ξ,η – **незалежні неперервні** випадкові величини зі щільностями розподілів відповідно $p_\xi(x)$ та $p_\eta(y)$, то

$$F_{\xi+\eta}(x) = P\{\xi+\eta < x\} = P\{(\xi,\eta)\in B_x\},\ \text{де}\ B_x = \{(u,v)\in \mathbf{R}^2 : u+v < x\}.$$

Зобразимо область B_x та використаємо властивість щільності розподілу випадкового вектора:



$$F_{\xi+\eta}(x) = \iint_{B_x} p_\xi(u)p_\eta(v)dudv = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u)du \int_{-\infty}^{x-u} p_\eta(v)dv = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u)F_\eta(x-u)du$$

Враховуючи рівномірну збіжність невласних інтегралів, продиференцюємо цю рівність, щоб одержати щільність розподілу випадкової величини $\xi+\eta$:

$$p_{\xi+\eta}(x) = F'_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(u)p_\eta(x-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x-u)p_\eta(u)du =$$

$= p_\xi * p_\eta(x)$ – згортка щільностей випадкових величин ξ,η.

Схожим чином можна знайти розподіли різниці, добутку, частки або інших функцій від незалежних випадкових величин.

Приклад 6.1. Розподіл двовимірної випадкової величини (X,Y) заданий таблицею:

X / Y	-1	0	1
-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Знайти а) одновимірні закони розподілів X та Y;
б) умовну ймовірність $P\{Y=1/\ X=1\}$;
в) визначити, чи залежні X та Y.

Розв'язок. а) Для знаходження закону розподілу X підсумовуємо ймовірності «по стовпчиках»:

X	-1	0	1
p_i	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$

Для знаходження закону розподілу Y - «по рядках»:

Y	-1	1
p_i	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

б) $P\{Y=1/X=1\}=\frac{P\{\{Y=1\}\cap\{X=1\}\}}{P\{X=1\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$.

в)Для незалежних випадкових величин повинна виконуватись рівність $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$ для всіх можливих $x_i,\ y_j$. Очевидно, що не виконується рівність
$P\{X=-1;Y=-1\}\neq P\{X=-1\}P\{Y=-1\}$, оскільки $\frac{1}{2}\neq\frac{7}{12}\frac{3}{4}$. Отже, X та Y залежні.

Приклад 6.2. Нехай ξ,η – незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами λ та μ відповідно. Знайти розподіл їх суми $\zeta=\xi+\eta$.

Розв'язок. За умовою $p_k=P\{\xi=k\}=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k=0,1,\ldots$

$q_m=P\{\eta=m\}=\frac{e^{-\mu}\mu^m}{m!}$, $m=0,1,\ldots$. Це означає, що випадкова величина ζ також пробігає цілі значення від 0 до $+\infty$. Скористаємось формулою для закону розподілу суми дискретних величин:

$$P\{\varsigma=n\}=P\{\xi+\eta=n\}=\sum_{k=0}^{n}p_k q_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\cdot\frac{e^{-\mu}\mu^{n-k}}{(n-k)!}=$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\mu^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\lambda^k\mu^{n-k}C_n^k = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}.$$

Тут використана формула бінома Ньютона. Таким чином, сума двох незалежних величин, що мають розподіл Пуассона, також розподілена за законом Пуассона, притому її параметр є сумою параметрів величин-доданків.

Приклад 6.3. Довести, що коли кожна з незалежних випадкових величин ξ_1 і ξ_2 має геометричний розподіл з параметрами p_1 і p_2 відповідно, то і випадкова величина $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$ має геометричний розподіл. Знайти параметр цього розподілу.

Розв'язок. Випадкова величина η так само, як і величини ξ_1 та ξ_2 набуває значень $1,2,\ldots$. Знайдемо розподіл η:

$$P\{\eta = n\} = P\{\min\{\xi_1,\xi_2\} = n\} = P\{(\xi_1 = n)\cap(\cup_{k=n+1}^{\infty}(\xi_2 = k))\} +$$
$$+ P\{(\xi_2 = n)\cap(\cup_{k=n+1}^{\infty}(\xi_1 = k))\} + P\{(\xi_1 = n)\cap(\xi_2 = n)\} =$$
$$= p_1 q_1^{\,n-1}\sum_{k=n+1}^{\infty} p_2 q_2^{\,k-1} + p_2 q_2^{\,n-1}\sum_{k=n+1}^{\infty} p_1 q_1^{\,k-1} + p_1 q_1^{\,n-1} p_2 q_2^{\,n-1} =$$
$$= p_1 p_2 (q_1 q_2)^{n-1}\left[\sum_{k=1}^{\infty} q_2^{\,k} + \sum_{k=1}^{\infty} q_1^{\,k} + 1\right] =$$
$$= p_1 p_2 (q_1 q_2)^{n-1}\left(\frac{q_2}{1-q_2} + \frac{q_1}{1-q_1} + 1\right) = (q_1 q_2)^{n-1}(p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_1 p_2) =$$
$$= (q_1 q_2)^{n-1}(1 - q_1 q_2) = pq^{n-1}, \text{ де}$$

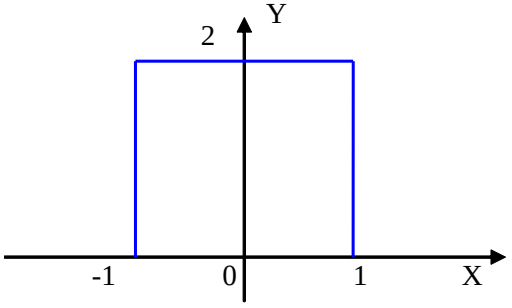
покладено $q = q_1 q_2$, тоді $p = 1 - q_1 q_2$ – це параметр геометричного розподілу випадкової величини $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$.

Приклад 6.4. Задана щільність сумісного розподілу випадкових величин (X, Y):

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} C(x^2 + 2y), & (x,y) \in D; \\ 0, & (x,y) \notin D, \end{cases}$$

де D – квадрат: $D = \{(x,y): -1 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 2\}$. Необхідно знайти:
а) сталу С; **б)** $P\{X \le 0;\ Y \ge 1\}$ **в)** одновимірні щільності розподілів X та Y.

Розв'язок. Зобразимо область D:



а) З умови нормування випливає: $\iint_D C(x^2+2y)dxdy = 1$.

$$\iint\limits_D C(x^2+2y)dxdy = C\left(\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-1}^1 x^2dx + \int\limits_0^2 2ydy\int\limits_{-1}^1 dx\right) = C\left(\frac{4}{3}+8\right)$$

$$= \frac{28C}{3}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{3}{28}.$$

б) $P\{X \le 0;\ Y \ge 1\} = \iint_{\substack{-1\le x\le 0;\\ 1\le y\le 2}} \frac{3}{28}(x^2+2y)dxdy = \frac{3}{28}\frac{10}{3} = \frac{5}{14}.$

в) $f_X(x) = \int_0^2 \frac{3}{28}(x^2+2y)dy = \frac{3}{28}(2x^2+4) = \frac{3}{14}(x^2+2).$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{14}(x^2+2), & x \in [-1,1]; \\ 0, & x \notin [-1,1]. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-1}^1 \frac{3}{28}(x^2+2y)dx = \frac{3}{28}\left(\frac{2}{3}+4y\right) = \frac{1}{14}(1+6y).$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{14}(1+6y), & y \in [0,2] \\ 0, & y \notin [0,2] \end{cases}$$

Приклад 6.5. Щільність випадкового вектора $\zeta = (\xi, \eta)$ дорівнює

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, x>0, y>0; \\ 0 \quad в \quad інших \quad випадках \end{cases}$$

Знайти одновимірні щільності компонент ξ, η та довести, що величини ξ, η залежні.

Розв'язок. Знайдемо одновимірні щільності компонент випадкового вектора:

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x,y)dy = \int\limits_0^{\infty} xe^{-x(1+y)}dy = -e^{-x(1+y)}|_0^\infty = e^{-x};\ \ x>0.$$

$$f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x,y)dx = \int\limits_0^{\infty} xe^{-x(1+y)}dx$$

$$= -\frac{1}{1+y}\left(xe^{-x(1+y)}|_0^\infty - \int\limits_0^\infty e^{-x(1+y)}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{(1+y)^2}\left(-e^{-x(1+y)}\right)|_0^\infty = \frac{1}{(1+y)^2};\ \ y>0.$$

Оскільки $f_\zeta(x,y) \ne f_\xi(x)f_\eta(y)$, то ξ, η залежні.

Приклад 6.6. Нехай ξ, η незалежні і рівномірно розподілені: ξ на [-1,0], а η на [0,1]. Знайти щільність розподілу суми $\xi+\eta$.

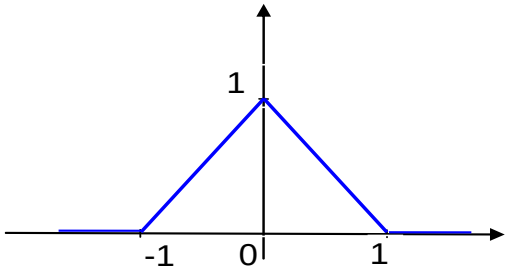
Розв'язок. За умовою, $p_\xi(x)=\begin{cases}1, & x\in[-1,0]\\ 0, & x\notin[-1,0]\end{cases}$ та $p_\eta(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}$.

Використаємо формулу для щільності суми двох незалежних випадкових величин:

$$p_{\xi+\eta}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(x-u)\,p_\eta(u)du=\int_0^1 p_\xi(x-u)du=$$

$$=\begin{cases}0, & x\in(-\infty,-1)\\ \int_{-1}^{x}du, & x\in[-1,0]\\ \int_{x-1}^{0}du, & x\in(0,1]\\ 0, & x\in(1,+\infty)\end{cases}=\begin{cases}x+1, & x\in[-1,0]\\ -x+1, & x\in[0,1]\\ 0, & x\notin[-1,1]\end{cases}$$

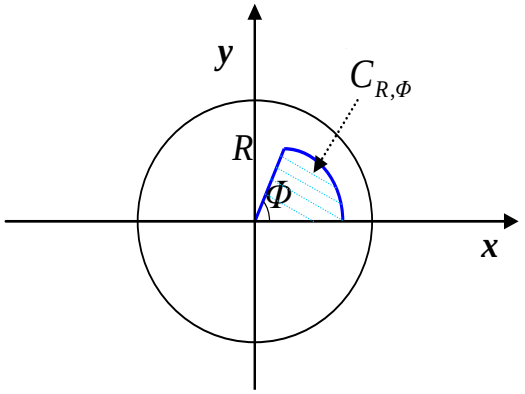
Одержаний розподіл носить назву «трикутний», що цілком зрозуміло, якщо подивитись на графік його щільності:



Приклад 6.7. Нехай з круга $\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ навмання обирається випадкова точка – вона має на цьому крузі рівномірний розподіл. Знайти сумісний розподіл полярних координат ρ та φ цієї точки. Чи будуть вони незалежними?

Розв'язок. Нехай точка має випадкові декартові координати (ξ,η). Рівномірний розподіл в крузі означає, що сумісна щільність координат є сталою в крузі: $p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & x^2+y^2>1\end{cases}$. Знайдемо спочатку сумісну функцію розподілу полярних координат ρ та φ цієї точки $F_{\rho,\varphi}(R,\Phi)=P\{\rho<R,\varphi<\Phi\}$. Очевидно, що варто розглядати інтервал значень $(0,2\pi)$ для Φ та $(0,1)$ для R. Тоді маємо

$F_{\rho,\varphi}(R,\Phi)=P\{(\xi,\eta)\in C_{(R,\Phi)}\}=\iint\limits_{C_{(R,\Phi)}} p(x,y)dxdy$, де $C_{(R,\Phi)}$ – сектор круга радіуса R з кутом Φ.



Тому $F_{\rho,\varphi}(R,\Phi)=\int\limits_0^{\Phi}du\int\limits_0^{R}\frac{1}{\pi}vdv=\frac{R^2\Phi}{2\pi}$ (в подвійному інтегралі перейшли від декартових координат (x,y) до полярних (u,v)). Тепер знайдемо щільність сумісного розподілу полярних координат ρ та φ:

$$p_{\rho,\varphi}(R,\Phi)=\frac{\partial^2 F_{\rho,\varphi}(R,\Phi)}{\partial R\partial\Phi}=\begin{cases}2R\cdot\dfrac{1}{2\pi}, & (R,\Phi)\in[0,1]\times[0,2\pi]\\ 0, & (R,\Phi)\notin[0,1]\times[0,2\pi]\end{cases}$$

Звідси випливає, що якщо позначити щільність розподілу полярного радіуса ρ – $p_\rho(R)=\begin{cases}2R, & R\in[0,1]\\ 0, & R\notin[0,1]\end{cases}$, а $p_\varphi(\Phi)$ – щільність рівномірного розподілу на $[0,2\pi]$ полярного кута φ, то виконана рівність $p_{\rho,\varphi}(R,\Phi)=p_\rho(R)p_\varphi(\Phi)$, яка означає незалежність полярних координат рівномірно розподіленої в крузі точки.

Розглянемо ще один приклад, який узагальнює попередній.

Приклад 6.8. Нехай $\bar{\mathbf{y}}=\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}})$ – взаємно-однозначне відображення із $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$, тобто $y_1=f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,y_n=f_n(x_1,\ldots,x_n)$, а $\bar{\mathbf{x}}=\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{y}})$ – обернене до нього відображення, тобто $x_1=g_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,x_n=g_n(y_1,\ldots,y_n)$. Довести, що щільність розподілу випадкового вектору $\bar{\boldsymbol{\eta}}=\bar{\mathbf{f}}(\bar{\boldsymbol{\xi}})$ рівна:

$$p_{\eta_1,\ldots,\eta_n}(y_1,\ldots,y_n)=p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(g_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,g_n(y_1,\ldots,y_n)\cdot\left|\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\right|$$

Розв'язок. Розглянемо довільну область $B\in\mathbf{R}^n$. Нехай вона є образом

деякої області $A \in \mathbf{R}^n$ при відображенні $\bar{\mathbf{f}}$. Тоді, очевидно: $P(\boldsymbol{\eta} \in B) = P(\boldsymbol{\xi} \in A)$. Це означає, що

$$\int_B \cdots \int p_{\eta_1,\ldots,\eta_n}(y_1,\ldots,y_n)dy_1 \cdots dy_n = \int_A \cdots \int p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \cdots dx_n \quad .$$

Тепер в останньому інтегралі виконаємо заміну змінних $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{y}})$. Одержимо:

$$\int_B \cdots \int p_{\eta_1,\ldots,\eta_n}(y_1,\ldots,y_n)dy_1 \cdots dy_n =$$

$$= \int_B \cdots \int p_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(g_1(y_1,\ldots,y_n),\ldots,g_n(y_1,\ldots,y_n)) \cdot \left|\frac{D(x_1,\ldots,x_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\right| dx_1 \cdots dx_n .$$

Із рівності цих інтегралів та довільності вибору області B випливає вірність вказаної формули для щільності.

