Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем

М.В. Максюта
А.В. Нетреба
І.О. Ястремський

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА БЛИЖНЬОГО ПОЛЯ

Навчальний посібник

Київ – 2024

Рецензенти:
доктор фіз.-мат. наук, професор Обуховський В.В.
доктор фіз.-мат. наук, професор Висоцький В.І.

Максюта М.В., Нетреба А.В., Ястремський І.О.

Електродинаміка ближнього поля

Навчальний посібник “Електродинаміка ближнього поля” призначений для студентів факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем для опанування однойменного курсу “Електродинаміка ближнього поля”. У посібнику в достатньо дохідливій і послідовній формі, починаючи з мікроскопічних рівнянь Максвелла і далі переходячи до використання так званої теореми погашення Евальда – Озеєна, розглядаються поряд з електродинамічними ефектами у хвильовій зоні їх видозміни у ближній зоні. При цьому складні математичні перетворення перенесені у чисельні додатки. Зазначимо ще, що цей посібник може бути рекомендований для фізичних спеціальностей університетів, оскільки на даний час відсутні загальнодоступні україномовні підручники за даною тематикою. Тому цей посібник якоюсь мірою може вирішити цю проблему.

Затверджено вченою радою факультету радіофізики, електроніки та комп’ютерних систем
(протокол № 13 від 15 травня 2024 року)

© **Максюта М.В.,**
Нетреба А.В.,
Ястремський І.О., 2024

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА……...5
Розділ 1. ОСНОВНІ ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ…….15
1.1. Узагальнення дослідних даних у вигляді мікроскопічних рівнянь Максвелла……..15
1.2. Макроскопічні рівняння Максвелла та граничні умови..27
1.3. Закони збереження заряду та енергії…….40
1.4. Закони електростатичного поля……43
1.5. Закони магнітостатичного поля…….46
Розділ 2. ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ……50
2.1. Векторні та скалярні потенціали……...50
2.2. Запізнювальні потенціали……..55
2.3. Вираження потенціалів через поляризацію (вектор Герца)……58
2.4. Поле лінійного електричного диполя та його випромінювання у хвильовій зоні……...63
2.5. Електромагнітне поле у ближній зоні та енергія дипольного випромінювання……70
Розділ 3. ВЗАЄМОДІЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ З ДІЕЛЕКТРИЧНИМИ СЕРЕДОВИЩАМИ……..76
3.1. Одержання формули Лорентц – Лоренца в рамках феноменологічного підходу ……..76
3.2. Опис поширення електромагнітних хвиль у діелектриках за допомогою інтегральних рівнянь ……80
3.3. Теорема погашення Евальда – Озеєна і строге одержання формули Лорентц – Лоренца…….81
3.4. Закони відбивання і заломлення……87
3.5. Формули Френеля……...90
Розділ 4. ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ В РЕЧОВИНІ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ БЛИЖНЬОГО ПОЛЯ……...94
4.1. Розгляд заломлення і відбивання плоскої хвилі за допомогою теореми погашення Евальда – Озеєна ……94
4.2. Розгляд заломлення і відбивання плоскої хвилі з урахуванням ефекту ближнього поля ……101

4.3. Граничні задачі класичної оптики для моношару диполів з лінійною поляризованістю ……...107
4.4. Перехідний шар на поверхні дискретно-неперервного діелектрика……...112
4.5. Показник заломлення дискретно-неперервного діелектрика на великій відстані від границі ……..116
Розділ 5. ПОЛЯРИЗАЦІЙНІ ТА ДИФРАКЦІЙНІ ЕФЕКТИ В БЛИЖНЬОПОЛЬОВІЙ МІКРОСКОПІЇ……...118
5.1. Поляризація при відбиванні та заломленні ……...118
5.2. Поле відбитої хвилі у хвильовій зоні ……125
5.3. Взаємодія сферичного зонда з діелектриком у полі зовнішнього оптичного випромінювання……...127
5.4. Дифракція плоскої монохроматичної хвилі на субхвильовій щілині……..134
5.5. Ближньопольова мікроскопія……..141
ДОДАТОК **А**……150
ДОДАТОК **Б**……153
ДОДАТОК **В**……155
ДОДАТОК **Г**……....158
ДОДАТОК **Д**……159
ДОДАТОК **Є**……...168
ДОДАТОК **Ж**……...170
ДОДАТОК **З**……179
ДОДАТОК **І**……..181
ДОДАТОК **К**……183
ПІСЛЯМОВА……...190
ЛІТЕРАТУРА ……..193

ПЕРЕДМОВА

Історія виникнення ближньопольової оптики

Стрімкий розвиток обчислювальної техніки в останні десятиліття став можливий за рахунок різкого підвищення щільності компонування елементів електронних схем. На зміну мікротехнологіям прийшли нанотехнології, які вимагають розробки нових методів аналізу поверхні твердих тіл. Зокрема, для дослідження поверхні з високою роздільною здатністю особливе місце належить скануючим зондовим мікроскопам (СЗМ). Їх першим представником став скануючий тунельний мікроскоп (СТМ) (за його створення була одержана Нобелівська премія). Через декілька років був винайдений атомно-силовий мікроскоп (АСМ), за допомогою якого досліджувались поверхневі рельєфи діелектриків. Ці прилади дозволяють не тільки вивчати поверхню, але й модифікувати її (наприклад, наносити рисунок за заданою програмою).

Дуже привабливою є ідея сумістити в одному приладі високу роздільну здатність СЗМ з багатьма іншими перевагами оптичних методів, а саме швидкодією, можливістю переналадки в широкому діапазоні частоти та потужності випромінювання, відсутності жорстких вимог до зразків та середовищ тощо. На перший погляд, ця ідея нездійсненна, тому що у відповідності з традиційними уявленнями просторова роздільна здатність оптичних приладів обмежена дифракцією і не може суттєво відрізнятися від половини довжини хвилі світла $\lambda/2$. Проте класичні закони дифракції, як багато й інших явищ, пов'язаних з хвильовою природою світла, базуються на неявному припущенні, що елементи оптичної схеми (лінзи об'єктивів, зразки тощо) знаходяться на значних (у порівнянні з λ) відстанях один від одного. Якщо ж мініатюрний зонд – джерело або приймач світла – переміщати на відстані $z << \lambda$ від поверхні зразка, то можна розраховувати на достатньо значну роздільну здатність, яка не обмежена дифракцією.

На цю можливість вперше звернули увагу в 1928 році. Стат-

тя, до якої схвально поставився Ейнштейн, вийшла в одному із провідних фізичних журналів (E. Synge. Phil. Mag., **6**, 356 – 362, (1928)). Проте ідеї, які містились у цій статті, набагато випередили технічні можливості того часу і швидко були забуті. До них повернулись лише через півстоліття. У 1984 році групою вчених із лабораторії IBM у Цюріху (у якій був побудований і перший СТМ) була досягнута роздільна здатність $\lambda/20$ у дослідах зі світлом видимого діапазону. Близькі результати приблизно у той же самий час були одержані і в інших дослідних центрах. Новий прилад одержав назву "ближньопольовий скануючий оптичний мікроскоп" (БСОМ) (в іноземній літературі використовуються абревіатури NSOM і SNOM).

Перші прилади були технічно недосконалими і одержані результати сприймались швидше як цікаві фізичні феномени, ніж як цінні дані щодо поверхні зразка. Зміни відбулись через декілька років, коли вдалось розв'язати проблему прецизійного контролю ширини зазору зонд-зразок і суттєво покращити технологію виготовлення оптичних зондів. Унікальні можливості БСОМ були продемонстровані в різних областях, включаючи фізику твердого тіла, техніку запису і зчитування інформації, біологію тощо. За допомогою БСОМ на магнітооптичних середовищах була досягнута щільність запису, яка на порядок перевищувала можливості стандартних оптичних методів. За допомогою технічних прийомів СТМ і БСОМ вдалося зменшити розмір деталей сформованого на поверхні рельєфу до 10 нм. Великий інтерес викликали повідомлення щодо можливості спостереження окремих молекул і реєстрації їх спектрів.

Ці та багато інших експериментальних і теоретичних робіт заклали основи нової області фізики: ближньопольової оптики (БПО), яка об'єднала мікроскопію, методи аналізу і засоби модифікації поверхні з субхвильовою (суттєво меншою за довжину хвилі) роздільною здатністю.

Принцип дії та основні вузли БСОМ

Термін "БСОМ" використовують по відношенню до всіх приладів БПО незалежно від того, для розв'язування яких задач

вони призначені. До таких задач відносяться виявлення малих неоднорідностей у поверхневому шарі зразка, їх спектроскопічний аналіз, модифікація рельєфу поверхні оптичними методами тощо.