Задачі до теми 6.

Рівень 1

6.1. Підкидають пару симетричних гральних кубиків і розглядають випадкову величину (ξ, η), де ξ – число очок на першому гральному кубикові; η – на другому. Знайти: а)закон розподілу випадкової величини $max\{\xi, \eta\}$; б)закон розподілу $\xi + \eta$; в)$P\{|\xi - \eta| \geq 3\}$;
г)$P\{min\{\xi, \eta\} \leq 1; max\{\xi, \eta\} \geq 5\}$.

6.2. Нехай ξ, η – дискретні незалежні випадкові величини, які набувають значення $x_1, x_2, \ldots$ з ймовірностями $P\{\xi = x_i\} = p_i$; $P\{\eta = x_j\} = q_j$. Обчислити $P\{\xi = \eta\}$.

6.3. Нехай ξ, η – незалежні однаково розподілені випадкові величини, які мають геометричний розподіл з параметром p. Знайти розподіл суми $\zeta = \xi + \eta$.

6.4. Випадковий вектор (ξ, η) має сумісну щільність $p(x, y)$. Записати в інтегральному вигляді ймовірності: а)$P\{|\xi| < 1,\ \eta > 0\}$; б)$P\{\xi < \eta\}$; в)$P\{\xi < x\}$; г)$P\{[\xi] = [\eta]\}$.

6.5. Нехай з квадрата $\{(x, y): -1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1\}$ навмання обирається випадкова точка (X, Y). Знайти сумісний розподіл її прямокутних декартових координат(X, Y). Чи будуть вони незалежними?

6.6. Щільність розподілу системи випадкових величин (ξ, η) дорівнює

$$f(x,y) = \begin{cases} ae^{-x} + y & \text{всередині квадрата} \\ (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1), & \\ 0 & \text{зовні квадрата.} \end{cases}$$

Визначити сталу a, функцію розподілу (ξ, η), щільності окремих компонент $p_\xi(x)$ та $p_\eta(y)$. Чи є випадкові величини ξ та η незалежними?

6.7. Точка (ξ, η) рівномірно розподілена в області $|x| + |y| \leq a$, a – деякий параметр. Знайти щільність вектора (ξ, η).

6.8. Щільність розподілу випадкового вектора має вигляд:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{\pi(1+x^2)}, & y\in[0,1];\\ 0, & y\notin[0,1].\end{cases}$$

Знайти щільності ξ та η окремо. Довести, що вони незалежні. Знайти $P\{\xi\eta<1\}$

6.9. Нехай ξ, η незалежні і рівномірно розподілені на $[0,1]$. Знайти щільності розподілу а) $\xi\eta$; б)$\xi-\eta$.

6.10. Випадковий вектор (ξ,η) має щільність розподілу

$$p(x,y)=\begin{cases}x+y, & \text{при } x\in[0,1];y\in[0,1],\\ 0, & \text{якщо інакше.}\end{cases}$$

Знайти щільність випадкової величини $\zeta=\xi+\eta$.

6.11. Випадкові величини ξ,η незалежні, однаково розподілені і мають щільність $p(x,y)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.Знайти щільність випадкової величини $\zeta=\xi+\eta$.

Рівень 2

6.12. Нехай випадкова величина ξ, яка має рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$, записана у вигляді нескінченного десяткового дробу

$\xi=0,\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots=\frac{\xi_1}{10}+\frac{\xi_2}{10^2}+\cdots+\frac{\xi_n}{10^n}\ldots$,де $\xi_n\in\{0,1,\ldots,9\}$.

Знайти розподіл випадкових величин та їх сумісний розподіл. Чи є ці випадкові величини незалежними?

6.13. Знайти щільність випадкової величини $\zeta=\xi+\eta$, де ξ та η незалежні і мають гама-розподіл з параметрами (α,ν) і (α,μ) відповідно. (Гама-розподіл з параметрами(α,ν) задається щільністю $p(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{\alpha^{\nu}}{\Gamma(\nu)}x^{\nu-1}e^{-\alpha x}, & x>0\end{cases}$).

6.14. В кубі $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ навмання взято точку (ξ,η,ζ). Знайти $P\{\xi\eta^{1/2}\zeta^{1/4}<t\}$ (t – параметр).

6.15. Випадкова величина ξ має щільність $p(x)=e^{-2|x|}$. Визначити розподіли випадкових величин а)$\eta_1=\xi^2$; б)$\eta_2=[\xi]$; в)$\eta_3=e^{-|\xi|}$.

6.16. Нехай ξ, η і ζ – незалежні випадкові величини, які мають однаковий показниковий розподіл з параметром α. Знайти сумісну щільність розподілу випадкового вектора $(\eta-\xi,\zeta-\xi)$.

6.17. Випадкові величини ξ,η незалежні і мають показниковий розподіл з параметром 1. Довести, що відношення $\frac{\xi}{\xi+\eta}$ розподілено рівномірно на $[0,1]$.

6.18. Нехай ξ та η – незалежні однаково розподілені випадкові величини із розподілом $N(0,\sigma^2)$. Довести, що випадкова величина $\gamma=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ має

розподіл Релея. (щільність розподілу Релея: $p(z)=\frac{z}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$ при $z>0$).

6.19. Нехай ξ_1 та ξ_2 – незалежні однаково розподілені випадкові величини, із стандартним нормальним розподілом. Довести, що випадковий вектор (η_1,η_2), де $\eta_1=\exp\left\{-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{2}\right\}$, $\eta_2=\frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)$, $(\xi_1>0,\ \xi_2>0)$ для довільних $z>0$ та $0<t<1/4$ задовольняє умову: $P(0<\eta_1<z,\ 0<\eta_2<t)=tz$.

6.20. Сумісний розподіл випадкових величин (X, Y) має щільність

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\left(x^2+y^2\right)^3} \text{ при } & x^2+y^2\geq 1;\\ 0 \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

Знайти щільність випадкової величини $\sqrt{X^2+Y^2}$.

6.21. Нехай ξ_1,ξ_2,ξ_3 – незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподілені рівномірно на $[0,1]$. Знайти щільність сумісного розподілу випадкових величин $\eta_1=\xi_1;\ \eta_2=\frac{\xi_1+\xi_2}{2};\ \eta_3=\frac{\xi_1+\xi_2+\xi_3}{3}$.

Тема 7. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН.

Нехай $(\Omega,\mathcal{F},P)$ - ймовірнісний простір, на якому визначені випадкові величини, про які йтиметься нижче.

► **Математичним сподіванням** або **середнім** випадкової величини ξ називається число $E\xi$, яке визначається формулою $E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}x_k p_k$, якщо ξ – **дискретна** випадкова величина, що набуває значень $x_1,\ldots,x_k,\ldots$ із ймовірностями $p_1,\ldots,p_k,\ldots$ тобто $P\{\xi=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\ldots;$

або формулою $E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx$, якщо ξ – **абсолютно неперервна** випадкова величина зі щільністю розподілу $p(x)$.

Обидві формули мають сенс лише тоді, коли відповідно ряд або невласний інтеграл абсолютно збігаються. Тоді випадкова величина ξ називається **інтегрованою**. Математичне сподівання також зветься **першим моментом**.

Математичне сподівання може позначатись $M\xi$.

Цій величині можна надати такого фізичного змісту: якщо система матеріальних точок з масами $p_1,\ldots,p_k,\ldots$ має координати $x_1,\ldots,x_k,\ldots$, або ж маса розподілена по прямій із щільністю розподілу $p(x)$, то центр ваги такої системи знаходиться в точці з координатою $E\xi$.

Властивості математичного сподівання

1. Якщо $\xi = c$, то $E\xi = c$.
2. Якщо ξ – інтегрована невід'ємна випадкова величина, то $E\xi \geq 0$.
3. Якщо існує $E\xi$, то для довільної константи c існує $E(c\xi) = cE\xi$.
4. Якщо для випадкових величин ξ та η існують $E\xi$ та $E\eta$, то існує $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$.
5. Для кожної борелівської функції $g(x), x \in \mathbf{R}$ (до класу борелівських функцій зокрема належать всі неперервні на осі функції) та будь-якої випадкової величини ξ, такої, що випадкова величина $g(\xi)$ інтегрована,

   $Eg(\xi) = \sum_k g(x_k)p_k$, якщо ξ – **дискретна** випадкова величина і $P\{\xi = x_k\} = p_k, k = 1,2,\ldots;$

   $Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$, якщо ξ – **неперервна** випадкова величина із щільністю розподілу $p(x)$,
6. Якщо ξ та η – незалежні інтегровані випадкові величини, то існує $E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$,

Приклад 7.1. Нехай ξ – дискретна випадкова величина, яка набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ із рівними ймовірностями $\frac{1}{n}$. Знайти $E\xi$.

Розв'язок. Згідно наведеної вище формули для математичного сподівання дискретної випадкової величини, маємо:

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \frac{1}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}.$$

В даному випадку $E\xi$ – це ***середнє арифметичне значень*** дискретної випадкової величини ξ.

Приклад 7.2. Знайти математичне сподівання випадкової величини, рівномірно розподіленої на [*a, b*].

Розв'язок. Використовуємо формулу для математичного сподівання неперервної випадкової величини:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2}.$$

Тут $p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, x\in[a,b]\\ 0, \quad x\notin[a,b]\end{cases}$ – щільність рівномірного розподілу на [a, b].

В даному випадку $E\xi$ – це ***середина відрізку*** [*a, b*].

Ці два приклади підкреслюють зміст поняття математичного сподівання та надають сенс його ще одній назві – ***середнє*** випадкової величини.

Приклад 7.3. Знайти математичне сподівання випадкової величини, яка має біноміальний розподіл з параметрами *n* та *p*.

Розв'язок. Нагадаємо, що випадкова величина ξ з біноміальним розподілом з параметрами *n* та *p* може розглядатись як кількість «успіхів» в серії незалежних випробувань Бернуллі, а отже, її можна подати у вигляді суми n випадкових величин: $\xi=\sum_{k=1}^{n} I_k$, де випадкова величина I_k набуває значення 1, якщо в k–му випробуванні стався «успіх», та значення 0, якщо сталась «невдача». Зрозуміло, що для будь-якого k: $EI_k=1\cdot p+0\cdot q=p$, а отже, за властивістю 4: $E\xi=\sum_{k=1}^{n} EI_k=np$.

Приклад 7.4. Випадкова величина ξ має розподіл

ξ	-2	-1	2
p_i	1/2	1/4	1/4

Обчислити $E\xi 2^{|\xi|}$.

Розв'язок. За формулою для математичного сподівання функції від дискретної випадкової величини:

$E\xi 2^{|\xi|}=\sum_i x_i 2^{|x_i|}p_i=\frac{1}{2}(-2)2^{|-2|}+\frac{1}{4}(-1)2^{|-1|}+\frac{1}{4}2\cdot 2^2=-\frac{5}{2}.$

Приклад 7.5. Знайти математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за нормальним законом $N\left(a,\sigma^2\right)$.

Розв'язок. $$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx=\left|\begin{matrix}x-a=y,\\ dx=dy\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(a+y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)dy=$$

$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}y\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)dy=a,$$

оскільки перший інтеграл рівний 1, як інтеграл від щільності нормального розподілу, а другий інтеграл рівний нулю, як інтеграл від непарної функції по симетричному проміжку інтегрування.

Приклад 7.6. Нехай ξ – випадкова величина, що має розподіл Коші: $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbf{R}$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $\eta = \min(1, |\xi|)$.

Розв'язок. Випадкова величина ξ з розподілом Коші являє собою приклад не інтегрованою величини. Проте за властивістю 5,

$$E\eta = E\min(1,|\xi|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \min(1,|x|)\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \min(1,x)\frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} 1\cdot\frac{1}{1+x^2}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 + \operatorname{arctg} x\Big|_1^{+\infty}\right) = \frac{\ln 2}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

► **Дисперсією** випадкової величини ξ називається число $D\xi$ (якщо воно існує), рівне: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$.

Зауваження. Дисперсія характеризує міру відхилення значень випадкової величини від математичного сподівання. Чим більші відхилення випадкової величини від середнього, тим більша дисперсія.

Властивості дисперсії

1. $Dc = 0$, де c – стала.
2. $D\xi \geq 0$.
3. $D(c\xi) = c^2 D\xi$.
4. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, якщо ξ, η незалежні.

► **Середньоквадратичним відхиленням випадкової величини ξ** називається величина $\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi}$

Приклад 7.7. Нехай деяка випадкова величина має математичне сподівання $E\xi = a$ та дисперсію $D\xi = \sigma^2$. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$.

Розв'язок. Із властивостей математичного сподівання легко вивести:

$$E\eta = E\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right) = \frac{E\xi - Ea}{\sigma} = 0$$

Із властивостей дисперсії випливає, що:

$$D\eta = D\left(\frac{\xi - a}{\sigma}\right) = \frac{D(\xi - a)}{\sigma^2} = \frac{D\xi + Da}{\sigma^2} = \frac{D\xi}{\sigma^2} = 1$$

► Випадкова величина, математичне сподівання якої рівне 0, називається **центрованою**.

► Випадкова величина, дисперсія якої рівна 1, називається **нормованою**.

Таким чином випадкова величина η в **Прикладі 7.7** – центрована та нормована.

Приклад 7.8. Знайти дисперсію випадкової величини, яка має біноміальний розподіл з параметрами *n* та *p*.

Розв'язок. Відомо (див. **Приклад 7.3**), що $\xi = \sum_{k=1}^{n} I_k$, причому величини $I_k, k = \overline{1,n}$ – незалежні, як результати окремих незалежних дослідів. Тому $D\xi = \sum_{k=1}^{n} DI_k$. Знайдемо: $DI_k = E(I_k - EI_k)^2 = E(I_k)^2 - p^2 =$

$= p - p^2 = pq$, тому $D\xi = npq$

► Отже, якщо ξ має **біноміальний розподіл** з параметрами *n* та *p*, то

$$E\xi = np; \quad D\xi = npq.$$

Переконайтесь самостійно, що:

► Якщо ξ має **розподіл Пуассона з параметром** λ $(\lambda > 0)$**,** то

$$E\xi = \lambda; \quad D\xi = \lambda$$

► Якщо ξ має **геометричний розподіл з параметром** p**,** то

$$E\xi = \frac{1}{p}; \quad D\xi = \frac{q}{p^2}$$

► Якщо ξ має **рівномірний на відрізку [*a, b*]** розподіл, то

$$E\xi = \frac{a+b}{2}; \quad D\xi = \frac{(a-b)^2}{12}$$

► Якщо ξ має **нормальний** $N(a, \sigma^2)$ розподіл, то

$$E\xi = a; \quad D\xi = \sigma^2$$

► Якщо ξ має **показниковий (експоненціальний)** розподіл з параметром λ $(\lambda > 0)$, то

$$E\xi = \frac{1}{\lambda}; \quad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

Числові характеристики випадкового вектора

► **Коваріацією** двох випадкових величин ξ і η називають величину

$$Cov(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta.$$

Властивості коваріації

1. Якщо ξ і η незалежні, то $Cov(\xi,\eta)=0$. Обернене твердження невірне.
2. Якщо $Cov(\xi,\eta)\neq 0$, то величини ξ і η залежні.
3. $Cov(\xi,\xi)=D\xi$.
4. $Cov(\xi,\eta)=Cov(\eta,\xi)$
5. $Cov(c\xi,\eta)=cCov(\xi,\eta)$, де $c=const$

► **Коефіцієнтом кореляції випадкових величин** ξ і η називають величину $r(\xi,\eta)=\dfrac{Cov(\xi,\eta)}{\sigma(\xi)\sigma(\eta)}=\dfrac{E\xi\eta-E\xi\cdot E\eta}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$ $(D\xi\neq 0, D\eta\neq 0)$

► Якщо $r(\xi,\eta)=0$, то величини ξ і η називаються **некорельованими**.

Властивості коефіцієнта кореляції

1. Якщо ξ і η незалежні, то $r(\xi,\eta)=0$. Обернене твердження невірне.
2. $|r(\xi,\eta)|\leq 1$

Можна сказати, що коефіцієнт кореляції характеризує ступінь лінійного зв'язку між величинами, зокрема, якщо $\xi=A\eta+B$, то $|r(\xi,\eta)|=1$.

► **Математичним сподіванням випадкового вектора** $\zeta=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)^T$ називається вектор, складений з математичних сподівань його компонент:

$$E\zeta=\begin{pmatrix}E\xi_1\\ \vdots\\ E\xi_n\end{pmatrix}.$$

► **Коваріаційна матриця випадкового вектора** визначається рівністю

$$V(\zeta)=E[(\zeta-E\zeta)(\zeta-E\zeta)^T]=$$
$$=\begin{pmatrix}D\xi_1 & Cov(\xi_1,\xi_2) & \ldots & Cov(\xi_1,\xi_n)\\ Cov(\xi_1,\xi_2) & D\xi_2 & \ldots & Cov(\xi_2,\xi_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ Cov(\xi_1,\xi_n) & Cov(\xi_2,\xi_n) & \ldots & D\xi_n\end{pmatrix}$$

Коваріаційна матриця має розмірність $n\times n$ і є симетричною, а також невід'ємновизначеною. З іншого боку, якщо деяка квадратна матриця симетрична і невід'ємновизначена, то вона є коваріаційною матрицею для деякого випадкового вектора.

Приклад 7.9. Нехай випадкова величина ξ – рівномірно розподілена на відрізку $[0,2\pi]$. Знайти $r(\eta_1,\eta_2)$, де $\eta_1=\sin\xi$ та $\eta_2=\cos\xi$.

Розв'язок. Очевидно, що $\eta_1^2+\eta_2^2=1$, тобто величини η_1,η_2 – функціонально залежні. Далі, $E\eta_1=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{2\pi}dx=0$. Аналогічно, $E\eta_2=0$. Крім того,

$$E\eta_1\cdot\eta_2=E\sin\xi\cdot\cos\xi=\frac{1}{2}E\sin 2\xi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2x}{2\pi}dx=0,$$ тобто $r(\eta_1,\eta_2)=0$.

Маємо приклад некорельованих, проте залежних випадкових величин.

Приклад 7.10. Задана щільність сумісного розподілу випадкових величин (X,Y):

$$f_{(X,Y)}(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{28}(x^2+2y), & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

де $D=\{(x,y):-1\le x\le 1;\ 0\le y\le 2\}$ – квадрат.

Знайти коваріаційну матрицю випадкового вектора (X,Y).

Розв'язок. Вже були визначені одновимірні щільності компонент випадкового вектора (див. **Приклад 6.4.**):

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{14}\left(x^2+2\right), x\in[-1,1]\\ 0, x\notin[-1,1]\end{cases}\{\ \text{та}\ f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{14}(1+6y), y\in[0,2]\\ 0, y\notin[0,2]\end{cases}$$

Тепер знайдемо $EX=\int_{-1}^{1}xf_X(x)dx=\frac{3}{14}\int_{-1}^{1}(x^3+2x)dx=0$,

$$DX=EX^2=\int_{-1}^{1}x^2f_X(x)dx=\frac{3}{14}\int_{-1}^{1}(x^4+2x^2)dx=\frac{3}{14}\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{1}^{1}=\frac{39}{105},$$

$$EY=\int_0^2xf_Y(x)dx=\frac{1}{14}\int_0^2(x+6x^2)dx=\frac{1}{14}\left(\frac{x^2}{2}+2x^3\right)\Big|_0^2=\frac{9}{7},$$

$$EY^2=\int_0^2x^2f_Y(x)dx=\frac{1}{14}\int_0^2(x^2+6x^3)dx=\frac{1}{14}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3x^4}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{40}{21},$$ отже,

$$DY=MY^2-(MY)^2=\frac{40}{21}-\frac{81}{49}=\frac{37}{147}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=E(XY)=\int_{-1}^{1}dx\int_0^2xy\cdot f_{XY}(x,y)dy=$$

$$=\frac{3}{28}\int_{-1}^{1}x^3dx\int_0^2ydy+\frac{3}{14}\int_{-1}^{1}xdx\int_0^2y^2dy=0$$

Таким чином, можемо записати коваріаційну матрицю:

$$V(X,Y)=\begin{pmatrix}\frac{39}{105} & 0\\ 0 & \frac{37}{147}\end{pmatrix}$$

Задачі до теми 7.

Рівень 1

7.1. Тричі підкидають гральний кубик. Нехай ξ – число появ шісток. Знайти $E\xi, D\xi$.

7.2. Випадкова величина ξ має геометричний розподіл з параметром p. Знайти Ex^{ξ}, де $|x|<1$.

7.3. Підкидають монету і гральний кубик. Нехай ξ – число гербів, η – число очок на кубику. Знайти а) $E\frac{1}{\xi+1}cos\frac{\pi}{6}\eta$; б) $Ee^{\xi}sin\frac{\pi}{6}\eta$.

7.4. Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	-2	-1	2
p	0,5	0,25	0,25

Обчислити а) $E2^{|X|}\cos^2(\pi/12\, X)$; б) $EX\,2^{|X|}$.

7.5. Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	1	3	5	7	9
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Скласти закони розподілу випадкових величин $Z = \min\{X,4\}$; $U = \max\{X,4\}$. Знайти розподіли випадкових величин Z та U, знайти EZ, DZ, EU, DU,

7.6. Випадкова величина має розподіл Пуассона з параметром λ. Обчислити $E\frac{1}{1+\xi}$.

7.7. Нехай ξ, η – незалежні випадкові величини, кожна з яких має розподіл Пуассона з параметром λ. Обчислити: Обчислити: а)$E\frac{\xi}{1+\eta}$; б)$E\xi\eta$; в) $D\xi\eta$; г)$D(\xi+\eta)$.

7.8. Випадкова величина ξ має щільність $p(x) = e^{-2|x|}$. Обчислити $E\xi, D\xi$.

7.9. Колесо вагону одиничного радіусу має тріщину на зовнішньому краю. Нехай ξ – висота тріщини над землею при випадковій зупинці вагона. Знайти $E\xi, D\xi$.

7.10. Тривалість безвідмовної роботи приладу вимірюється в роках і є випадковою величиною зі щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \dfrac{2}{x^3}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Через 4 роки прилад міняють, навіть якщо він не вийшов з ладу. Обчислити математичне сподівання тривалості роботи приладу.

7.11. Випадкова величина ξ має щільність Коші: $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Знайти а)$E\frac{\xi}{1+\xi^2}$; б)$E(arctg\xi)^2$.

7.12. Випадкова величина ξ має рівномірний на $[0,1]$ розподіл. Знайти математичне сподівання випадкових величин а)$\eta_1 = 3\xi - 2$; б)$\eta_2 = |2\xi - 1|$; в)$\eta_3 = -ln\xi$.

7.13. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $|\sin\xi|$.

7.14. Випадкова величина ξ має експоненціальний розподіл з параметром λ. Знайти математичне сподівання випадкових величин а)$\eta_1 = \xi^2$; б)$\eta_2 = e^{-\xi}$; в) $\eta_3 = \{\lambda\xi\}$.

7.15. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[-1,1]$. Знайти коваріації випадкових величин а)ξ і ξ^2; б) ξ і ξ^3; в) $\sin\pi\xi$ і $\cos\pi\xi$.

7.16. Нехай випадкові величини ξ, η незалежні, причому ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$, а η – на відрізку $[1,2]$. Знайти математичні сподівання і дисперсії наступних величин а)$\zeta = \xi\eta$; б)$\zeta = max(\xi,\eta)$.

7.17. Нехай (ξ,η)– координати випадкової точки, яка має рівномірний розподіл в чверті одиничного круга$\{x^2+y^2\le 1;\ x\ge 0, y\ge 0\}$. Знайти $Cov(\xi,\eta)$.

7.18. Нехай ξ, η незалежні, ξ розподілена стандартно нормально, а η має рівномірний розподіл на відрізку $[0,1]$. Знайти $Cov(a\xi+b\eta, a\xi-b\eta)$.

Рівень 2

7.19. Нехай ξ набуває цілих невід'ємних значень. Довести, що $E\xi=\sum_{k=1}^{\infty}P\{\xi\ge k\}$.

7.20. На відрізку [0, 1] зафіксована точка a. Випадкова величина ξ – рівномірно розподілена на [0, 1]. При яких дійсних значеннях параметра a величини ξ і $|\xi-a|$ некорельовані?

7.21. В урні міститься 2 білих, 3 чорних і 5 червоних куль. З урни беруть 3 кулі. Знайти розподіли: ξ – числа вибраних білих куль; η – числа вибраних чорних куль. Знайти $E\xi,\ E\eta,\ Cov(\xi,\eta)$.

7.22. На відрізку [0, T] випадково обираються дві точки ξ та η. Нехай відстань між ними – це випадкова величина γ. Знайти $E\gamma,\ D\gamma$.

7.23. Точка (ξ,η) рівномірно розподілена всередині трикутника з вершинами $(0,0);\ (0,1);\ (1,0)$. Знайти $Cov(\xi,\eta)$.

7.24. Випадкова точка $M(\xi,\eta)$ рівномірно розподілена в еліпсі $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$. З'ясувати, чи залежні випадкові декартові координати ξ та η, і знайти $Cov(\xi,\eta)$.

7.25. Знайти коефіцієнт кореляції між X та $Y=e^{-X}$, якщо а) X має стандартний нормальний розподіл; б) X має нормальний розподіл з параметрами a і σ^2.

Тема 8. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ

► **Характеристичною функцією** $\varphi(z)$ випадкової величини ξ з функцією розподілу $F(x)$ називається комплекснозначна функція дійсної змінної $z\in R$, задана співвідношенням

$$\varphi(z)=Ee^{iz\xi}=E(\cos z\xi+i\sin z\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}dF(x)=$$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}e^{izx}p(x)dx, & \text{якщо } p(x)-\text{щільність непервної випадкової величини } \xi\\ \sum_{k}e^{izx_k}p_k, & \text{якщо } P\{\xi=x_k\}=p_k \text{ для дискретної випадкової величини } \xi\end{cases}$$

Отже, для дискретних випадкових величин означення набуває вигляду:

$$\varphi(z) = \sum_k e^{izx_k}\, p_k,$$

для абсолютно неперервних:

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} p(x)dx.$$

Характеристична функція однозначно визначає розподіл випадкової величини.

Приклад 8.1. Нехай випадкова величина ξ має розподіл

ξ	-1	1
p_i	1/2	1/2

Знайти характеристичну функцію ξ.

Розв'язок. $\varphi(z) = Ee^{iz\xi} = e^{iz}\frac{1}{2} + e^{-iz}\frac{1}{2} = \cos z.$

Приклад 8.2. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ, розподіленої за законом Пуассона: $P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda};\ \ k = 0,1,\dots,n,\dots$

Розв'язок. $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{izk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{iz}\lambda)^k}{k!}.$

Застосуємо стандартний розклад $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$. Тоді

$\varphi(z) = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{iz}} = e^{\lambda(e^{iz}-1)}.$

Приклад 8.3. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ, розподіленої рівномірно на $[a,b]$.

Розв'язок. Щільність рівномірного на $[a,b]$ розподілу має вигляд $f_\xi(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x \in [a,b];\\ 0, & x \notin [a,b]\end{cases}$ Тому

$\varphi(z) = Ee^{iz\xi} = \int_a^b e^{izx}\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{e^{izx}}{iz}\Big|_a^b = \frac{e^{izb}-e^{iza}}{iz(b-a)}.$

Деякі властивості характеристичних функцій

1. $\varphi(0) = 1.\quad |\varphi(z)| \le 1$ для всіх $z \in R.$

2. $\varphi_{\xi_1+\xi_2}(z) = \varphi_{\xi_1}(z) \cdot \varphi_{\xi_2}(z)$, якщо випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні. (Характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх характеристичних функцій).

3. Якщо $E|\xi|^n < \infty$, то справедлива тотожність $\varphi^{(n)}(0) = i^n E\xi^n;\ n \geq 1.$

4. Справедливий розклад за формулою Тейлора характеристичної функції

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{i^k z^k}{k!} E\xi^k + o(z^n),$$

якщо існує математичне сподівання $E|\xi|^n < \infty$.