Ключовим елементом любого БСОМ є **оптичний зонд**, який локалізує електромагнітне поле в області, яка суттєво менше довжини хвилі. Найпростішим зондом є загострене волокно, на конічний відрізок якого збоку нанесений металевий шар так, щоб прозорою залишалась тільки невелика площадка на вершині. Зонд може переносити випромінювання від освітлювача до зразка або від зразка до детектора. У першому варіанті промінь лазера запускається у волокно через широкий торець і, пройшовши через конічну вершину, де він втрачає основну частину потужності, освітлює зразок. За прозорим зразком розташований детектор (наприклад, фотодіод). Другий варіант відрізняється тим, що освітлювач і детектор міняються місцями. У цьому випадку освітлена широка ділянка зразка, але через зонд проходить лише випромінювання, розсіяне ділянкою поверхні, найближчою до вершини. Якщо зразок неоднорідний, то інтенсивність розсіювання, а відповідно і струм, який реєструється приймальною схемою, змінюється в процесі сканування, що дозволяє пов'язати положення неоднорідності з тим або іншим елементом растра на зображенні. Прецизійне переміщення зонда щодо зразка здійснюється за допомогою сканера. Зазвичай, він являє собою відрізок циліндричної трубки із п'єзокераміки, на якій нанесено чотири електроди. Подаючи у певній послідовності напругу на різні пари електродів, можна згинати циліндр у різні боки, а також стискати або розтягувати його вздовж осі, здійснюючи тим самим розгортку у горизонтальній площині *xy* та переміщення по осі *z*.

До числа необхідних вузлів БСОМ відноситься сенсорна схема, реагуюча на зміну відстані між зондом і зразком. Чутливим елементом частіше всього слугує невелика кварцова пластинка у формі вилки з резонансною частотою, що становить декілька десятків кілогерців. Вилку з приклеєним до однієї з ніжок вістрям, закріплюють на сканері. Під дією змінної напруги, налаштованої в резонансі з частотою коливань кварцу, вилка ко-

ливається, подібно до маятника, у площині, перпендикулярній до поверхні зразка. Зближення вістря із зразком приводить до зменшення розмаху коливань під дією тангенціальної складової сил атомної взаємодії, що, у свою чергу, викликає зміну п'єзонапруги, яка знімається між ніжками вилки. Якісно ту ж картину можна спостерігати, поступово занурюючи в рідину голку, що коливається. Сили, що гальмують коливання вістря, спрямовані переважно вздовж поверхні зразка, як і сили зсуву в кристалі (shear force). Виходячи з цієї аналогії, термін "shear force" стали застосовувати і для позначення методу контролю відстані між вістрям і зразком за зміни амплітуди та фази коливань вістря, що відбуваються вздовж поверхні зразка. Знаючи залежність амплітуди коливань від відстані z до поверхні, можна зупинити зближення зі зразком вістря на потрібній висоті (1 – 10 нм), не допускаючи зіткнення з поверхнею.

Існують і суто оптичні схеми контролю відстані z, у яких голка, що коливається, розміщується між допоміжним джерелом і приймачем світла. Їхнє взаємне розташування при юстуванні підбирається таким чином, щоб частина світлового потоку, що досягає детектора, зменшувалась при зростанні амплітуди коливань. Кращої, ніж у режимі "shear force" роздільної здатності можна досягнути у режимі "tapping", коли вістря періодично впритул наближається до поверхні і віддаляється від неї.

При русі вістря вздовж шорсткої поверхні система зворотного зв'язку змінює напругу на сканері щоразу, коли амплітуда коливань відхиляється від заздалегідь вибраного значення. Оскільки стрибок напруги пропорційний зміні ширини зазору, за його величиною можна робити висновки щодо висоти зустрінутої вістрям неоднорідності рельєфу. Відповідна інформація обробляється в каналі АСМ і може бути представлена як карта топографічного рельєфу сканованої ділянки поверхні. Одночасно в оптичному каналі або в каналі БСОМ відстежується зміна інтенсивності світлового потоку, що надходить до детектора. Пагорби або заглиблення на поверхні реєструються одночасно в обох каналах. Цікавою є ситуація, коли стороннє включення знаходиться на невеликій глибині і може бути помічене тільки завдяки своїм оптичним властивостям. Нехай, наприклад, у зра-

зку містяться частинки флюорофору, що перевипромінюють падаюче світло зі зміною частоти (рис. 1а).

Можливість локалізації флуоресцентних міток дуже істотна при дослідження біологічних тканин, що пов'язана зі здатністю міток, які розрізняються за складом, осаджуватися вибірково на різних ділянках клітин. Записування зображення в каналі АСМ дозволяє виявити виступ на поверхні (рис. 1б), але не дає інформації про те, чи відрізняється він за своїми оптичними властивостями від сусідніх ділянок. Канал БСОМ, що приймає сигнал лише на частоті флуоресценції, усуває цю невизначеність. Більш того, БСОМ, на відміну від АСМ, здатний виявити і частинки, які знаходяться на невеликій глибині під поверхнею (рис. 1в). Щоб реалізувати ці додаткові можливості, необхідне використання сенсорних схем, оскільки було б важко правильно встановити вістря та уникнути його пошкодження під час зіткнення з поверхнею в процесі сканування.

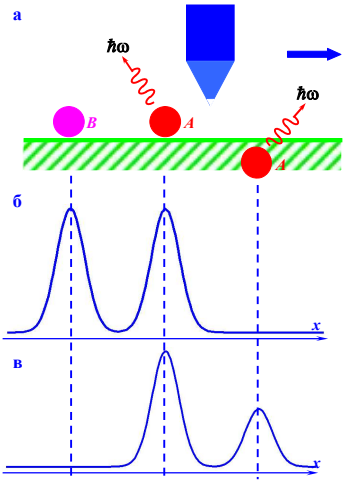


Рис. 1. Схема сканування зондом зразка, який містить флуоресцентні мітки (*A*) і оптично нейтральну частинку (*B*) – (а); зображення виділеного перерізу зразка в каналах АСМ – (б) і БСОМ – (в); крива запису оптичного сигналу наведена з поправкою на зміну положення вістря по висоті.

Відрізняючись від інших зондових мікроскопів низкою характерних особливостей, численні різновиди БСОМ можуть суттєво відрізнятися і між собою. Відомо близько 20 варіантів БСОМ, призначених для дослідження зразків при проходженні крізь них світла і при його відбитті від них. Не меншою є і різноманітність зондів. На першому етапі використовувались в основному зонди, які виготовлялись із прозорих матеріалів, наприклад, уже згадане загострене оптичне волокно, кінець якого захищений металевим екраном з малим отвором (діафрагмою) на вершині (рис. 2а). Такі зонди, як і прилади, в яких вони використовуються, одержали назву “апертурні” (від aperture – діафрагма). Радіус діафрагми варіюється в діапазоні від 10 нм до 150 нм. Безапертурні (non-aperture) зонди частіше всього виготовляють із непрозорих матеріалів. Методи хімічного та іонного травлення дозволяють одержувати вістря з радіусом кривизни до 1 – 1.5 нм. Електромагнітне поле концентрується біля вершини металевого вістря (рис. 2б).

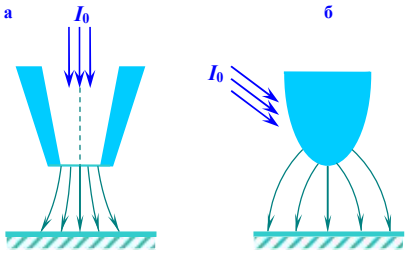


Рис. 2. Схема розсіювання електромагнітної енергії вершинами апертурного (а) і безапертурного (б) зондів.

На рис. 3 показана схема ближньопольового пристрою з реєстрацією розсіяного випромінювання на просвіт: відбувається освітленні об’єкта через зонд-світловод з вихідним отвором, діаметр d якого значно менший за довжину хвилі світла λ (рис. 3а). При цьому об’єкт знаходиться у безпосередній близькості від зонда – у ближній зоні випромінювання вихідного отвору, який є джерелом вторинних хвиль. Вимірюваний сигнал залежить від відстані l між площиною отвору і досліджуваною

поверхнею $(l << \lambda)$ і при скануванні зонда несе інформацію про рельєф поверхні або профіль діелектричної проникності.