Твердження. Характеристична функція нормального розподілу з параметрами $a,\ \sigma^2$ має вигляд $\varphi(z) = e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}$.

Приклад 8.4. Знайти математичне сподівання і дисперсію нормальної випадкової величини ξ, розподіленої з параметрами a і σ^2, за допомогою характеристичної функції.

Розв'язок. За властивістю (3) характеристичних функцій функцій $\varphi'(0) = iE\xi;\quad \varphi''(0) = i^2 E\xi^2 = -E\xi^2$. Використовуючи твердження про характеристичну функцію нормального розподілу, маємо:

$$\varphi'(0) = \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}\right)'|_{z=0} = \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}\right)(ia - \sigma^2 z)|_{z=0} = ia = iE\xi \implies E\xi = a\,.$$

$$\varphi''(0) = \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}\right)''|_{z=0} = \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}\right)(ia - \sigma^2 z)^2 + \left(e^{iaz - \frac{\sigma^2 z^2}{2}}\right)(-\sigma^2)|_{z=0} =$$
$$-a^2 - \sigma^2 = -E\xi^2 \implies E\xi^2 = a^2 + \sigma^2;\ D\xi = E\xi^2 - a^2 = \sigma^2\,.$$

Слабка збіжність розподілів

► Кажуть що послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}$ з функціями розподілу $F_n(x) = P\{\xi_n < x\}$ **збігається слабо** при $n \to \infty$ до випадкової величини ξ з функцією розподілу $F(x) = P\{\xi < x\}$, якщо $F_n(x) \longrightarrow F(x)$ при $n \to \infty$ для всіх значень x, які є точками неперервності функції $F(x)$. (Позначення слабкої збіжності: $\xi_n \Longrightarrow \xi$ при $n \to \infty$).

Теорема Леві. Для того, щоб мала місце слабка збіжність ξ_n до ξ при $n \to \infty$, необхідно і достатньо, щоб $\varphi_{\xi_n}(z) \longrightarrow \varphi_\xi(z),\ n \longrightarrow \infty$ при кожному z, причому $\varphi_\xi(z)$ повинна бути неперервною в точці $z = 0$.

Приклад 8.5. (Теорема Пуассона) Нехай ξ_n - біноміальна випадкова величина, розподілена з параметрами $n,\ p_n$. Довести, що якщо

$np_n \longrightarrow \lambda, n \longrightarrow \infty$, то розподіл ξ_n збігається до Пуассонівського з параметром λ.

Розв'язок. Спочатку знайдемо характеристичну функцію ξ_n. Як відомо, біноміальну випадкову величину можна представити за допомогою суми випадкових однаково розподілених незалежних індикаторів:

$$\xi_n = \sum_{i=1}^{n} I_k \text{, де } I_k = \begin{cases} 1 \text{ з ймовірністю } p_n, & \text{"успіх",} \\ 0 \text{ з ймовірністю } 1-p_n, & \text{"невдача"} \end{cases}$$

Відмітимо, що характеристична функція індикатора:

$$\varphi_{I_k}(z) = Ee^{izI_k} = e^{iz}p_n + (1-p_n).$$

Скориставшися властивістю (2) характеристичних функцій, можемо зробити такі перетворення:

$$\phi_{\xi_n}(z) = Ee^{iz\sum_{i=1}^{n} I_k} = \left|\text{Х.ф.суми незал. в.в.}\right| = \left(Ee^{izI_k}\right)^n = \left(e^{iz}p_n + (1-p_n)\right)^n =$$

$$= e^{n\ln\left(e^{iz}p_n + (1-p_n)\right)}$$

Зробимо заміну $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$, де $\lambda_n \longrightarrow \lambda,\ n \longrightarrow \infty$ і використаємо асимптотичний при $x \to 0$ розклад: $\ln(1+x) = x + o(x)$. Тоді при $n \to \infty$:

$$\varphi_{\xi_n}(z) = e^{n\ln\left(1+\frac{\lambda_n}{n}(e^{iz}-1)\right)} = e^{n\left(\frac{\lambda_n}{n}(e^{iz}-1)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\lambda_n(e^{iz}-1)+o(1)} \longrightarrow e^{\lambda(e^{iz}-1)}$$

Теорема доведена.

Задачі до теми 8.

Рівень 1

8.1. Нехай випадкова величина ξ розподілена наступним чином

ξ	-1	0	1
p_i	1/3	1/3	1/3

Знайти характеристичну функцію ξ.

8.2. Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподіл яких має вигляд

ξ	-1	1
p_i	1/2	1/2

Знайти характеристичну функцію величини $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$.

8.3. Обчислити характеристичну функцію геометричного розподілу з параметром p.

8.4. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром λ. Обчислити характеристичну функцію ξ. За допомогою характеристичної функції знайти математичне сподівання і дисперсію ξ.

8.5. Довести, що якщо $\varphi(z)$ – характеристична функція ξ, то $\eta = a + b\xi$ має характеристичну функцію $e^{iaz}\varphi(bz)$.

8.6. Нехай ξ_1 і ξ_2 – незалежні однаково розподілені випадкові величини з характеристичною функцією $\varphi(z)$. Записати характеристичну функцію випадкової величини $\eta = \xi_1 - \xi_2$.

8.7. Випадкова величина ξ має двосторонній показниковий розподіл зі щільністю $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in R$. Знайти характеристичну функцію ξ.

8.8. Випадкова величина ξ має розподіл Коші зі щільністю $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$, $a > 0$. Знайти характеристичну функцію ξ.

8.9. Випадкова величина ξ має щільність розподілу $p(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a; \\ \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| < a. \end{cases}$ Знайти характеристичну функцію ξ.

8.10. Використовуючи апарат характеристичних функцій, довести: якщо ξ_1 і ξ_2 незалежні, розподілені нормально з параметрами: $\xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$; $\xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$, то випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ теж розподілена нормально $\eta \sim N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

8.11. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1 та λ_2 відповідно. З допомогою характеристичних функцій довести, що випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

8.12. а) Випадкова величина ξ має гама-розподіл з параметрами (α, β), тобто її щільність має вигляд $f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

Довести, що характеристична функція ξ: $\varphi(z) = \left(\frac{\beta}{\beta - iz}\right)^\alpha$.

б) Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і мають гама-розподіл з параметрами (α_1, β) та (α_2, β) відповідно. Довести, що випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ має гама-розподіл з параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

8.13. Нехай ξ – випадкова величина з характеристичною функцією $\varphi(z)$; η - рівномірно розподілена на $[0,1]$ величина. Крім того, ξ і η незалежні. Записати характеристичну функцію $\xi\eta$.

8.14. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні випадкові величини, що мають стандартний нормальний розподіл. Обчислити характеристичну функцію випадкової величини $\eta = \frac{1}{2}\left({\xi_1}^2 - {\xi_2}^2\right)$.

8.15. Випадкова величина ξ називається **симетричною**, якщо ξ та $-\xi$ мають однакові функції розподілу. Довести, що симетричність ξ еквівалентна дійснозначності характеристичної функції.

8.16. Нехай ξ, τ – незалежні випадкові величини, причому ξ розподілена нормально $N(0, \sigma^2)$, а випадкова величина τ розподілена за показниковим законом з параметром λ. Знайти характеристичну функцію величини $\eta = \sqrt{\tau}\xi + a\tau$.

8.17. Нехай послідовність випадкових величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ розподілена нормально: $\xi_n \sim N(a_n, {\sigma_n}^2)$, і нехай $a_n \longrightarrow a$, ${\sigma_n}^2 \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Довести, що розподіл випадкової величини ξ_n збігається при $n \to \infty$ до розподілу, зосередженого в т. a, тобто до розподілу випадкової величини $\eta = a$ з ймовірністю 1.

8.18. Випадкова величина ξ_n задана розподілом : $P\{\xi_n = x_k\} = \frac{1}{n+1}$; $x_k = \frac{k}{n}$; $k = \overline{0,n}$.

а) Знайти характеристичну функцію ξ_n;

б) Довести, що при $n \to \infty$ ξ_n збігається до рівномірного розподілу на $[0,1]$.

8.19. Характеристична функція випадкової величини з розподілом Коші $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ дорівнює $\varphi(z) = e^{-|z|}$. Довести, що випадкова величина $\zeta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k$, де ξ_k розподілені за законом Коші і незалежні, теж розподілена за законом Коші.

Рівень 2

8.20. Випадкова величина $\xi_{\lambda\alpha}$ має гама-розподіл з параметрами (λ, α). Довести слабку збіжність при $\alpha \longrightarrow \infty$ випадкової величини $\zeta_a = \frac{\lambda\xi_{\lambda a} - a}{\sqrt{a}}$ до випадкової величини ζ, розподіленої стандартно нормально.

8.21. Нехай ξ_λ – випадкова величина, розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda < \infty$. Довести, що при $\lambda \longrightarrow \infty$ розподіл випадкової величини $\eta = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ збігається слабо до розподілу випадкової величини, що має стандартний нормальний розподіл.

8.22. Нехай $\{\xi_n, n \geq 1\}$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, причому $M\xi_n = a > 0$. Нехай ν_p – незалежна від $\{\xi_n\}$ випадкова величина, розподілена за геометричним законом з параметром $p > 0$. Розглянемо випадкову величину $\zeta_p = \sum_{k=1}^{\nu_p} \xi_k$.

а) Довести, що при $p \longrightarrow 0$ розподіл випадкової величини $p\zeta_p$ збігається слабо до розподілу випадкової величини ζ, розподіленої за показниковим законом з параметром $\frac{1}{a}$.

б) Нехай $M\xi_1 = 0;\ D\xi_1 = \sigma^2 > 0$. Довести, що розподіл випадкової величини $\sqrt{p}\zeta_p$ при $p \longrightarrow 0$ збігається слабо до розподілу випадкової величини з характеристичною функцією $\left(1 + \frac{1}{2}z^2\sigma^2\right)^{-1}$.

Індивідуальна домашня робота №1
«Основи теорії ймовірностей»

Варіант 1

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $A \cup (\overline{A} \cap B)$ та $\overline{A} - B$.
2. 8 яблук, серед яких 4 червоних та 4 жовтих, розкладають випадковим чином в 2 пакунки по 4 штуки в кожний. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що червоних яблук порівну в кожному пакунку.
3. На відрізок [1,3] навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що друга цифра після коми в координаті цієї точки а) рівна 2; б)більше 2. Відповідь обґрунтувати.
4. n осіб, серед яких є А та Б, шикуються в ряд в довільному порядку. Яка ймовірність, що між А та Б буде рівно r осіб?
5. В першій урні знаходиться 3 білих та 5 чорних куль, а в другій – 2 білі та 6 чорних. Із першої урни випадково вибирають 2 кулі та перекладають у другу урну. Визначити ймовірність витягти білу кулю із другої урни.

Варіант 2

1. З допомогою аксіом теорії ймовірностей та властивостей ймовірності довести, що для будь-яких випадкових подій A, B, C виконується рівність: $P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$.
2. Шестеро студентів, серед яких троє юнаків та троє дівчат, шляхом жеребкування розподіляються на 3 рівні по кількості учасників команди. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що в кожній команді дівчат буде порівну.
3. На відрізок [0,2] навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що друга цифра після коми в координаті цієї точки а) рівна 1, б)менше 1. Відповідь обґрунтувати.
4. В гості прийшли n осіб, причому всі були в рукавичках. Збираючись додому, гості вибирають рукавички навмання. Яка ймовірність, що кожний матиме праву та ліву рукавичку (необов'язково однакові)?
5. Абонент забув останню цифру телефонного номеру, тому набирає її навмання. Визначити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше, ніж в 3 місця.

Варіант 3

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $\overline{A} \cup \overline{B}$ та $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.
2. На полиці в гуртожитку стоять 3 підручники з фізики, 2 з матаналізу та 1 з теорії ймовірностей. Поспішаючи на заняття, студент навмання схопив 3 книжки. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що студент взяв підручник з теорії ймовірностей.
3. На відрізок [1,3] навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що друга цифра після коми в координаті цієї точки а) рівна 4, б)не більше 4. Відповідь обґрунтувати.
4. Колоду, що складається з 52 карт, навмання ділять порівну. Яка ймовірність, що в обох частинах буде однакова кількість чорних та червоних карт?
5. Із ящика, який містить m $(m > 3)$ білих та n чорних куль, одна куля випадково загубилася. Щоб визначити склад куль в ящику, із нього випадковим чином витягли 2 кулі, які виявилися білими. Яка ймовірність, що загублена куля була білою також?

Варіант 4

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $\overline{A} \cap \overline{B}$ та $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.
2. Із корзини, в якій лежать 4 яблука, 2 груші та 2 апельсина, випадковим чином витягають 4 фрукти для подарунку. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що подарунок міститиме принаймні 1 апельсин.
3. На відрізок [0,2] навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що а) друга цифра після коми в координаті цієї точки рівна 5, б)не менше 5. Відповідь обґрунтувати.
4. Із колоди, що містить 36 карт, навмання витягають 3 карти. Знайти ймовірності, що 1) серед них буде рівно 1 туз; 2) принаймні 1 дама.
5. Із 18 стрільців 5 влучають в мішень з ймовірністю 0,8; 7 – з ймовірністю 0,7; 4 – з ймовірністю 0,6, а решта з ймовірністю 0,5. Навмання вибраний стрілець зробив невлучний постріл. До якої з груп ймовірніше за все цей стрілець належить?

Варіант 5

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $\overline{A} \cap (A \cup B)$ та $\overline{A - B}$.
2. 8 яблук, серед яких 4 червоних та 4 жовтих, розкладають випадковим чином в 2 пакунки по 4 штуки в кожний. Описати простір

елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що червоних яблук порівну в кожному пакунку.

3. На відрізок [3,5] навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що перша цифра після коми в координаті цієї точки рівна 1 або 2. Відповідь обґрунтувати .
4. Солодкоїжка навмання вибирає 5 тістечок в кав'ярні, де є 10 різних сортів тістечок. Які ймовірності, що всі його тістечка 1) однакові; 2) різні?
5. Три мисливці одночасно роблять по одному постірлу у ведмедя. Відомо, що ведмедя вбито однією кулею.
   Чому дорівнюють ймовірності, що ведмедя вбив перший, другий або третій мисливець, якщо ймовірності влучання для них відповідно дорівнюють 0,2; 0,4; 0,6?

Варіант 6

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $\overline{A \cup B}$ та $\overline{B - A}$.
2. 6 кульок, серед яких 3 червоних, 2 зелених та 1 жовта, випадковим чином розкидають у 3 ящики, по 2 кульки в кожний. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що в кожному ящику є червона кулька.
3. На відрізку [1,4] навмання і незалежно одна від одної вибирається 2 точки А та В. Знайти ймовірність того, що А ближче до 1, ніж В до 4. Відповідь обґрунтувати
4. Колода з 36 карт ретельно перемішана. Знайти ймовірності подій: 1) 4 тузи розташовані поруч; 2) місця розташування тузів утворюють арифметичну прогресію з кроком 7.
5. Деталі виготовлюються на двох підприємствах. Обсяг виготовлення продукції на другому підприємстві у 5 разів перевищує обсяг продукції першого. Доля браку на першому підприємстві складає 3%, а на другому - 2%. Випадково вибрана деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність, що вона виготовлена на другому підприємстві; на першому?

Варіант 7

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірність того, що відбудеться одна і тільки одна з подій A та B.
2. 6 кульок, серед яких 5 білих та 1 чорна, випадковим чином вкидають в один з двох ящиків. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що чорна кулька знаходиться в ящику одна.

3. На відрізок [0,2] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Перевірити, чи будуть незалежними події $\{x > 1\}$ та $\{x + y < 2\}$.
4. Знайти ймовірність, що в чотирьохзначному номері випадково вибраного автомобіля 1) дві пари однакових цифр 2) рівно 3 однакові цифри?
5. В урні знаходиться 10 білих та 5 чорних куль. Маша та Саша по черзі дістають по кульці. Якщо витягнута куля чорна, то вона повертається в урну. Виграє той, хто першим витягне білу кульку. Визначити ймовірність виграти для Маші.

Варіант 8

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірність того, що не відбудеться жодна з подій A та B.
2. Для участі в студентській олімпіаді з фізики готувалась команда із 4 студентів 5 курсу, 2 студентів 4 курсу та 2 студентів з 3 курсу. Проте в зв'язку з обмеженим фінансуванням поїхати зможуть лише четверо з них, яких і обирають жеребкуванням. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що на олімпіаду потрапить хоч один студент з 3 курсу.
3. На відрізку [-1,1] навмання та незалежно одна від одної вибирається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Перевірити, чи будуть незалежними події $\{x + y < 1\}$ та $\{y < 0\}$.
4. Із колоди 36 карт випадково та навмання витягаються 6 карт. Знайти ймовірність, що а) серед них є хоча б 2 карти пікової масті; б) серед них є принаймні 1 дама.
5. Маємо 5 урн. В 1-ій, 2-ій та 3-ій урнах знаходиться по 2 білих та 3 червоних кулі; в 4-ій та 5-ій – по 1 білій та 1 червоній. Випадково обирається урна, і із неї витягається куля. Яка ймовірність, що обрана 4-та або 5-та урна, якщо відомо, що витягнута куля біла ?

Варіант 9

1. Нехай $P(A) \geq 0.8, P(B) \geq 0.8$. Довести, що $P(A \cap B) \geq 0.6$.
2. 6 томів енциклопедії випадковим чином ставлять на полицю. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що перший том знаходиться правіше за другий.
3. На відрізок [-1,2] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Перевірити, чи будуть незалежними події $\{x + y \geq 1\}$ та $\{x > 0\}$.
4. Підкинуто 12 гральних кубиків. Знайти ймовірності подій: 1) не випала жодна "3";2) випало принаймні 2 "3".
5. Деталі виготовлюються на двох підприємствах. Обсяг виготовлення продукції на другому підприємстві у 3 рази перевищує обсяг продукції першого. Доля браку на першому підприємстві складає 5%,

а на другому - 2%. Випадково вибрана деталь виявилась не бракованою. Знайти ймовірність, що вона виготовлена на першому підприємстві; на другому підприємстві.

Варіант 10

1. Розглянути події A = {Всі 5 задач студент розв'язав вірно}, B = {хоча б одна задача розв'язана невірно}.
   Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$? За яких умов події A та B будуть незалежними?
2. 4 елементарних частинки із спинами 1/2, 1, 3/2 та 2 рівноможливим чином фіксуються одним з двох лічильників. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що частинка із спіном 1/2 зареєстрована другим лічильником.
3. На відрізок [-1,1] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Визначити ймовірність події {сума їх координат не перевищує модуля різниці координат}.
4. Підкинуто 10 гральних кубиків. Знайти ймовірності подій: 1) не випала жодна "6";2) випало принаймні 2 "1".
5. В урні знаходиться 4 чорних кулі. Підкидається гральний кубик та в урну вкладається стільки білих куль, скільки випало очок на кубику. Після цього кулі перемішуються та витягається одна з них. Знайти а)ймовірність, що вона чорна; б)яка ймовірність, що на кубику випало 5 очок, якщо витягнуто чорну кулю?

Варіант 11

1. Розглянути події A = {Всі 9 осцилографів на факультеті справні}, B = {хоча б один з 9 осцилографів вийшов з ладу}. Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$? За яких умов події A та B будуть незалежними?
2. В мисці знаходиться 4 шматочки корму Royal Canin, 2 шматочки Chappi та 2 шматочки Pedigree. Вередливий пес Тузик навмання з'їдає 4 шматочки корму. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що Тузик поласував не менше ніж двома шматочками Royal Canin.
3. На відрізок [-1,1] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Визначити ймовірність події {модуль різниці їх координат не перевищує подвоєної суми координат}.
4. Три скляні кульки скидаються з п'ятого поверху гуртожитку №1. Перша розбивається з ймовірністю 5/6, друга – 7/8, а третя – 8/9. Знайти ймовірність, що розіб'ється принаймні одна з них; хоча б дві з них.

5. В першій урні знаходиться 7 жовтих та 2 блакитних кулі, в другій – 4 жовтих та 5 блакитних. Із першої урни навмання вибирають 3 кулі та перекладають у другу, після чого з неї витягають 1 кулю. Знайти ймовірність, що вона жовта.

Варіант 12

1. Розглянути події А = {хоча б одна з 4-х сторінок підручника містить помилку}, В = {всі 4 сторінки в підручнику не містять помилок}. Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$? За яких умов події А та В будуть незалежними?
2. П'ять груп студентів першого курсу ФРЕКС випадковим чином ділять на 2 потоки – в одному 3 групи, в іншому 2. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що четверта та п'ята групи будуть в одному потоці.
3. На відрізок [1,4] навмання кидається точки. Визначити ймовірність того, що а) друга цифра після коми в координаті цієї точки рівна 5, б)не менша за 5. Відповідь обґрунтувати.
4. В квітковому кіоску є троянди чотирьох кольорів – білі, червоні, рожеві та жовті однакової вартості. Студент, у якого вистачає грошей лише на три квітки, навмання складає букет для своєї дівчини. Яка ймовірність, що букет сподобається дівчині, якщо а) вона визнає лише червоні квіти; б) вона не признає жовтих квітів?
5. В тирі є 6 однакових на вигляд рушниць, приціли яких влаштовані таким чином, що для двох з них влучання відбувається з ймовірністю 0,9, для трьох – з ймовірністю 0,8 і для одного з ймовірністю 0,3. Яка ймовірність що стрілець влучає в мішень з навмання обраної рушниці? Яка ймовірність, що стріляла рушниця із ймовірністю влучання 0,3, якщо відомо, що стрілець влучив у мішень?

Варіант 13

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $A \cup (\overline{A} \cap B)$ та $\overline{A} - B$.
2. 3 підручники з оптики, 2 з електродинаміки та 3 з мат. фізики випадковим чином розкладають у 2 рюкзаки по 4 книжки в кожний. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що всі підручники з оптики будуть в одному рюкзаку.
3. На відрізок [0,2] навмання кидається точки. Визначити ймовірність того, що друга цифра після коми в координаті цієї точки рівна 8 або 9 . Відповідь обґрунтувати.
4. 8 разів підкидається три гральних кубики. З якою ймовірністю сума очок 17 а) не випаде жодного разу; б) випаде не більше одного разу?
5. Ваня та Петро на лекції по теорії ймовірностей по черзі навмання витягають монетки з шапки, в якій лежить 9 монет по 50 коп. та 6 по 5

коп. Якщо їм трапляється монетка у 5 коп., вони вкидають її назад у шапку. Виграє той, хто першим витягне 50 коп. Визначити ймовірність виграти для Вані.

Варіант 14

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $\overline{A} \cup \overline{B}$ та $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$.
2. Із корзини, в якій лежать 3 яблука, 3 груші та 2 апельсина, випадковим чином витягають 4 фрукти для подарунку. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що подарунок не міститиме апельсин.
3. На відрізок [3,5] навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що перша цифра після коми в координаті цієї точки рівна 2 або 3. Відповідь обґрунтувати.
4. Колода з 36 карт ретельно перемішана. Знайти ймовірності подій: 1) 4 королі розташовані поруч; 2) місця розташування королів утворюють арифметичну прогресію з кроком 8.
5. В урні знаходиться 10 білих та 5 чорних куль. Оля та Василь по черзі достають по кульці. Якщо витягнута куля чорна, то вона повертається в урну. Виграє той, хто першим витягне білу кульку. Визначити ймовірність виграти для Олі.

Варіант 15

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $\overline{A} \cap \overline{B}$ та $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$.
2. 8 яблук, серед яких 4 зелених та 4 жовтих, розкладають випадковим чином в 2 пакунки по 4 штуки в кожний. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що жовтих яблук порівну в кожному пакунку.
3. На відрізок [0,3] навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що перша цифра після коми в координаті цієї точки рівна 3, не рівна 9. Відповідь обґрунтувати.
4. Знайти ймовірність, що в чотирьохзначному номері випадково вибраного автомобіля 1) дві пари однакових парних цифр 2) всі цифри однакові, крім останньої?
5. Маємо 5 урн. В 1-ій, 2-ій та 3-ій урнах знаходиться по 2 білих та 3 червоних кулі; в 4-ій та 5-ій – по 1 білій та 1 червоній. Випадково обирається урна, і із неї витягається куля. Яка ймовірність, що обрана 4-та або 5-та урна, якщо відомо, що витягнута куля біла ?

Варіант 16

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $\overline{A} \cap (A \cup B)$ та $\overline{A - B}$.

2. 6 кульок, серед яких 3 білих, 2 червоні та 1 жовта, випадковим чином розкидають у 3 ящики, по 2 кульки в кожний. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що біла кулька є в кожному ящику.
3. На відрізок [0,2] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Перевірити, чи будуть незалежними події $\{x > 1\}$ та $\{x + y < 3\}$.
4. Із колоди 52 карт випадково та навмання витягаються 10 карт. Знайти ймовірність, що а) серед них є хоча б 2 карти пікової масті; б) серед них є принаймні 1 туз.
5. Деталі виготовлюються на двох підприємствах. Обсяг виготовлення продукції на другому підприємстві у 4 рази перевищує обсяг продукції першого. Доля браку на першому підприємстві складає 5%, а на другому - 2%. Випадково вибрана деталь виявилась не бракованою. Знайти ймовірність, що вона виготовлена на першому підприємстві; на другому підприємстві?

Варіант 17

1. Розглянути події A = {Всі 5 задач студент розв'язав вірно}, B = {хоча б одна задача розв'язана невірно}. Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$? За яких умов події A та B будуть незалежними?
2. 6 кульок, серед яких 5 білих та 1 чорна, випадковим чином вкидають в один з двох ящиків. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що чорна кулька знаходиться в ящику одна.
3. На відрізок [-1,1] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Перевірити, чи будуть незалежними події $\{x + y > 0\}$ та $\{y < 0\}$.
4. Підкинуто 12 гральних кубиків. Знайти ймовірності подій: 1) не випала жодна "1";2) випало принаймні 2 "5".
5. В урні знаходиться 4 чорних кулі. Підкидається гральний кубик та в урну вкладається стільки білих куль, скільки випало очок на кубику. Після цього кулі перемішуються та витягається одна з них. Знайти ймовірність, що вона чорна; яка ймовірність, що на кубику випало 6 очок, якщо витягнуто білу кулю?

Варіант 18

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $\overline{A \cup B}$ та $\overline{B - A}$.
2. Для участі в студентській олімпіаді з фізики готувалась команда із 4 магістрів, 2 студентів 4 курсу та 2 студентів з 3 курсу. Проте в зв'язку з нестачею коштів поїхати зможуть лише четверо з них, яких і

обирають жеребкуванням. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що на олімпіаду потрапить хоч один третьокурсник.

3. На відрізок [-1,2] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Перевірити, чи будуть незалежними події $\{x + y \geq 1\}$ та $\{x > 0\}$.
4. Підкинуто 10 разів пару гральних кубиків. Знайти ймовірності подій: 1) сума цифр 11 не випала жодного разу; 2) сума цифр 11 випала принаймні двічі.
5. В першій урні знаходиться 2 червоні та 7 білих кулі, в другій – 5 червоних та 4 білих. Із першої урни навмання вибирають 3 кулі та перекладають у другу, після чого з неї витягають 1 кулю. Знайти ймовірність, що вона біла.

Варіант 19

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірність того, що відбудеться одна і тільки одна з подій A та B.
2. 6 томів енциклопедії випадковим чином ставлять на полицю. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що другий том знаходиться правіше за перший.
3. На відрізок [-1,1] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Визначити ймовірність події {сума їх координат не перевищує подвоєного модуля різниці координат}.
4. Яка ймовірність, що в групі із 24 студентів хоча б двоє народились в один день? Яка ймовірність, що рівно двоє з цих 24-х народились 1 квітня? (Вважаємо, що день народження припадає рівноймовірно на будь-який з 365 днів)
5. В тирі є 5 однакових на вигляд рушниць, приціли яких влаштовані таким чином, що для двох з них влучання відбувається з ймовірністю 0,9, ще для двох – з ймовірністю 0,8 і для однієї з ймовірністю 0,3. Яка ймовірність що стрілець влучає в мішень з навмання обраної рушниці? Яка ймовірність, що стріляла рушниця із ймовірністю влучання 0,3, якщо відомо, що стрілець влучив у мішень?

Варіант 20

1. Нехай $P(A) \geq 0.8, P(B) \geq 0.8$. Довести, що $P(A \cap B) \geq 0.6$.
2. 4 елементарних частинки із спинами 1/2, 1, 3/2 та 2 рівноможливим чином фіксуються одним з двох лічильників. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що частинка із спіном 1/2 зареєстрована першим лічильником.
3. На відрізок [-1,1] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Визначити

ймовірність події {модуль різниці їх координат не перевищує потроєної суми координат}.