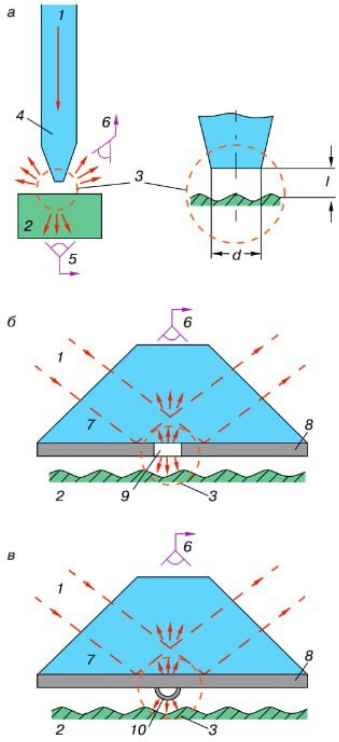


Рис. 3. Схеми оптичних ближньопольних пристроїв із реєстрацією розсіяного випромінювання на просвіт (а) і на відбивання (б, в); 1 – світловий пучок з довжиною хвилі λ; 2 – досліджуваний об'єкт; 3 – область ближньопольної взаємодії; *d* – діаметр випромінювача, *l* – локальний зазор між випромінювачем і поверхнею об'єкта, *d*, *l* << λ; 4 – волоконний зонд-вістря (з металевим покриттям); 5, 6 – фотоприймачі розсіяного світла; 7 – скляна робоча призма; 8 – тонка металева плівка; 9 – отвір субмікронних розмірів; 10 – металізована півсфера.

Роздільна здатність ближньопольового мікроскопу в площині сканування може досягати 10^5 ліній/мм. Вона визначається, у

першу чергу, діаметром отвору, який у деяких системах має величину 0.03 – 0.05 мкм. Роздільна здатність по нормалі до поверхні внаслідок специфічної структури ближнього поля на порядок вище. Для реєстрації оптичного відгуку в якості джерела світла в ближньопольних пристроях використовують лазери (аргонові, гелій-неонові), а в якості реєстраторів слабких сигналів – фотопомножувачі та інші чутливі фотоприймачі. Тут необхідно зазначити, що, як правило, ближньопольові освітлювальні та приймальні оптичні системи відрізняються низькою енергетичною ефективністю: відношення потужності вихідного та вхідного сигналів складає ~ 10^{-6} – 10^{-4}. Подолання такого недоліку може сприяти збудження поверхневої електромагнітної хвилі (ПЕХ) в зоні ближньопольового контакту з об'єктом. За інших рівних умов це повинно багатократно підвищити діючу там освітленість.

Однією із головних ознак і наслідків генерації ПЕХ у процесі такої силової дії випромінювання на речовину є утворення поверхневих періодичних структур (ППС), які являють собою систему упорядкованих лінійних виступів і впадин рельєфу поверхні (рис. 4).

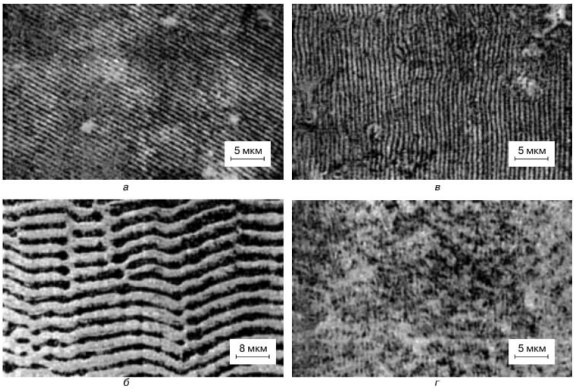


Рис. 4. Поверхневі періодичні структури, сформовані при дії на матеріал лазерного випромінювання з різними параметрами: довжиною хвилі λ, тривалістю імпульсу τ, кількістю діючих імпульсів у серії N, густиною світлового потоку q_0.

Структури мають період порядку довжини хвилі світла λ і переважно орієнтовані своїми штрихами перпендикулярно проекції електричного вектора світлової хвилі на поверхню (при лінійній поляризації випромінювання). Відповідно розробленим фізичним уявленням щодо утворення ППС, силова дія зобов'язана частинному перетворенню лазерного випромінювання в ПЕХ на резонансних періодичних гратках, у тій чи іншій мірі представлених у просторовому спектрі випадкових нерівностей реальної поверхні. Період і орієнтація резонансних граток відповідають умовам, коли дифраговані у плюс першому і мінус першому порядках хвилі напрямлені вздовж поверхні. У процесі свого розповсюдження вони інтерферують з падаючим лазерним випромінюванням. У результаті інтерференції цих двох біжучих у різних напрямках хвиль виникає результуючий "нерухомий" розподіл діючого випромінювання, яке модульоване в просторі з тим же періодом, що й резонансна гратка. За достатньої інтенсивності випромінювання у сформованому інтерференційному полі відбувається неоднорідне нагрівання середовища та викликано ним збільшення висоти резонансного рельєфу внаслідок активації різних теплових процесів на поверхні. Останнє замикає ланцюг позитивних обернених зв'язків і призводить до зростання резонансного рельєфу, від висоти якого залежить ефективність збудження ПЕХ і глибина модуляції інтерференційного поля. Після закінчення дії та охолодження поверхні наведений рельєф закріплюється у вигляді ППС.

Теорія ефекту ближнього поля

Значний інтерес викликають різні оптичні явища в мікроскопічних об'єктах просторів, таких як мікроскопічні резонатори, хвилеводи, квантові нитки, квантові точки, надтонкі плівки, а також у безпосередній близькості від межі розділу середовищ. Один із найбільш важливих етапів теоретичних досліджень цих явищ полягає у відшуканні розв'язків польових рівнянь, зокрема, рівнянь Максвелла. При цьому першочергове значення набуває проблема вибору граничних умов, оскільки фізичні властивості поверхневих шарів різних матеріалів відрізняються від

їх об’ємних властивостей. Це наводить на думку щодо того, що проблема граничних умов вимагає свого нового осмислення, коли досліджується поведінка електромагнітного поля у ближній зоні щодо межі розділу середовищ, де відбуваються процеси поступового формування заломлених та відбитих хвиль.

Розгляд усіх цих явищ грунтується на фундаментальному твердженні, що просторовий розподіл електромагнітного поля в мікроскопічному об’ємі або поблизу поверхні може бути обчислений за допомогою класичної електромагнітної теорії. При цьому використовуються рівняння Максвелла і середовище розглядається як неперервна система випромінювачів. Проте уявлення щодо неперервності оптичного середовища не є цілком обґрунтованим, оскільки в реальних середовищах атоми розподілені дискретним чином. У цьому випадку ефективним є опис за допомогою інтегро-диференціальних рівнянь, який, у якійсь мірі, є альтернативним використанню макроскопічних рівнянь Максвелла (більшу роль відіграють тепер мікроскопічні рівняння Максвелла). Зокрема, важливу роль відіграє теорема погашення Евальда – Озеєна. Наприклад, за допомогою цієї теореми у ближній зоні досліджуються зміни в рівнянні Лорентц – Лоренца, законах відбивання та заломлення світла, у формулах Френеля тощо (у хвильовій зоні ці закони і рівняння можна одержати строго).

Урахування дискретної структури середовища може бути виконане шляхом введення так званої сфери Лоренца відповідного радіусу, який набагато менший довжини світлової хвилі і більше міжатомної відстані, з центром у точці спостереження. При цьому атоми у межах цієї сфери розглядаються як дискретно розподілені диполі, а все, що знаходиться за межами сфери, розглядається як неперервне діелектричне середовище. У підході, запропонованим Лоренцем і використовуваним до теперішнього часу, враховується лише кулонівська взаємодія диполів в області дискретного розподілу, оскільки на малих відстанях кулонівська взаємодія більша, ніж запізнювальна.

Нарешті, зазначимо, що велике значення мають в області ближнього поля і різні дифракційні ефекти для постійного підвищення роздільної здатності ближньопольових мікроскопів.

Розділ 1

ОСНОВНІ ЗАКОНИ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

1.1. Узагальнення дослідних даних у вигляді мікроскопічних рівнянь Максвелла

Основним законом електрики є закон Кулона, який був ним встановлений експериментально в 1785 році Цей закон характеризує взаємодію точкових нерухомих зарядів. ***Точковими називають заряди, розміри яких набагато менші, ніж відстань між зарядами.*** Сила, що діє з боку розташованого в центрі декартової системи координат точкового заряду q (див. рис. 1.1.1*а*) на точковий заряд q_1, який міститься в точці з радіус-вектором $\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_x + y_1\vec{e}_y + z_1\vec{e}_z$, описується такою формулою:

$$\vec{F}\left(\vec{r}_1\right) = kqq_1\vec{r}_1 \big/ r_1^3 , \qquad (1.1.1)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, незалежний від величини зарядів і віддалі між ними; його числове значення залежить тільки від вибору системи одиниць, якою користуються при вимірюванні величин. В одиницях системи СІ $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, де величина $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ ф/м називається діелектричною проникністю вакууму. В одиницях системи СГС $k = 1$.

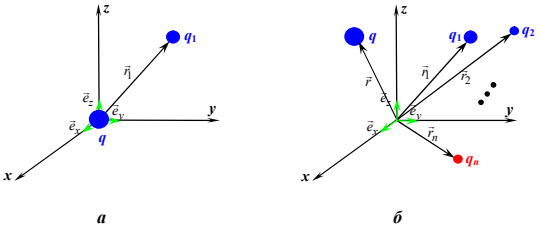


Рис. 1.1.1. *а* – схематичне зображення точкового заряду q_1 в полі точкового заряду q, що знаходиться в центрі декартової системи координат, *б* – зображення n точкових зарядів q_1, …, q_n, які знаходяться в точках із радіус-векторами $\vec{r}_1$, …, $\vec{r}_n$ і діють на точковий заряд q.