4. В гості прийшли n осіб, причому всі були в капелюхах та з парасольками. Збираючись додому, гості вибирають капелюх та парасольку навмання. Яка ймовірність, що лише двоє з них матимуть чужі речі?
5. Абонент забув останню цифру телефонного номеру, тому набирає її навмання. Визначити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше, ніж в 5 місць.

Варіант 21

1. Розглянути події A = {Всі 6 осцилографів на факультеті справні}, B = {хоча б один з 6 осцилографів вийшов з ладу }. Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$? За яких умов події A та B будуть незалежними?
2. В мисці знаходиться 2 шматочки корму Whiskas, 4 шматочки Purina та 2 шматочки Nutra Mix. Вередлива кішка Мурка навмання з'їдає 4 шматочки корму. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що кицька Мурка не їла Whiskas.
3. На відрізок [-1,1] навмання кидається точки. Визначити ймовірність того, що друга цифра після коми в координаті цієї точки рівна 5, більша за 5. Відповідь обґрунтувати.
4. Із колоди в 52 карти навмання витягають 8 карт. Яка ймовірність, що серед них буде хоч 2 карти масті пік? Яка ймовірність, що буде рівно по дві карти кожної масті?
5. Деталі виготовлюються на двох підприємствах. Обсяг виготовлення продукції на другому підприємстві у 2 рази перевищує обсяг продукції першого. Доля браку на першому підприємстві складає 4%, а на другому - 3%. Випадково вибрана деталь виявилась не бракованою. Знайти ймовірність, що вона виготовлена на першому підприємстві; на другому підприємстві?

Варіант 22

1. Розглянути події A = {хоча б одна з 4-х сторінок підручника містить помилку}, B = {всі 4 сторінки в підручнику не містять помилок}. Що означають події: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$? За яких умов події A та B будуть незалежними?
2. На полиці в гуртожитку стоять 3 підручники з фізики, 1 з матаналізу та 2 з теорії ймовірностей. Поспішаючи на заняття, студент навмання схопив 3 книжки. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що студент не взяв підручник з теорії ймовірностей.

3. На відрізок [0,2] навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що друга цифра після коми в координаті цієї точки рівна 7 або 8. Відповідь обґрунтувати.
4. Карлсон навмання вибирає 5 тістечок в кав'ярні, де є 8 різних сортів тістечок. Які ймовірності, що всі його тістечка 1) однакові; 2) різні?
5. Із ящика, який містить 10 білих та 8 чорних куль, одна куля випадково загубилася. Щоб визначити склад куль в ящику, із нього випадковим чином витягли 2 кулі, які виявилися білими. Яка ймовірність, що загублена куля була білою також?

Варіант 23

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $A \cup (\overline{A} \cap B)$ та $\overline{A} - B$.
2. П'ять груп студентів першого курсу ФРЕКС випадковим чином ділять на 2 потоки – в одному 3 групи, в іншому 2. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що перша та третя групи будуть в різних потоках.
3. На відрізок [0,4] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Визначити ймовірність події {модуль різниці їх координат не перевищує половини суми координат}.
4. Скільки разів треба підкинути 3 симетричні монети, щоб із ймовірністю, не меншою за 0,8 хоч раз випали 2 герби та одна цифра?
5. Саша та Маша по черзі навмання витягають монетки з шапки, в якій лежить 10 монет по 50 коп. та 5 по 5 коп. Якщо їм трапляється монетка у 5 коп., вони вкидають її назад у шапку. Виграє той, хто першим витягне 50 коп. Визначити ймовірність виграти для Маші.

Варіант 24

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $\overline{A \cup B}$ та $\overline{B - A}$.
2. Із корзини, в якій лежать 3 яблука, 3 груші та 2 апельсина, випадковим чином витягають 4 фрукти для подарунку. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість, знайти ймовірність, що подарунок міститиме не менше 2 груш.
3. На відрізок [1,3] навмання кидається точка. Знайти ймовірність того, що перша цифра після коми в координаті цієї точки рівна 5 або 6. Відповідь обґрунтувати.
4. Із колоди 36 карт випадково та навмання витягаються 4 карти. Знайти ймовірність, що а) серед них є хоча б 3 тузи; б) серед них є не менше 2 треф.

5. Перший студент правильно розв'язує задачу з теорії ймовірностей з ймовірністю 0,8; другий – 0,7 і третій – тільки 0,4. Задача дається випадково обраному студенту з цих трьох. Після перевірки з'ясувалось, що задача розв'язана неправильно. Знайти ймовірність, що завдання виконував третій студент.

Варіант 25

1. Відомі ймовірності подій $A, B, A \cap B$. Знайти ймовірності подій: $A \cup (\overline{A} \cap B)$ та $\overline{A} - B$.
2. 4 елементарних частинки із спинами 1/2, 1, 3/2 та 2 рівноможливим чином фіксуються одним з двох лічильників. Описати простір елементарних подій, визначити їх кількість та знайти ймовірність, що частинка із спіном 3/2 зареєстрована першим лічильником.
3. На відрізок [-1,1] навмання та незалежно одна від одної кидається 2 точки. Позначимо їх координати відповідно x та y. Перевірити, чи будуть незалежними події $\{x + y < 1\}$ та $\{y < 0\}$.
4. 6 разів підкидається три гральних кубиків. З якою ймовірністю сума очок 4 не випаде жодного разу? Випаде не більше п'яти разів?
5. В урні знаходиться 5 білих та 10 чорних куль. Маша та Саша по черзі достають по кульці. Якщо витягнута куля біла, то вона повертається в урну. Виграє той, хто першим витягне чорну кульку. Визначити ймовірність виграти для Маші.

Індивідуальна домашня робота №2
«Випадкові величини і вектори та їх характеристики»

Варіант 1

1. Ймовірність того, що виріб, виготовлений на автоматичному станку, виявиться якісним, дорівнює 0,7. Для контролю якості регулювання станка робочий час від часу перевіряє одне за одним вироби до першої появи браку, але не більше 5-ти штук кожен раз. Скласти закон розподілу випадкової величини X - кількості перевірок виробів в одній серії випробувань і знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $\sigma(X)$.

2. Випадкова величина X задається щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -h; \\ \frac{c}{h}(h + x), & -h \le x < 0; \\ \frac{c}{h}(h - x), & 0 \le x < h; \\ 0, & x \ge h, \end{cases}$$

де $h = 10$. Знайти параметр c, функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $P\{0 < X < h/2\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

3. Випадкова величина X розподілена показниково з параметром $\lambda; (\lambda > 2)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z = e^X$, а також EZ.
4. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні нормально розподілені випадкові величини; $\xi_1 \sim N(0,1)$; $\xi_2 \sim N(-1,4)$. Записати щільність випадкової величини $\eta = \xi_1 - 3\xi_2 - 2$.
5. Розподіл двовимірної випадкової величини задається за допомогою таблиці

X \ Y	-1	0	1
-1	1/2	0	1/8
1	1/8	1/8	1/8

Чи залежні X та Y? Знайти
а)одновимірні закони розподілу X та Y;
б)r_{XY};
в)умовну ймовірність $P\{X = 1 \,/\, Y = 0\}$;
г)розподіл XY
д) сумісний розподіл $max(X,Y)$ та $min(X,Y)$.

Варіант 2

1. За деякий проміжок часу амеба може загинути з ймовірністю 1/4, вижити з ймовірністю 1/4 і розділитись на дві з ймовірністю 1/2. В наступний такий самий проміжок часу з кожною амебою незалежно від її “походження” може відбутись те саме з тими ж ймовірностями. Скільки амеб і з якими ймовірностями може існувати після другого проміжку часу ? Скласти закон розподілу X - кількості амеб після другого проміжку часу і знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $\sigma(X)$.
2. Випадкова величина X задається щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{3}, & 0 \le x < 1; \\ \frac{2}{7}x^2, & 1 \le x < 2; \\ 0, & x \ge 2, \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $P\{-0{,}5 < X < 1{,}5\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

3. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 7$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = 4 - 2\xi^2$.
4. Нехай ξ і η - незалежні випадкові величини. Розподіл ξ задається таким чином: $P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}$. Випадкова величина η є рівномірно розподіленою на $[0,1]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\xi + \eta$.
5. Щільність розподілу вектора (ξ, η) дорівнює

$$f_{(\xi,\eta)}(x,y) = \begin{cases} 8xy(1-x^2), & \text{якщо } x \in [0,1]; y \in [0,1], \\ 0, & \text{якщо інакше.} \end{cases}$$

Довести, що ξ і η незалежні. Знайти $E\xi,\ E\eta,\ D\xi,\ D\eta$.

Варіант 3

1. Серед 10-ти механічних годинників, які поступили в ремонтну майстерню, 6 потребують загальної чистки механізму. Майстер хоче знайти годинник, який потребує загальної чистки механізму. Він розглядає годинники по черзі і, знайшовши, припиняє подальший огляд. Скласти закон розподілу X – кількості оглянутих годинників і знайти функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ \sigma(X)$.
2. Випадкова величина X задається щільністю

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2}, & x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ P\{0 < X \le 2\}$. Побудувати графіки $f(x),\ F(x)$.
3. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[-1,3]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = |\xi| + 1$.
4. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні однаково розподілені випадкові величини зі спільною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 1 - \frac{1}{x^4}, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = min(\xi_1, \xi_2)$.
5. Маємо урну з двома чорними і двома білими кулями. З урни послідовно виймаємо кулі (без повернення) до першої появи білої кулі; ξ – число вийнятих куль. Далі виймання куль продовжується до першої появи чорної кулі або до того моменту, коли всі кулі закінчаться, η – число куль, вийнятих в другій серії. Скласти закон розподілу (ξ, η), а також ξ і η окремо. Знайти $Cov(\xi, \eta)$.

Варіант 4

1. В урні 6 білих і 4 чорні кулі. З урни виймають кулю 5 разів поспіль, причому кожен раз вийняту кулю повертають в урну. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа вийнятих білих куль і знайти функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ \sigma(X)$.
2. Випадкова величина ξ має розподіл Парето з параметрами (λ, θ), якщо її щільність має вигляд
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le \lambda; \\ \dfrac{\theta \lambda^{\theta}}{x^{\theta+1}}, & \text{якщо } x > \lambda. \end{cases}$$
Тут $\lambda > 0;\ \theta > 2$. Записати функцію розподілу ξ, знайти , $E\xi,\ D\xi$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $[0, \lambda+1)$.
3. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[0,2]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = (\xi+1)^2$.
4. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 незалежні і розподілені експоненціально з однаковим параметром λ. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = max(\xi_1, \xi_2)$.
5. Сумісний розподіл випадкових величин (X, Y) має щільність
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(x^2+y^2)^3}, & \text{якщо } x^2+y^2 \ge 1; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$
Знайти щільність випадкової величини $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$.

Варіант 5

1. З урни, в якій лежать 2 білих і 8 чорних куль, виймають 3 кулі. Знайти закон розподілу ймовірностей числа X – вийнятих білих куль. Знайти функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ \sigma(X)$.
2. Випадкова величина ξ задається своєю щільністю $f(x) = \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|},\ \lambda > 0.$
Записати функцію розподілу ξ, знайти $E\xi,\ D\xi$. Знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $[3,7)$.
3. Випадкова величина ξ задається своєю щільністю
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ \dfrac{3}{x^4}, & x \ge 1. \end{cases}$$
Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sqrt{\xi} + 1$.
4. Нехай ξ_1, ξ_2 - незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами $\lambda_1,\ \lambda_2$ відповідно. Довести, що умовний розподіл величини

ξ_1 при умові, що $\xi_1 + \xi_2 = n$, є біноміальним розподілом з параметрами n і $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

5. Задана функція розподілу випадкового вектора (X, Y)

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & \text{якщо } x \geq 0, y \geq 0; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти: а)щільність $f_{(X,Y)}(x,y)$ випадкового вектора (X, Y); б)щільності окремих компонент $f_X(x)$, $f_Y(y)$; в)Ймовірність попадання випадкової величини в трикутник з вершинами в точках $A(1,3), B(3,3), C(2,8)$. Чи є X і Y незалежними?

Варіант 6

1. В партії деталей 20% нестандартних. Відібрано 5 деталей. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед п'яти відібраних. Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $\sigma(X)$.
2. Випадкова величина X задається щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq e^2; \\ \frac{c}{x}, & e^2 < x < e^3; \\ 0, & x \geq e^3. \end{cases}$$

Знайти сталу c, функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $P\left\{e < X \leq \frac{e^2}{2}\right\}$. Побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$.

3. Випадкова величина ξ має розподіл Коші зі щільністю $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \xi^3 + 2$.
4. Випадкові величини X та Y незалежні і мають рівномірний розподіл на $[0,1]$. Знайти функцію розподілу і щільність величини $Z = max(3X, Y^3)$.
5. Випадкова точка (X, Y) розподілена рівномірно всередині трикутника з вершинами в точках $(0,0)$; $(2,0)$; $(2,1)$. Знайти EX, EY, DX, DY, $Cov(X,Y)$.

Варіант 7

1. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірності їх відмов відповідно дорівнюють $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}1$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа елементів, які відмовили в одному досліді. Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $\sigma(X)$.
2. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 1-\frac{1}{x^3}, & x\geq 1.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, EX, $P\{0<X<3\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$. Що можна сказати про DX ?

3. Випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $(0,2\pi)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=cosX$.
4. Випадкові величини X, Y незалежні і мають один і той самий експоненціальний розподіл $P\{X<x\}=P\{Y<x\}=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$ Знайти розподіл випадкової величини $Z=|X-Y|$.
5. Закон розподілу системи (ξ,η) заданий таблицею

η \ ξ	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Скласти закони розподілу ξ і η окремо. Знайти
а)$E\xi, D\xi, E\eta, D\eta$; б)$Cov(\xi,\eta)$; в)$E(\xi-2\eta)$; $D(\xi-2\eta)$.