Отже, в одиницях системи СГС закон Кулона записується у вигляді

$$\vec{F}\left(\vec{r}_1\right) = qq_1\vec{r}_1 \big/ r_1^3 \ . \qquad (2.1.1)$$

Якщо ввести поняття напруженості електричного поля точкового заряду q, а саме

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = q\vec{r} \big/ r^3 \ , \qquad (3.1.1)$$

то вираз (2.1.1) переписується у такому вигляді:

$$\vec{F}\left(\vec{r}_1\right) = q_1\vec{E}\left(\vec{r}_1\right) = q\vec{E}_1\left(\vec{r}_1\right) . \qquad (4.1.1)$$

Якщо на заряд q, що знаходиться в точці з радіус-вектором $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, діють електричні поля n точкових зарядів q_1, …, q_n, які знаходяться в точках із радіус-векторами $\vec{r}_1$, …, $\vec{r}_n$ (див. рис. 1.1.1*б*), то результуюча сила є векторною сумою сил, що діють з боку цих зарядів:

$$\vec{F}\left(\vec{r}\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} q\vec{E}_i\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right) = q\vec{E}\left(\vec{r}\right) . \qquad (5.1.1)$$

Із співвідношення (5.1.1) видно, що має місце так званий принцип суперпозиції: **напруженість електричного поля, створеного кількома зарядами, дорівнює векторній сумі напруженостей електричних полів окремих зарядів:**

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \vec{E}_i\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} q_i \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}_i\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|^3} = \nabla\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} q_i \frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}\right) =$$

$$= \sum\nolimits_{i=1}^{n} q_i \nabla\left(\frac{1}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i\right|}\right), \qquad (6.1.1)$$

де градієнт скалярного поля $\varphi\left(\vec{r}\right)$ розраховується таким чином:

$$\operatorname{grad}\varphi\left(\vec{r}\right) = \nabla\varphi\left(\vec{r}\right) = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi\left(\vec{r}\right) . \qquad (7.1.1)$$

Якщо відстані між точковими зарядами будуть малими і їх буде достатньо багато у деякій обмеженій області простору (див. рис. 2.1.1), то ми можемо перейти до неперервного розподілу зарядів з об’ємною густиною

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}. \qquad (8.1.1)$$

Тоді напруженість електричного поля, створюваного зарядом $dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')dV'$, що міститься в об'ємі dV', на основі принципу суперпозиції буде такою:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}')dV'. \qquad (9.1.1)$$

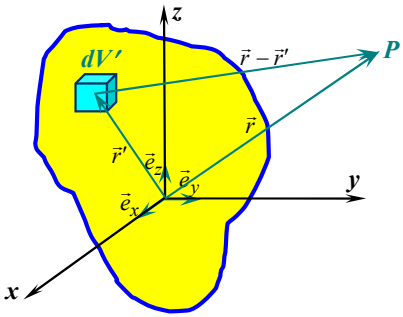


Рис. 2.1.1. Ілюстрація до розрахунку напруженості електричного поля в точці спостереження P створюваним безперервно розподіленим в обмеженій області простору зарядом з об'ємною густиною $\rho(\vec{r}')$.

Виконуючи далі у (9.1.1) інтегрування за об'ємом V' області, у якій знаходиться безперервно розподілений заряд, одержуємо напруженість електричного поля у точці спостереження P:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \qquad (10.1.1)$$

У випадку, коли заряд зосереджений лише на деякій поверхні, напруженість електричного поля у точці з радіус-вектором $\vec{r}$ обчислюється за формулою

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS', \qquad (11.1.1)$$

де $\sigma(\vec{r}) = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta S} = \dfrac{dq}{dS}$ – поверхнева густина заряду.

Визначимо тепер потік вектора напруженості електричного поля через елемент поверхні dS:

$$dN = \vec{E} \cdot d\vec{S}\,, \qquad (12.1.1)$$

де $d\vec{S}$ – вектор, який за абсолютною величиною дорівнює площі dS і напрямлений уздовж нормалі до елементарної поверхні. Підставляючи у формулу (12.1.1) значення напруженості електричного поля точкового заряду (3.1.1), дістаємо

$$dN = \frac{q}{r^3}\vec{r} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{r^3} r dS \cos\alpha = \frac{q}{r^2}\cos\alpha dS\,, \qquad (13.1.1)$$

де α – кут між напрямком вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ і напрямком нормалі $\vec{n}$ до елементарної поверхні, r – відстань від заряду до площадки (див. рис. 3.1.1). Добуток $\cos\alpha dS$ за абсолютною величиною дорівнює площі проекції елементарної поверхні dS на площадку, перпендикулярну до радіус-вектора $\vec{r}$, знак добутку визначається величиною кута α. Отже, $\cos\alpha dS = \pm dS'$.

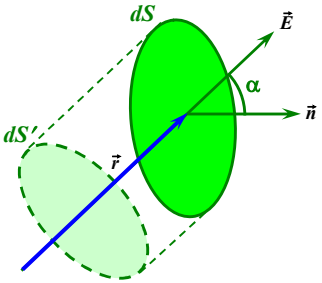


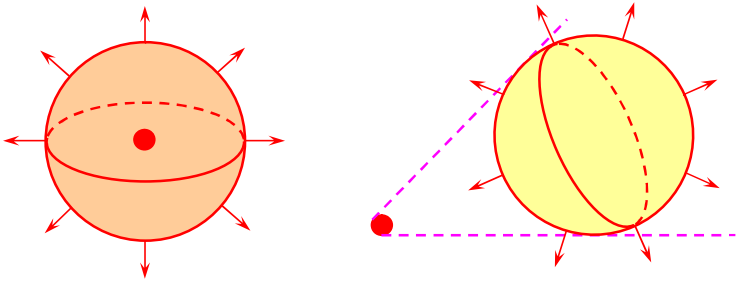
Рис. 3.1.1. Орієнтація елементарної поверхні dS щодо напрямку напруженості електричного поля $\vec{E}$.

Перепишемо вираз (13.1.1) через тілесний кут $d\Omega = dS'/r^2$:

$$dN = \pm q d\Omega\,. \qquad (14.1.1)$$

Інтегруючи ліву й праву частини рівності (14.1.1) по замкненій поверхні, всередині якої розміщений заряд (див. рис. 4.1.1*а*), дістаємо

$$N = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \int d\Omega = 4\pi q \,. \qquad (15.1.1)$$



а *б*

Рис. 4.1.1. Ілюстрація до розрахунку потоку напруженості електричного поля $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ для заряду, що знаходиться всередині замкненої поверхні (а) та зовні від неї (б).

Очевидно, що якщо заряд знаходиться зовні замкненої поверхні, як показано на рис. 4.1.1*б*, то потік вектора напруженості електричного поля буде рівний нулю:

$$N = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \int d\Omega - q \int d\Omega = 0 \,. \qquad (16.1.1)$$

Таким чином, для дискретної множини точкових зарядів, які знаходяться всередині замкненої поверхні, формула (15.1.1) переписується так:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum\nolimits_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 4\pi \sum\nolimits_i q_i \,. \qquad (17.1.1)$$

Для випадку ж неперервного розподілу заряду формула (15.1.1) представляється у такому вигляді:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int_V \rho dV \,. \qquad (17.'1.1)$$

Зауважимо, що співвідношення (17.1.1) і (17.′1.1) є математичним виразом теореми Остроградського – Гауса, яка для довіль-

ного векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ записується у вигляді

$$\oint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \oint_S A_n(\vec{r})\, dS = \int_V \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r})\, dV\,, \qquad (18.1.1)$$

де дивергенція векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ розраховується таким чином:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \equiv \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot$$
$$\cdot \left(A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z \right) = \nabla \cdot \vec{A}\,. \qquad (19.1.1)$$

Застосовуючи теорему (18.1.1) до співвідношення (17.′1.1), дістаємо рівність

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r})\, dV = 4\pi \int_V \rho\, dV\,, \qquad (20.1.1)$$

з якої слідує наступне рівняння:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho\,. \qquad (21.1.1)$$

Рівняння (21.1.1) (закон Кулона в диференціальній формі) є одним із основних рівнянь електродинаміки. Як й інтегральне співвідношення (17.′1.1), рівняння (21.1.1) є наслідком закону Кулона.

Провідники, по яких тече електричний струм, взаємодіють між собою з силою, яка залежить від сили струму і положення провідників. Ця сила виникає внаслідок того, що навколо провідника із струмом утворюється магнітне поле, яке діє на інший провідник із струмом. Досліджуючи взаємодію провідника із струмом з магнітним полем залежно від положення провідника і сили струму в ньому, можна прийти до такого висновку: сила $d\vec{F}$, що діє на елемент провідника $d\vec{l}$ (рис. 5.1.1), визначається формулою

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B} \right], \qquad (22.1.1)$$

де I – сила струму в провіднику, тобто кількість зарядів, що проходять за одиницю часу через поперечний переріз провідника.

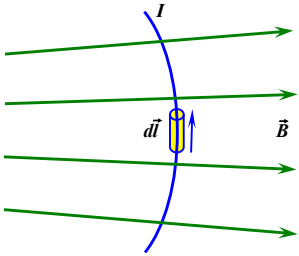


Рис. 5.1.1. Зображення елемента провідника $d\vec{l}$ в магнітному полі з індукцією $\vec{B}$.

Напрямок вектора $d\vec{l}$ збігається з напрямком струму в провіднику, а абсолютна величина цього вектора дорівнює довжині елемента провідника. Вектор $\vec{B}$ залежить лише від магнітного поля, яке взаємодіє з цим провідником. Цей вектор є основною характеристикою магнітного поля і називається вектором магнітної індукції. Вимірюючи силу, з якою магнітне поле діє на провідник із струмом, ми можемо за формулою (22.1.1) визначити магнітну індукцію будь-якої системи. Тому формула (22.1.1) визначає магнітну індукцію, подібно до того, як співвідношення $\vec{F} = q\vec{E}$ визначає напруженість електричного поля.

Циркуляцією магнітної індукції називається такий інтеграл по замкненому контуру:

$$C = \oint B_l dl \,, \qquad (23.1.1)$$

де B_l – проекція вектора $\vec{B}$ на дотичну в певній точці контуру.

Розглянемо спочатку магнітне поле постійних струмів. Аналізуючи дослідні дані, можна показати, що циркуляція C вектора магнітної індукції по деякому замкненому контуру пропорційна силі струму через поверхню, яку обмежує цей контур:

$$C = \oint_L B_l dl = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_S j_n dS = \frac{4\pi}{c} I \,, \qquad (24.1.1)$$

де $\vec{j}$ – вектор густини струму. Щоб упевнитись у справедливості співвідношення (24.1.1), треба порівняти значення магнітної

індукції, знайденої з цього співвідношення, з дослідними даними. Для прикладу, користуючись формулою (24.1.1), визначимо індукцію магнітного поля, створеного прямолінійним струмом (рис. 6.1.1).

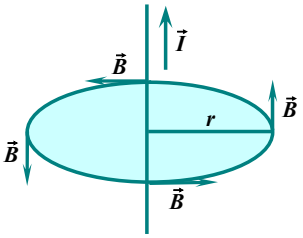


Рис. 6.1.1. До визначення індукції магнітного поля, створеного прямолінійним струмом.

$$2\pi rB = \frac{4\pi}{c} I \quad \rightarrow \quad B = \frac{2I}{cr}. \tag{25.1.1}$$

Формула (25.1.1) збігається з дослідним законом Біо, Савара, Лапласа для прямолінійного струму (1820 р.).

Магнітне поле створюється не тільки струмом, а й змінним електричним полем. У цьому можна пересвідчитись, замкнувши пластини зарядженого конденсатора і досліджуючи магнітне поле між ними. По провіднику, що з'єднує пластини, проходитиме струм, сила якого спадатиме до нуля в міру того, як зменшуватиметься заряд пластин. Цей струм не є замкненим, оскільки між пластинами конденсатора руху зарядів не відбувається. Проте виявляється, що всередині конденсатора все-таки виникає магнітне поле. У цьому разі воно створюється залежним від часу електричним полем. Досліджуючи експериментально це явище залежно від швидкості зміни електричного поля, можна прийти до висновку, що змінне електричне поле створює таке магнітне поле, яке створив би струм з густиною

$$\vec{j}_{\text{зм}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \tag{26.1.1}$$

яку називають густиною струму зміщення. Отже, за наявності руху зарядів і змінного електричного поля приходимо до такого рівняння:

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{c}\int_S \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_n dS\,. \qquad (27.1.1)$$

Рівняння (27.1.1) є одним із основних рівнянь електродинаміки. Користуючись теоремою Стокса, це рівняння можна переписати в диференціальній формі. За теоремою Стокса для довільного векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ існує таке співвідношення:

$$\oint_L \vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})\cdot d\vec{S}\,. \qquad (28.1.1)$$

де ротор векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ розраховується таким чином:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$\vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \qquad (29.1.1)$$

Користуючись теоремою (28.1.1), формулу (27.1.1) переписуємо у такому вигляді:

$$\int_S \operatorname{rot}\vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\,. \qquad (30.1.1)$$

Оскільки рівняння (30.1.1) справджується для довільної поверхні інтегрування, то повинні збігатися підінтегральні вирази лівої та правої його частин, тобто маємо

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,. \qquad (31.1.1)$$

Рівняння (31.1.1) є наслідком узагальнення закону Біо, Савара, Лапласа, за яким змінне електричне поле створює магнітне поле.

Необхідно зазначити, що рівняння (31.1.1) до Максвелла записувалось без доданка $\partial\vec{E}/c\partial t$, тобто мало вигляд $\operatorname{rot}\vec{B} = 4\pi\vec{j}/c$ (це так званий закон Ампера). У 1865 році Максвелл помітив, що для змінних струмів закон Ампера некоректний, оскільки він

одержаний тільки для стаціонарних струмів, коли $\operatorname{div}\vec{j}=0$. Ця вимога до дивергенції $\vec{j}$ міститься безпосередньо в рівнянні Ампера. Дійсно, беручи дивергенцію від обох частин рівняння Ампера, одержуємо

$$\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}=\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{B}\equiv 0. \qquad (32.1.1)$$

Однак рівняння $\operatorname{div}\vec{j}=0$ справедливе тільки для стаціонарних явищ. Загальне ж співвідношення дається рівнянням неперервності для заряду і струму

$$\operatorname{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \qquad (33.1.1)$$

Максвелл помітив, що за урахування закону Кулона $\operatorname{div}\vec{E}=4\pi\rho$ рівняння неперервності (33.1.1) можна представити у вигляді рівності нулю дивергенції деякого вектора:

$$\operatorname{div}\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\operatorname{div}\left(\vec{j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0. \qquad (34.1.1)$$

Відповідно Максвелл узагальнив закон Ампера на випадок змінних полів, виконуючи в ньому заміну

$$\vec{j}\to\vec{j}+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \qquad (35.1.1)$$

Отже, узагальнений закон Ампера набуває при цьому вигляду (31.1.1).

За законом електромагнітної індукції, відкритим Фарадеєм у 1831 році, у замкненому магнітному провіднику, який перебуває в змінному магнітному полі, індукується електричний струм. Виникнення струму можна пояснити так: змінне магнітне поле створює навколо себе електричне поле, яке рухає заряди, і, таким чином, збуджує в провіднику струм. Кількісно закон електромагнітної індукції для деякого електричного кола описується таким співвідношенням:

$$\mathcal{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \qquad (36.1.1)$$

де $\mathcal{E}$ – електрорушійна сила індукції, пов'язана з напруженістю електричного поля в електричному полі так:

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \ . \qquad (37.1.1)$$

Підставляючи вираз (37.1.1) та вираз для магнітного потоку $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_n dS$ у формулу (36.1.1), одержуємо

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \ . \qquad (38.1.1)$$

Співвідношення (38.1.1) не залежить від параметрів провідника. Тому можна сподіватися, що воно справедливе для довільного контуру (не обов'язково замкненого).

Застосовуючи до лівої частини рівняння (38.1.1) теорему Стокса (28.1.1), зводимо його до вигляду

$$\int_S \mathrm{rot}\, \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \ . \qquad (39.1.1)$$

Зважаючи на те, що це рівняння справджується для довільної поверхні, прирівнюємо підінтегральні вирази лівої та правої частин у рівності (39.1.1), тобто одержуємо

$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \qquad (40.1.1)$$

Співвідношення (40.1.1) є диференціальною формою закону електромагнітної індукції.

Із дослідних даних випливає, що силові лінії магнітної індукції завжди замкнені. Отже, можна стверджувати, що скільки силових ліній входить у замкнену поверхню, стільки їх і виходить. Тому потік вектора магнітної індукції через замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \ . \qquad (41.1.1)$$

Очевидно, що за використанням теореми Остроградського – Гауса (18.1.1), від (41.1.1) перейдемо до формули

$$\int_V \mathrm{div}\, \vec{B} dV = 0 \ . \qquad (42.1.1)$$

Звідси, завдяки довільності об'єму інтегрування, випливає таке диференціальне співвідношення:

$$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0 \ . \qquad (43.1.1)$$

У табл. 1 виписана система рівнянь Максвелла для вакууму в інтегральній та диференціальній формах у системі одиниць СГС.