Варіант 8

1. Стрілець стріляє по мішені до першого влучення, але робить не більше шести пострілів. Ймовірність поцілити при одному пострілі дорівнює 0,6. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа пострілів, які зробив стрілець. Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $\sigma(X)$.
2. Випадкова величина ξ має гама-розподіл з параметрами $(3,1)$, якщо її щільність має вигляд

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ \frac{1}{2}x^2e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, $E\xi$, $D\xi$, $P\{0<\xi<1\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

3. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[-3,2]$. Знайти функцію розподілу і щільність випадкової величини $\eta=\xi^2$.
4. Випадкові величини X та Y незалежні і мають рівномірний розподіл на $[0,2]$. Знайти функцію розподілу і щільність величини $Z=max(2X,Y^2)$.

5. Задана щільність ймовірності системи двох випадкових величин: $f(x,y)=\frac{C}{(x^2+16)(x^2+25)}$. Знайти а)сталу C; б)функцію розподілу системи $F(x,y)$; в)Що можна сказати про $Cov(X,Y)$?

Варіант 9

1. Відбувається ряд незалежних спроб запустити двигун автомобіля. Ймовірність запустити двигун при кожній спробі дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа спроб, яких потребує запуск двигуна. Знайти $EX,\ P\{X>10\}$.
2. Випадкова величина X задається щільністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ e^{-x+1}, & x>1.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $P\{-2<X\le 3\}$. Побудувати графіки $f(x)$, $F(x)$.

3. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на інтервалі $(0,1)$. Знайти щільності ймовірностей випадкових величин а)$\eta=\frac{1}{\xi}$; б)$\zeta=e^{\xi}$.
4. Нехай X,Y - незалежні однаково розподілені випадкові величини зі спільною щільністю $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Z=X+Y$.
5. Щільність розподілу вектора (ξ,η) дорівнює

$$f(x,y)=\begin{cases}A\cos(x-y), & \text{якщо } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\ y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ 0, & \text{якщо інакше.}\end{cases}$$

Знайти а)сталу A; б)щільності окремих компонент ξ,η; б)коваріаційну матрицю (ξ,η).

Варіант 10

1. На базу поступає продукція трьох фабрик, співвідношення продуктивності яких 2:1:2. Відбувається випадковий відбір чотирьох виробів. Розглядаючи число можливих виробів, виготовлених першою фабрикою, з числа відібраних, як випадкову величину X, скласти для неї закон розподілу. Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $\sigma(X)$.
2. Випадкова величина X задається щільністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ 1+x, & -1\le x<0;\\ 1-x, & 0\le x<1;\\ 0, & x\ge 1.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $P\{0 < X < 0{,}5\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

3. Нехай випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = e^{\xi}$. Знайти $E\eta, D\eta$.
4. Випадкові величини ξ_1, ξ_2 - незалежні і мають один і той самий геометричний розподіл $P\{\xi_1 = k\} = P\{\xi_2 = k\} = pq^k; k = 0,1,2,\ldots$. Довести, що

$$P\{\xi_1 = k \,/\, \xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{1}{n+1}; \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

5. Сумісний розподіл випадкових величин X і Y має щільність

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & \text{якщо} \quad 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти: а) сталу с; б)щільність випадкової величини X; в)$EX, DX, Cov(X,Y)$.

Варіант 11

1. В ящику лежить 6 деталей, серед них 2 браковані. Контролер по черзі перевіряє деталі до виявлення бракованої. ξ – число вийнятих ним якісних деталей. Скласти закон розподілу ξ. Знайти функцію розподілу $F(x)$, $E\xi$, $D\xi$, $\sigma(\xi)$.
2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ a \cdot arctgx, & 0 \le x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти значення сталої a; функцію розподілу $F(x)$, $P\{\xi \in (-1,1)\}$ $M\xi$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

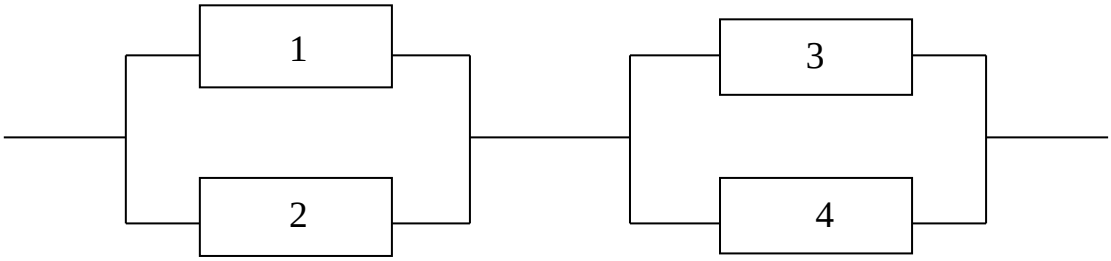
3. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \frac{1}{1+\xi^4}$.
4. Нехай ξ і η - незалежні випадкові величини. Розподіл ξ задається таким чином: $P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 1\} = \frac{1}{2}$. Випадкова величина η є рівномірно розподіленою на $[0,1]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\xi\eta$.
5. Розподіл двовимірної випадкової величини задається за допомогою таблиці

X / Y	-2	0	1
-1	1/6	1/6	1/6
2	1/6	1/6	1/6

Чи залежні X та Y? Знайти
а)одновимірні закони розподілу X та Y;
б)коваріаційну матрицю (X,Y)
в)умовні ймовірності $P\{Y=1\ /\ X=0\}$; $P\{X=1\ /\ Y=-1\}$.
г)розподіл $X+Y$
д) сумісний розподіл $|X|;\ |X-Y|$.

Варіант 12

1. В задачі наведена схема з'єднання елементів, які утворюють електричну мережу з одним входом і одним виходом.



Вважаємо, что відмови елементів є подіями, незалежними в сукупності. Відомі надійності (ймовірності безвідмовної роботи) p_1, p_2, p_3, p_4 кожного з чотирьох елементів. Відмова будь-якого елементу призводить до переривання сигнала в тій гілці мережі, де знаходиться даний елемент. Нехай випадкова величина X приймає значеннння 1, якщо в мережі є струм, і 0, якщо струму немає. Скласти закон розподілу X. Знайти функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ \sigma(X)$.

2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1\le x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти значення сталої a, $F(x)$, $E\xi$, $D\xi$, $P\{\xi\in(-1,1)\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

3. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-2,1]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y=\frac{1}{X^2}$.

4. Нехай ξ набуває значень $\pm1\ \pm2$, кожне з ймовірністю $\frac{1}{4}$, а $\eta=\xi^2$ а) Знайти сумісний розподіл ξ, η. б)Знайти $Cov(\xi,\eta)$. в) Довести, що ξ,η залежні.
5. Щільність розподілу вектора (ξ,η) дорівнює

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}cos(x+y), & \text{якщо } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]; y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ 0, & \text{якщо інакше.}\end{cases}$$

Знайти а)функцію розподілу вектора (ξ,η); б)коваріаційну матрицю (ξ,η).

Варіант 13

1. Партія містить 20% нестандартних деталей. Відібрано 6 деталей. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед шести відібраних, знайти функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ \sigma(X)$. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ ax^2, & 0\le x<1;\\ a(2-x)^2, & 1\le x<2;\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

Знайти значення сталої a, функцію розподілу $F(x)$, $E\xi,\ D\xi,\ P\{-1<\xi<1\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

2. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-2,1]$. Знайти щільність розподілу випадкових величин $Y=X^5;\ Z=|X-5|$.
3. Нехай ξ_1,ξ_2 - незалежні випадкові величини, які мають розподіл Пуассона з параметрами λ_1,λ_2 відповідно. Довести, що випадкова величина $\xi_1,+\xi_2$ має розподіл Пуассона з параметром $\lambda_1+\lambda_2$.
4. З урни, в якій 4 білих, 6 чорних і 10 червоних куль, виймаємо одну кулю. Випадкові величини X, Y і Z визначаються умовами:

$$X=\begin{cases}1, & \text{якщо з'явиться біла куля;}\\ 0, & \text{якщо з'явиться чорна обо червона куля.}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{якщо з'явиться чорна куля;}\\ 0, & \text{якщо з'явиться біла обо червона куля.}\end{cases}$$

$$Z=\begin{cases}1, & \text{якщо з'явиться червона куля;}\\ 0, & \text{якщо з'явиться чорна обо біла куля.}\end{cases}$$

а)Скласти сумісні закони розподілу (X,Y) і (Y,Z).

б)Знайти коефіцієнт кореляції $r(X,Z)$.

в)Знайти умовну ймовірність $P\{Y=1\ /\ X=0\}$.

г)Знайти сумісний закон розподілу величин $\min(X,Y)$і $\max(Y,Z)$.

Варіант 14

1. Журі складається з трьох суддів. Перший і другий суддя пріймають правильне рішення незалежно одне від одного з ймовірністю 0,9, а третій суддя для прийняття рішення кидає монету. Кінцеве рішення журі приймає, виходячи з більшості голосів. Нехай випадкова величина X

приймає значення 1, якщо жюрі винесло правильне рішення, і 0, якщо неправильне. Скласти закон розподілу X, знайти функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ \sigma(X)$.

2. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{3}cos\frac{x}{3}, & 0<x\le\frac{3}{2}\pi;\\ 0, & x>\frac{3}{2}\pi.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x),\ E\xi,\ D\xi,\quad P\left\{0<\xi<\frac{\pi}{2}\right\}$. Побудувати графіки $f(x),F(x)$.

3. Випадкова величина ξ розподілена за законом Релея зі щільністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x>0.\end{cases}$$

Знайти щільність випадкової величини $\eta=e^{-\xi^2}$.

4. Випадкова величина ξ приймає значення -1, 0, 1, кожне з ймовірністю 1/3. Незалежна від неї випадкова величина η має показниковий розподіл з параметром $\lambda=3$. Знайти функцію розподілу і щільність випадкової величини $\zeta=\xi+\eta$.

5. Випадкова точка (X,Y) розподілена рівномірно всередині трикутника з вершинами в точках $(0,0);\ (1,0);\ (0,2)$. Знайти $EX,\ EY,\ DX,\ DY,\ Cov(X,Y)$.

Варіант 15

1. Стрілець стріляє по мішені до першого влучення, але робить не більше шести пострілів. Ймовірність влучення у ціль при одному пострілі – 0,6. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа пострілів, зроблених стрільцем. Знайти функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ \sigma(X)$.

2. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x),\ E\xi,\ D\xi,\quad P\left\{0<\xi<\frac{\pi}{2}\right\}$. Побудувати графіки $f(x),F(x)$.

3. Випадкова величина ξ має гама-розподіл з параметрами (α,β). Щільність гама-розподілу має вигляд $f(x)=\begin{cases}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ Знайти щільність випадкової величини $\eta=\xi^2+1$.
4. Нехай ξ,η – незалежні випадкові величини. Випадкова величина ξ має розподіл $P\{\xi=1\}=P\{\xi=-1\}=1/2$, η має функцію розподілу $F(x)=P\{\eta<x\}$. Записати функцію розподілу величин а)$\zeta=\xi+\eta$; б) $\zeta=\xi\eta$; в) $\zeta=\xi^2\eta$.
5. Щільність випадкового вектора (ξ,η) дорівнює

$$f(x,y)=\begin{cases}xe^{-x(1+y)}, & \text{якщо } x>0,y>0;\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Знайти окремо щільності ξ, η. Довести, що ξ, η залежні. Знайти $E\xi$, $E\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $Cov(\xi,\eta)$.

Варіант 16

1. В кошику лежать 4 яблука і 6 помаранчів. Випадковим чином з нього беруть 3 фрукти. Нехай X – кількість яблук серед відібраних. Знайти закон розподілу X. Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $\sigma(X)$.
2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ K\cos x, & 0<x<\frac{\pi}{4};\\ 0, & x\ge\frac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Знайти сталу K, функцію розподілу $F(x)$, $E\xi$, $D\xi$, $P\left\{\xi\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)\right\}$. Побудувати графіки $f(x),F(x)$.
3. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ Ce^{-x+4}, & x>1.\end{cases}$$

Знайти сталу C і щільність розподілу випадкової величини $\eta=\xi^4-7$.
4. Нехай ξ і η- незалежні випадкові величини; ξ розподілена рівномірно на $[0,1]$, η має своїм розподілом $P\{\eta=0\}=P\{\eta=1\}=1/2$. Знайти розподіл випадкової величини $\zeta=\xi+\eta$.
5. Сумісний розподіл випадкових величин ξ і η має щільність

$$f(x,y)=\begin{cases}36xye^{-3(x^2+y^2)} \text{ при } x\ge 0,y\ge 0,\\ 0 \text{ в інших випадках.}\end{cases}$$

Довести, що ξ і η незалежні. Знайти $E\xi$, $E\eta$, $D\xi$, $D\eta$, $Cov(\xi,\eta)$.

Варіант 17

1. Два гральних кубики кидають одночасно 3 рази. Нехай ξ– число випадань парної кількості на обох кубиках – і на першому, і на другому. Знайти закон розподілу ξ, функцію розподілу $F(x)$, $E\xi$, $D\xi$, $\sigma(\xi)$.

2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<-\frac{\pi}{2}; \\ \frac{2}{\pi}\cos^2 x, & -\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{2}; \\ 0, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\left\{\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\right\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

3. Нехай ξ і η незалежні, ξ має геометричний розподіл з параметром $\frac{1}{2}$, η має геометричний розподіл з параметром $\frac{2}{3}$. Знайти розподіл випадкової величини $min(\xi,\eta)$.
4. Нехай ξ і η - незалежні випадкові величини, розподілені рівномірно на $[0,1]$ і $[0,2]$ відповідно. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta=\xi+\eta$.
5. В урні 5 однакових куль з номерами від 1 до 5. Здійснюється вибірка з поверненням доти, поки не з'явиться куля з парним номером. Нехай випадкова величина X – це парний номер кулі, на якій завершується вибірка. Y – число виймань кулі. Знайти сумісний закон розподілу пари (X,Y), одновимірні закони розподілу X та Y. Знайти $EX, DX, EY, DY, Cov(X,Y)$. Чи є X та Y незалежними ?

Варіант 18

1. В трьох урнах знаходяться кулі, що відрізняються лише кольором. В першій урні 1 біла і 3 чорних кулі, в другій – 2 білих і 2 чорних, в третій – 2 білих і 3 чорних. З кожної урни навмання виймають по одній кулі. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа вийнятих білих куль серед цих трьох. Знайти закон розподілу X і функцію розподілу $F(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $P\{X\le 1\}$.

2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти сталу k, функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi\in(1;2{,}5)\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ k, & 1\le x<2;\\ k(x-1), & 2<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

3. Випадкова величина X розподілена рівномірно на $[0,4]$. Знайти а)функцію розподілу випадкової величини $Y_1=2X-3$; б)щільність розподілу випадкової величини $Y_2=9X^2$; в)функцію розподілу випадкової величини $Y_3=e^{-2X}$.

4. Нехай ξ і η - незалежні однаково розподілені випадкові величини, розподілені стандартно нормально $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\zeta=\xi+\eta$.
5. Задана щільність сумісного розподілу випадкових величин (X,Y):
$$f(x,y)=\begin{cases}C(x^2+2y), & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$
де $D=\{(x,y):-1\le x\le 1;\ 0\le y\le 5\}$ – прямокутник. Знайти сталу C, $P\{X\le 0;\ Y\ge 2\}$, щільності розподілів X і Y окремо. Знайти $EX, DX, EY, DY, Cov(X,Y)$.

Варіант 19

1. В зв'язці 7 ключів, з яких лише 2 підходять до замка. Послідовно перебираючи ключі, намагаємось відкрити замок. Кожний ключ обирається випадковим чином і використовується лише 1 раз. Знайти закон розподілу X – числа намагань відкрити замок. Знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $P\{X\le 2\}$.
2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi\in(1{,}5;2{,}5)\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.
$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \frac{2}{15}x, & 0\le x<3;\\ \frac{1}{5}(5-x), & 3<x\le 5;\\ 0, & x>5.\end{cases}$$
3. Випадкова величина X має стандартний нормальний розподіл. Знайти щільності розподілу випадкових величин а)$Y=arctgX$; б)$Z=\sqrt[3]{|X|}$.
4. Випадкові величини X_1, X_2 незалежні і мають однаковий розподіл зі щільністю
$$f(x)=\begin{cases}8-2x, & x\in[3,4];\\ 0, & x\notin[3,4].\end{cases}$$
Знайти щільність випадкової величини $Y=min(X_1,X_2)$.

5. Система двох випадкових величин (ξ,η) рівномірно розподілена в області D, обмеженій прямими $y=0, y=2, x=0, y=6-x$. Знайти щільність розподілу випадкового вектора (ξ,η) і його коваріаційну матрицю

Варіант 20

1. В телевікторині гравцю послідовно задають питання до першої неправильної відповіді. При цьому гравець повинний вибрати одну з чотирьох запропонованих версій відповіді, одна з них правильна, інші – хибні. Максимальне число питань дорівнює 4. Припустимо, що гравець обирає відповідь на кожне питання навмання. Випадкова величина X – число питань, що були задані гравцю. Який закон розподілу X? Побудувати функцію розподілу X. Обчислити EX, DX. Знайти K_* - найбільш ймовірне число заданих гравцю питань.
2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x), E\xi, D\xi, P\left\{\xi \in \left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)\right\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 2\cos 2x, & 0<x\le \frac{\pi}{4}; \\ 0, & x>\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3. Випадкова величина ξ має рівномірний розподіл на відрізку $[-5,5]$. Знайти розподіл випадкової величини $\eta=(\xi+1)^2$.

4. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні випадкові величини, ξ_1 розподілена нормально з параметрами $a=0, \sigma=1$; ξ_2 розподілена нормально з параметрами $a=0, \sigma=2$. Записати щільність розподілу випадкової величини $\eta=\xi_1-3\xi_2-2$. Чи буде цей розподіл теж гаусовим?
5. Сумісний розподіл випадкових величин ξ і η має щільність

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y \text{ при } 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Знайти $E\xi, E\eta, D\xi, D\eta, Cov(\xi,\eta)$.

Варіант 21

1. Маємо дві урни з однаковим складом: в кожній по 1 білій кулі і по 2 чорні. З кожної урни виймають по 2 кулі. ξ – число білих куль серед вийнятих. Скласти закон розподілу ξ, знайти функцію розподілу $F(x), E\xi, D\xi, \sigma(\xi)$.

2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, $E\xi$, $D\xi$, $P\{\xi \in (-2,2)\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{25}x, & 0 < x \le 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

3. Випадкова величина X розподілена рівномірно на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \sin X$, а також EY.

4. Нехай випадкові величини X, Y незалежні і кожна має рівномірний розподіл на $[0,2]$. Знайти функції розподілу і щільності наступних величин а)$max(2X, Y^2)$; б)$X - Y^2$

5. Задана щільність розподілу випадкового вектора (X, Y)

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 < R^2; \\ 0 & \text{якщо } x^2 + y^2 \ge R^2. \end{cases}$$

(Тут $R > 0$ – деякий параметр). Знайти: а) щільності окремих компонент $f_X(x)$, $f_Y(y)$; б)Встановити, що X і Y залежні.

Варіант 22

1. Розподіл дискретної випадкової величини X має вигляд
$P\{X = k\} = \frac{C}{e^k}$; $k = 0,1,2,\ldots$
Знайти сталу C; $P\{-6 < X < 3\}$; EX.

2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, $E\xi$, $D\xi$, $P\left\{\xi \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2} cos\frac{x}{2}, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

3. Випадкова величина ξ має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$ Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sqrt[5]{|\xi|}$.

4. Нехай випадкові величини X, Y незалежні і кожна має рівномірний розподіл на $[0,2]$. Знайти функцію розподілу і щільність величини $Z = X - 3Y$. Обчислити EZ, DZ.

5. Сумісний розподіл випадкових величин (X, Y) має щільність

$$f(x,y)=\begin{cases}A\cdot 5^{-\frac{x}{2}-3y}, & \text{якщо } x\geq 0; y\geq 0;\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Знайти а)сталу A; б)функцію розподілу $F(x,y)$ випадкової величини (X,Y); в)$Cov(X,Y)$

Варіант 23

1. З урни, в якій лежать 5 жовтих і 5 блакитних куль, виймають 3 кулі. Знайти закон розподілу ймовірностей числа X – вийнятих блакитних куль. Знайти закон розподілу X, функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ \sigma(X)$.
2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти сталу k, функцію розподілу $F(x),\ E\xi,\ D\xi,\ P\{\xi\in(1;2{,}5)\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ k, & 0\leq x<2;\\ k(2x-3), & 2<x<3;\\ 0, & x\geq 3.\end{cases}$$

3. Випадкова величина ξ розподілена показниково з параметром $\lambda=1$: Знайти а)щільність розподілу випадкової величини $\eta=(\xi-2)^4$; б) $P\{\eta>9\}$.

4. Нехай ξ_1,ξ_2,ξ_3 – незалежні однаково розподілені випадкові величини, які мають щільність $f(x)=\begin{cases}cx^{-4}, & x\in[1;2],\\ 0, & x\notin[1;2].\end{cases}$ Знайти сталу c і функцію розподілу величини $max\{\xi_1,2\xi_2,3\xi_3\}$.

5. Випадковий вектор (X,Y) рівномірно розподілений в трикутнику з вершинами $A_1(0,0);\ A_2(0,4);\ A_3(-2,0)$. Записати сумісну щільність вектора (X,Y), $P\{X\leq -1;\ Y\geq 1\}$, одновимірні щільності і функції розподілу випадкових величин X і Y. Знайти $EX, DX, EY, DY, r(X,Y)$.

Варіант 24

1. Користувач комп’ютера забув пароль і перебирає навмання 6 можливих паролів, один з яких – вірний. Після трьох невдалих спроб комп’ютер блокується. Випадкова величина X – кількість спроб введення паролю. Знайти закон розподілу X, функцію розподілу $F(x),\ EX,\ DX,\ \sigma(X)$.
2. Випадкова величина ξ задається функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{2}{\pi}arcsin\sqrt{x}, & x\in[0,1);\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

Знайти щільність $f(x)$, $E\xi$, $P\{\xi\in(0,1/3)\}$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

3. Випадкова величина ξ має розподіл Парето зі щільністю

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ \frac{1}{x^2}, & x\ge 1.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta=3\sqrt{\xi}-1$.

4. Розподіл двовимірної випадкової величини задається за допомогою таблиці

X / Y	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
0	2/24	1/12	1/16
1	3/24	1/12	1/16

Чи залежні X та Y? Знайти
а)одновимірні закони розподілу X і Y;
б)умовні ймовірності; $P\{X=1/Y=-1\}$; $P\{Y=1/X=0\}$;
в) сумісний розподіл $X+Y$, XY;
г)розподіл XY.

5. Випадкові величини X і Y незалежні, причому X має абсолютно неперервний розподіл зі щільністю $f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, а дискретна випадкова величина Y приймає лише 2 значення: $P\{Y=1\}=\frac{1}{4}$; $P\{Y=2\}=\frac{3}{4}$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $X+Y$.

Варіант 25

1. Пару симетричних монет підкидають тричі, X – число тих випадків, коли на обох монетах випав герб. Скласти закон розподілу випадкової величини X, і знайти функцію розподілу $F(x)$, EX, DX, $\sigma(X)$. Побудувати графіки $f(x), F(x)$.

2. Випадкова величина ξ задана своєю щільністю розподілу $f(x)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$, $M\xi$, $D\xi$, $P\{\xi\in(-1{,}5;1)\}$. Побудувати графіки

$f(x), F(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{x^2}{27}, & 0 \le x < 3; \\ \frac{1}{3}, & 3 < x < 5; \\ 0, & x > 5. \end{cases}$$

3. Випадкова величина ξ має показниковий розподіл з параметром $\lambda = 1$.

   Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = 1 - e^{-\xi}$.

4. Нехай ξ_1, ξ_2 – незалежні випадкові величини, які мають однаковий рівномірний розподіл на $[0,3]$. Довести, що випадкові величини $min\{\xi_1, \xi_2\}$ і $max\{\xi_1, \xi_2\}$ також мають однаковий розподіл і знайти цей розподіл.
5. Сумісний розподіл випадкових величин ξ і η має щільність

$$f(x,y) = \frac{c}{1 + x^2 + x^2y^2 + y^2}.$$

   а)Знайти сталу c.
   б)Встановити, чи залежні величини ξ і η .
   в)Знайти щільність розподілу ξ.
   г)Знайти ймовірність$P\{|\xi| < 1, |\eta| \le 1\}$.

Додаток 1

Таблиця значень щільності нормального розподілу $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3994	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2. Таблиця значень функції розподілу стандартного нормального розподілу $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Додаток 3

Таблиця значень функції Пуассона $P\{\xi=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0196
4	0	0.0001	0.0003	0.0007	0.0016	0.0030
5	0	0	0	0.0001	0.0002	0.0004
6	0	0	0	0	0	0

m \ λ	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.1353	0.0498
1	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679	0.2707	0.1494
2	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839	0.2707	0.2240
3	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613	0.1804	0.2240
4	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153	0.0902	0.1690
5	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031	0.0361	0.1008
6	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0120	0.0504
7	0	0	0	0.0001	0.0034	0.0216
8	0	0	0	0	0.0009	0.0081
9	0	0	0	0	0.0002	0.0027
10	0	0	0	0	0	0.0008
11	0	0	0	0	0	0

m \ λ	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003	0.0012	0.0000
1	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027	0.0011	0.0005
2	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107	0.0050	0.0023
3	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286	0.0150	0.0076
4	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0573	0.0337	0.0189
5	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916	0.0607	0.0378
6	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221	0.0911	0.0631
7	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396	0.1171	0.0901
8	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396	0.1318	0.1126
9	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241	0.1318	0.1251
10	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0997	0.1186	0.1251
11	0.0019	0.0082	0.0225	0.0452	0.0722	0.0970	0.1137
12	0.0006	0.0034	0.0113	0.0264	0.0481	0.0728	0.0948
13	0.0002	0.0013	0.0052	0.0142	0.0296	0.0504	0.0729
14	0.0001	0.0005	0.0022	0.0071	0.0169	0.0324	0.0521
15	0	0.0002	0.0009	0.0033	0.0090	0.0194	0.0347
16	0	0	0.0003	0.0014	0.0045	0.0109	0.0217
17	0	0	0.0001	0.0006	0.0021	0.0058	0.0128
18	0	0	0	0.0002	0.0009	0.0029	0.0071
19	0	0	0	0.0001	0.0004	0.0014	0.0037
20	0	0	0	0	0.0002	0.0006	0.0019
21	0	0	0	0	0.0001	0.0003	0.0009
22	0	0	0	0	0	0.0001	0.0004
23	0	0	0	0	0	0	0.0002
24	0	0	0	0	0	0	0.0001

Література

1. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев, «Вища школа», 1979. – 408 с.
2. Карташов М.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. – К., «ТВіМС», 2004. – 304 с.
3. Коршунов Д.А., Фосс С.Г. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей: Учебное пособие. – Новосибирск, Издательство Новосибирского государственного университета, 2003. - 119 с.
4. Майборода Р.Є., Сугакова О.В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Навчальний посібник. – К., ЕКОМЕН, 1998. – 186 с.
5. Михайленко В.В. Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові функції. Курс лекцій: Навчальний посібник. – Житомир: ЖІТІ, 2003.
6. Радченко О.М. Теорія ймовірностей. – К.: Вид.-поліг. Центр «Київський університет», 2010. – 135 с.
7. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. – М., Наука, 1980 – 222 с.
8. Турчин В.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі: Підручник. – Д.: Вид-во Дніпропетр. нац. ун-ту, 2006. – 476 с.
9. Турчин В.М. Теория вероятностей и математическая статистика. Основные понятия, примеры и задачи. – Днепропетровск, ИМА-ПРЕСС., 2012. – 576 с.
10. Теорія ймовірностей: Методичні вказівки до лабораторних та самостійних робіт / Упорядники: О.І. Василик, М.В. Карташов, Г.М. Шевченко, Р.Є Ямненко. - К.: Вид.-поліг. Центр «Київський університет», 2008. – 60 с.
11. Самостійна робота студентів з курсу «Теорія ймовірностей і математична статистика» / Упорядники: Д.О. Іваненко, О.В. Сугакова. – Вид. лабор. ФРЕКС КНУ ім. Тараса Шевченка, 2014. – 100 с.

Навчальне видання

ЄФІМЕНКО *Світлана Володимирівна*
ІВАНЕНКО *Дмитро Олександрович*
СУГАКОВА *Олена Володимирівна*

Методичний посібник з курсу «Теорія ймовірностей»

Підписано до друку 14.10.2018. Формат 60x80[16].
Гарнітура Times. Папір офсетний. Друк офсетний.
Наклад 80 примірників. Ум. друк. арк. 6.

Видавнича лабораторія факультету радіофізики,
електроніки і комп'ютерних систем
Київського національного університету імені Тараса Шевченка