Табл. 1.1.1. Рівняння Максвелла у вакуумі в системі одиниць СГС.

Інтегральна форма	Диференціальна форма	Дослідні підтвердження
$\oint B_l dl = \frac{4\pi}{c}\int j_n dS + \frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_n dS$	$\text{rot}\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Закон Біо, Савара, Лапласа, змінне електричне поле створює магнітне поле
$\oint E_l dl = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_n dS$	$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Закон електромагнітної індукції
$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi\int \rho dV$	$\text{div}\,\vec{E} = 4\pi\rho$	Закон Кулона
$\oint B_n dS = 0$	$\text{div}\,\vec{B} = 0$	Дослідний факт про замкненість магнітних силових ліній

Якщо виконати заміни $\vec{E} \to \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,\vec{E}$, $\vec{B} \to \sqrt{4\pi/\mu_0}\,\vec{B}$, $\left(\rho, \vec{j}\right) \to \left(\rho, \vec{j}\right)\Big/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$, $c = 1\Big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, де $\mu_0 \approx 4\pi\cdot 10^{-7}$ гн/м – магнітна проникність вакууму, то система рівнянь Максвелла буде записана в системі одиниць СІ (див. табл. 2).

Табл. 2.1.1. Рівняння Максвелла у вакуумі в системі одиниць СІ.

Інтегральна форма	Диференціальна форма	Дослідні підтвердження
$\oint B_l dl = \mu_0\int j_n dS + \varepsilon_0\mu_0\int\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)_n dS$	$\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	Закон Біо, Савара, Лапласа, змінне електричне поле створює магнітне поле

$\oint E_l dl = -\int \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_n dS$	$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Закон електромагнітної індукції
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV$	$\text{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$	Закон Кулона
$\oint B_n dS = 0$	$\text{div}\,\vec{B} = 0$	Дослідний факт про замкненість магнітних силових ліній

1.2. Макроскопічні рівняння Максвелла та граничні умови

Тіла складаються з величезної кількості заряджених частинок (електронів і ядер). Тому густина заряду і густина струму відмінні від нуля лише в тих точках, де містяться в певний момент часу заряджені частинки. Створені дискретним розподілом заряду і струму електричне та магнітне поля швидко змінюють своє значення при зміщенні точки спостереження навіть на дуже малі відстані (порядку розмірів атомів). **Такі поля називаються *мікроскопічними*.** Оскільки між електронами і ядрами є вакуум, то мікроскопічне електромагнітне поле повинно бути зв'язане з мікроскопічним значенням густини струму $\vec{j}_{\text{мікр}}$ і заряду $\rho_{\text{мікр}}$ такою системою рівнянь:

$$\text{rot}\,\vec{B}_{\text{мікр}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{мікр}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_{\text{мікр}}}{\partial t}, \qquad (1.1.2)$$

$$\text{rot}\,\vec{E}_{\text{мікр}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}_{\text{мікр}}}{\partial t}, \qquad (2.1.2)$$

$$\text{div}\,\vec{E}_{\text{мікр}} = 4\pi\rho_{\text{мікр}}. \qquad (3.1.2)$$

$$\text{div}\,\vec{B}_{\text{мікр}} = 0. \qquad (4.1.2)$$

Система рівнянь (1.1.2) – (4.1.2) називається ***системою рівнянь Максвелла – Лоренца*.**

Наближення, за якого нехтують дискретним характером будови речовини, називається *макроскопічним*. Макроскопі-

чні значення являють собою усереднені значення відповідних мікроскопічних величин.

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\left\langle \vec{E}_{\text{мікр}}(\vec{r},t)\right\rangle . \qquad (5.1.2)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\left\langle \vec{B}_{\text{мікр}}(\vec{r},t)\right\rangle . \qquad (6.1.2)$$

Операція $\langle A\rangle$ означає усереднення величини A за фізично малим об'ємом (який, проте, містить у собі багато атомів і молекул) за заданого положення всіх частинок, а потім усереднення за рухом частинок, що залежить від законів, за якими рухаються заряди (класичні або квантові). Проте явне визначення останньої операція не знадобиться. Нам важливо, що після усереднення мікроскопічні величини стають макроскопічними, тобто повільно змінюються в межах атомів і молекул, і, крім того, для середніх величин справджуються такі співвідношення:

$$\frac{\partial\left\langle \vec{E}_{\text{мікр}}(\vec{r},t)\right\rangle}{\partial x}=\left\langle \frac{\partial\vec{E}_{\text{мікр}}(\vec{r},t)}{\partial x}\right\rangle,\ \frac{\partial\left\langle \vec{E}_{\text{мікр}}(\vec{r},t)\right\rangle}{\partial t}=\left\langle \frac{\partial\vec{E}_{\text{мікр}}(\vec{r},t)}{\partial t}\right\rangle$$

і т.д. (7.1.2)

Після усереднення система рівнянь (1.1.2) – (4.1.2) набуває такого вигляду:

$$\operatorname{rot}\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\left\langle \vec{j}_{\text{мікр}}\right\rangle+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \qquad (8.1.2)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \qquad (9.1.2)$$

$$\operatorname{div}\vec{E}=4\pi\left\langle \rho_{\text{мікр}}\right\rangle . \qquad (10.1.2)$$

$$\operatorname{div}\vec{B}=0 . \qquad (11.1.2)$$

Отже, середні (макроскопічні) значення напруженості електричного поля і магнітної індукції визначаються через середні значення густини заряду і густини струму.

Під впливом електромагнітного поля в середовищі відбуваються певні зміни, заряди зміщуються, змінюється рух зарядів. Це означає, що в загальному випадку середні значення густини заряду $\left\langle \rho_{\text{мікр}}\right\rangle$ і густини струму $\left\langle \vec{j}_{\text{мікр}}\right\rangle$ залежать від електричного поля. Тому система рівнянь макроскопічної електродина-

міки у вигляді (8.1.2) – (11.1.2) досить незручна. Тому доцільно звести цю систему до такого вигляду, в якому будуть об'єднані всі величини, які залежать від полів і не залежать від них.

З макроскопічної точки зору середню густину заряду зручно розділити на дві частини

$$\left\langle \rho_{\text{мікр}} \right\rangle = \rho_{\text{в}} + \rho_{\text{зв}}, \qquad (12.1.2)$$

де $\rho_{\text{в}}$ – густина вільних зарядів, $\rho_{\text{зв}}$ – густина зв'язаних зарядів. До вільних зарядів відносять заряди, які нанесені зовні на діелектрик і порушують його нейтральність. До вільних зарядів відносять також заряди, які можуть зміщуватись на макроскопічні відстані (електрони в металах, іони в електролітах і газах). Зв'язаними називають заряди, що належать атомам і молекулам, а також іони, які входять до складу діелектриків і не можуть зміщуватись на макроскопічні відстані. У неполяризованому середовищі зв'язаних зарядів немає, оскільки в будь-якому макроскопічному об'ємі незарядженого діелектрика повні заряди негативно та позитивно заряджених частинок однакові й компенсуються. В електричному полі середовище поляризується. При цьому іони зміщуються зі своїх положень рівноваги; у діелектриках, які складаються з нейтральних (атомів або молекул), відбувається перерозподіл зарядів у цих частинках, їх заряди протилежного знаку зміщуються в різні сторони.

Розглянемо докладніше процес утворення зв'язаних зарядів. Обчислимо кількість зарядів, які проходять через довільну елементарну поверхню dS при поляризації діелектрика. Через площадку пройдуть ті заряди, відстань яких від площадки менша, ніж зміщення цих зарядів при поляризації в напрямі площадки. Нехай заряди певного k-го сорту, в яких заряд однієї частинки e_{k}, зміщуються при поляризації на величину $\delta\vec{r}_k$. Через одиницю площі пройдуть ті заряди, які містяться в об'ємі $\delta V_k = \delta\vec{r}_k \cdot \vec{n}$, де $\vec{n}$ – нормаль до площадки. Якщо концентрація частинок цього сорту N_k, то вони перенесуть через одиницю площадки заряд $\delta q_k = e_k N_k \delta V_k$, а через усю площадку dS заряд $\delta Q_k = \delta q_k dS$. Щоб знайти повний заряд, який пройде через площадку dS при поляризації діелектрика, треба врахувати вне-

ски від частинок усіх сортів:

$$de_{зв} = \sum_k e_k N_k \delta\vec{r}_k \cdot d\vec{S} = \vec{P} \cdot d\vec{S} \,, \qquad (13.1.2)$$

де вектор $\vec{P} = \sum_k e_k N_k \delta\vec{r}_k$ називається *дипольним моментом одиниці об'єму* діелектрика, або вектором поляризації.

За законом збереження заряду кількість зарядів, які утворюються в об'ємі, дорівнює за абсолютною величиною кількості зарядів, що вийшли через поверхню (див. рис. 1.1.2).

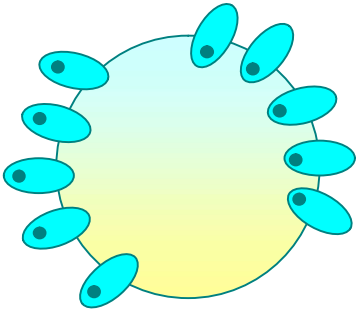


Рис. 1.1.2. Внаслідок просторової зміни поляризації може виявитися, що молекулярний заряд, що вийшов із даного об'єму, більше заряду, що зайшов у цей об'єм.

Отже, використовуючи формулу (13.1.2), напишемо таку рівність:

$$\int \rho_{зв} dV = -\oint \vec{P} \cdot d\vec{S} \,. \qquad (14.1.2)$$

Якщо заряди виходять із об'єму, то заряд усередині об'єму зменшується. Тому у формулі (14.1.2) стоїть знак мінус. Скориставшись теоремою Остроградського – Гауса (18.1.1), вираз (14.1.2) перепишемо у такому вигляді:

$$\int \rho_{зв} dV = -\int \operatorname{div} \vec{P} dV \,. \qquad (15.1.2)$$

Внаслідок довільності об'єму інтегрування у рівності (15.1.2), дістанемо шуканий зв'язок між густиною зв'язаних зарядів і вектором поляризації:

$$\rho_{зв} = -\operatorname{div}\vec{P}\,. \qquad (16.1.2)$$

З цього співвідношення випливає, що зв'язані заряди виникають тоді, коли діелектрик поляризований нерівномірно.

Підставивши густину зв'язаних зарядів (16.1.2) у формулу (12.1.2), а потім середню густину заряду в рівняння (10.1.2), одержуємо

$$\operatorname{div}\left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right) = 4\pi\rho_{в}\,, \qquad (17.1.2)$$

де вектор $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ називатимемо вектором електричної індукції. Тоді рівняння (17.1.2) перепишемо так:

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho_{в}\,. \qquad (18.1.2)$$

Інтегруючи ліву і праву частину рівняння (18.1.2) за довільним об'ємом і користуючись теоремою Остроградського – Гауса (18.1.1), дістанемо таке інтегральне співвідношення:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = 4\pi\int \rho_{в} dV\,. \qquad (19.1.2)$$

Отже, потік вектору електричної індукції через замкнену поверхню дорівнює величині вільних зарядів, які перебувають усередині замкненої поверхні.

Зазначимо, що основною характеристикою електричного поля є його напруженість. Вектор електричної індукції є допоміжною величиною.

Дослідимо тепер середнє значення густини мікроскопічного струму $\left\langle \vec{j}_{мікр} \right\rangle$. Струм – це рух зарядів. Проте рух зарядів може мати різну природу. Розіб'ємо мікроскопічний струм на три частини.

1) Струм провідності. Його утворюють заряди, які можуть зміщуватись на макроскопічні відстані. Позначимо густину цього струму через $\vec{j}_{пр}$.

2) Поляризаційний струм. Перерозподіл зарядів супроводжується струмом, який називається поляризаційним. Густина поляризаційного струму $\vec{j}_P$ частинок усіх сортів записується так:

$$\vec{j}_P = \sum\nolimits_k e_k N_k \vec{v}_k = \frac{\partial}{\partial t}\sum\nolimits_k e_k N_k \delta\vec{r}_k\,. \qquad (20.1.2)$$

Враховуючи, що $\vec{P} = \sum_k e_k N_k \delta\vec{r}_k$, формулу (20.1.2) переписуємо у такому вигляді:

$$\vec{j}_P = \partial\vec{P}/\partial t \,. \qquad (21.1.2)$$

У випадку статичної поляризації вектор $\vec{P}$ не залежить від часу і струму поляризації не буде.

3) Струм намагнічення. Молекулярний струм створює власне магнітне поле, яке змінює зовнішнє поле. Обчислимо струм, зумовлений рухом електронів в атомах, через площадку, розміри якої перевищують розміри атомів (див. рис. 2.1.2).

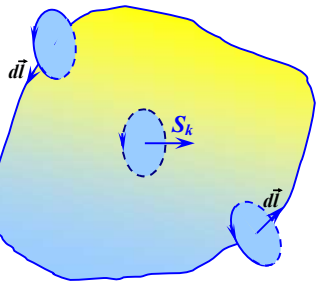


Рис. 2.1.2. Окремі струми орієнтовані неоднаково і можуть мати різні сили.

Макроскопічні розміри площадки означають, що обчислюється середнє значення струму. Внесок дають атоми, які розташовані поблизу межі площадки і перетинаються контуром, що її обмежує. Атом, що цілком перетинається площадкою, не дає внеску в силу струму через цю площадку. Відрізок контуру dl перетинає атоми, які містяться в об'ємі $dV_k = d\vec{l} \cdot \vec{S}_k$, де $\vec{S}_k$ – вектор, який за абсолютною величиною дорівнює площі поверхні, обмеженої колом струму атома k-го сорту (під сортом розумітимемо атоми з різною орієнтацією) і спрямований уздовж нормалі до цієї поверхні. Якщо концентрація таких атомів – N_k ,

а сила струму в них – I_k, то вони створюють через площадку струм із силою $N_k I_k dV_k$. Загальний струм від атомів усіх сортів, які перетинаються елементом $d\vec{l}$, дорівнює

$$dI = \sum_k N_k I_k d\vec{l} \cdot \vec{S}_k = c\vec{M} \cdot d\vec{l} \ , \qquad (22.1.2)$$

де вектор $\vec{M} = \frac{1}{c}\sum_k I_k N_k \vec{S}_k$ називається *магнітним моментом одиниці об'єму*, або вектором намагнічення. Вектор $\vec{m}_k = \frac{1}{c} I_k \vec{S}_k$ називається магнітним моментом окремого кола з силою струму I_k і площею (обмеженою колом) S_k.

Коли магнітного поля немає, то атоми або не мають магнітних моментів, або моменти окремих атомів орієнтовані хаотично. Тому магнітний момент одиниці об'єму дорівнює нулю. У магнітному полі струми в атомах орієнтуються, магнітні моменти окремих атомів уже не компенсуються і з'являється вектор намагнічення. Зазначимо, що у феромагнетиків орієнтація магнітних моментів може відбуватись і за відсутності магнітного поля.

Отже, намагніченість середовища можна характеризувати і струмами намагнічення, і вектором намагнічення.

$$I_{\text{м}} = \int \vec{j}_{\text{м}} \cdot d\vec{S} = c \oint \vec{M} \cdot d\vec{l} \ . \qquad (23.1.2)$$

Перейдемо у цій формулі від інтеграла по замкненому контуру до інтеграла по поверхні

$$\int \vec{j}_{\text{м}} \cdot d\vec{S} = c \int \operatorname{rot} \vec{M} \cdot d\vec{S} \ . \qquad (24.1.2)$$

Ця формула справедлива для будь-якої поверхні всередині тіла. Тому ми повинні покласти

$$\vec{j}_{\text{м}} = c \operatorname{rot} \vec{M} \ . \qquad (25.1.2)$$

При однорідному намагніченні середовища $\vec{M} = \text{const}$, і тому $\vec{j}_{\text{м}} = 0$.

Отже, усереднений мікроскопічний струм можна розділити на три частини: струм провідності, струм поляризації і струм намагнічення

$$\left\langle \vec{j}_{\text{мікр}} \right\rangle = \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + c\,\text{rot}\,\vec{M}\ . \qquad (26.1.2)$$

Підставляючи формулу (26.1.2) у рівняння (8.1.2), приходимо до такої рівності:

$$\text{rot}\left(\vec{B} - 4\pi\vec{M}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E} + 4\pi\vec{P}\right). \qquad (27.1.2)$$

Вводячи вектор напруженості магнітного поля $\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$, а також враховуючи індукцію електричного поля $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, рівність (27.1.2) переписуємо у такому вигляді:

$$\text{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\ . \qquad (28.1.2)$$

Отже, ми дістали ще одне рівняння Максвелла. В інтегральному вигляді воно записується так:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}_{\text{пр}}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\ . \qquad (29.1.2)$$

Очевидною характеристикою магнітного поля є його індукція, яка створюється рухом усіх зарядів незалежно від природи зарядів.

Граничні умови знаходять з рівнянь Максвелла в інтегральній формі, які справедливі для всіх випадків, оскільки вони є безпосереднім результатом узагальнення дослідних даних. Напишемо систему рівнянь Максвелла для матеріального середовища в інтегральній формі:

$$\oint H_l dl = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}_{\text{пр}}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\ , \qquad (30.1.2)$$

$$\oint E_l dl = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\ , \qquad (31.1.2)$$

$$\oint D_n dS = 4\pi\int \rho_{\text{в}} dV\ , \qquad (32.1.2)$$

$$\oint B_n dS = 0\ . \qquad (33.1.2)$$

Спочатку визначимо зв'язок між значеннями вектору електричної індукції в двох середовищах поблизу їх межі розділу (рис. 3.1.2). Для цього використаємо співвідношення (32.1.2). Нехай поверхня розділу має вигляд циліндра, твірна якого пер-

пендикулярна до поверхні розділу двох середовищ. Одна частина циліндра міститься в середовищі 1, друга – в середовищі 2. Основи циліндра мають малі розміри, тобто можна вважати, що в їх межах вектор електричної індукції є сталим.

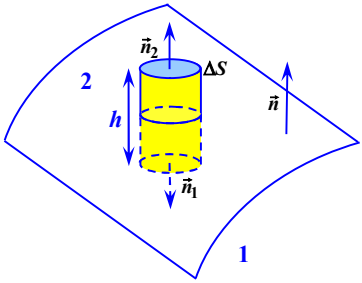


Рис. 3.1.2. Допоміжна ілюстрація для встановлення зв'язку між значеннями вектора електричної індукції в двох середовищах.

За такого вибору замкненої поверхні рівняння (32.1.2) можна переписати так:

$$D_{1n_1}\Delta S + D_{2n_2}\Delta S + N' = 4\pi\overline{\rho}_{\text{в}}\Delta S h\,, \qquad (34.1.2)$$

де ΔS – площа основ циліндра, h – висота циліндра, D_{1n_1} і D_{2n_2} – проекції вектору електронної індукції на нормаль до основ циліндра відповідно в першому і другому середовищах, $\overline{\rho}_{\text{в}}$ – середнє значення густини заряду в об'ємі, N' – потік вектору електричної індукції через бічну поверхню. Для знаходження зв'язку між D_{1n_1} і D_{2n_2} спрямуємо висоту h до нуля. Очевидно, що у цьому випадку $N' \to 0$, а добуток $\overline{\rho}_{\text{в}}h$ може бути скінченим:

$$\lim_{h\to 0}\overline{\rho}_{\text{в}}h = \Delta q_{\text{в}}h/\Delta V = \Delta q_{\text{в}}h/\Delta S h = \Delta q_{\text{в}}/\Delta S = \sigma_{\text{в}}\,, \qquad (35.1.2)$$

де $\sigma_{\text{в}}$ – поверхнева густина вільних зарядів. Нехай нормаль до поверхні напрямлена із середовища 1 в середовище 2. Тоді $\vec{n} = \vec{n}_2 = -\vec{n}_1$, а рівняння (34.1.2) зводиться до такого вигляду:

$$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot\vec{n} = 4\pi\sigma_{\text{в}}\,, \qquad (36.1.2)$$

Отже, на межі розділення двох середовищ нормальна складова електричної індукції дістає стрибок. Щоб знайти поведінку напруженості електричного поля на межі розділу, скористаємось у співвідношенні (36.1.2) формулою $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$:

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\left(\sigma_{\text{в}} - P_{2n} + P_{1n}\right), \qquad (37.1.2)$$

де $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_2$ – вектори поляризації відповідно в першому і другому середовищах. Із (37.1.2) випливає, що густина поверхневих зв'язаних (наведених) зарядів $\sigma_{\text{зв}}$ визначається за формулою

$$\sigma_{\text{зв}} = P_n\,, \qquad (38.1.2)$$

де P_n – проекція дипольного моменту одиниці об'єму на нормаль до цієї поверхні, заряд якої обчислюємо.

Поведінку тангенціальної складової напруженості електричного поля дістанемо за використанням закону електромагнітної індукції (31.1.2). Замкнений контур проведемо у вигляді прямокутника, дві сторони якого перпендикулярні до поверхні розділу, а дві інші є паралельними до цієї поверхні (рис. 4.1.2).

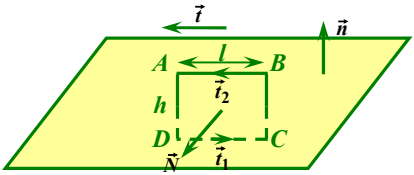


Рис. 4.1.2. Використання замкненого контуру для одержання граничної умови $E_{1t} = E_{2t}$.

Нехай розміри прямокутника настільки малі, що напруженість електричного поля на сторонах AB і CD можна вважати незмінною. За таких умов для цього контуру рівняння (31.1.2) напишемо так:

$$E_{2t_2}l + E_{1t_1}l + L' = -\frac{1}{c}\overline{\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)}_N lh\,, \qquad (39.1.2)$$

де l і h – розміри прямокутника, $\overline{\left(\partial\vec{B}/\partial t\right)}_N$ – середнє значення похідної магнітної індукції за часом на площадці, обмеженій контуром, $\vec{N}$ – нормаль до прямокутника – вектор, паралельний поверхні розділу, $\vec{t}_1$ і $\vec{t}_2$ – одиничні вектори вздовж дотичних до контуру в першому і другому середовищах, L' – внесок у циркуляцію від сторін BC і DA. При $h \to 0$ $L' \to 0$ і рівняння (39.1.2) набуває вигляду

$$E_{1t} = E_{2t}, \qquad (40.1.2)$$

де $\vec{t} = \vec{t}_2 = -\vec{t}_1$. Отже, тангенціальна складова напруженості електричного поля на межі розділу двох середовищ є неперервною величиною.

Граничні умови для нормальної складової вектору магнітної індукції можна визначити з рівняння (33.1.2) так само, як ми визначили граничні умови для вектору $\vec{D}$ з рівняння (32.1.2). Оскільки магнітних зарядів не існує, то шукана гранична умова повинна мати такий вигляд:

$$B_{1n} = B_{2n}. \qquad (41.1.2)$$

Поведінка тангенціальної складової напруженості магнітного поля випливає з інтегрального закону (40.1.2). Співвідношення (40.1.2) подібне до вже дослідженого рівняння (41.1.2) і відрізняється від останнього тільки доданком зі струмом. Повторюючи викладки, подібні до тих, які привели до формули (39.1.2), можна знайти

$$H_{2t_2} l + H_{1t_1} l + L' = \frac{1}{c}\overline{\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)}_N lh + \frac{4\pi}{c}\bar{j}_{\text{пр}\,N} lh. \qquad (42.1.2)$$

Позначення для параметрів контуру такі самі, як і в співвідношенні (39.1.2). Навіть у випадку $h \to 0$ другий доданок у правій частині рівняння може залишатися скінченим, якщо в системі існують так звані поверхневі струми. У деяких системах густина струму може бути відмінною від нуля лише в тонкому шарі на поверхні провідника. Якщо нехтувати товщиною цього шару, то можна вважати, що струм тече по поверхні. Такий струм називається *поверхневим*. Густина поверхневого струму дорівнює заряду, що протікає в одиницю часу через одиницю довжини

поверхні, перпендикулярної до напрямку струму. Позначимо густину поверхневого струму $i_{\text{пр}}$:

$$i_{\text{пр}} = \frac{I}{l} = \frac{\overline{j}_{\text{пр}} hl}{l} = \underset{h\to 0}{\overline{j}_{\text{пр}}} h\,, \tag{43.1.2}$$

де I – сила струму, який протікає через ділянку поверхні довжиною l. Отже, поклавши в рівнянні (42.1.2) $h \to 0$ та враховуючи (43.1.2), дістанемо

$$H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i_{\text{пр}\,N}\,, \tag{44.1.2}$$

де $i_{\text{пр}\,N}$ – проекція густини поверхневого струму на нормаль до площадки $ABCD$. Вектори $\vec{t}$, $\vec{N}$ і $\vec{n}$ є взаємно перпендикулярними. Тому ми можемо написати

$$H_t = \vec{H}\cdot\vec{t} = \vec{H}\cdot\left[\vec{N},\vec{n}\right] = \vec{N}\cdot\left[\vec{n},\vec{H}\right]. \tag{45.1.2}$$

Ураховуючи це співвідношення, граничну умову (44.1.2) можна переписати так:

$$\vec{N}\cdot\left[\vec{n},\vec{H}_2\right] - \vec{N}\cdot\left[\vec{n},\vec{H}_1\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{N}\cdot\vec{i}_{\text{пр}}\,. \tag{46.1.2}$$

Це рівняння повинно виконуватись для довільного напрямку $\vec{N}$ у площині розділення. Тому вектор $\vec{N}$ можна опустити

$$\left[\vec{n},\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}_{\text{пр}}\,. \tag{47.1.2}$$

Отже, тангенціальна складова напруженості магнітного поля на межі розділу двох середовищ змінюється стрибком, якщо існує поверхневий струм. Наприклад, нехай струм проходить по площині, напрямленій усередину сторінки (див. рис. 5.1.2). Розіб'ємо струм на суму лінійних струмів. Навколо кожного лінійного струму створюється магнітне поле, силові лінії якого мають форму кіл. У напрямку, перпендикулярному до площини розділу, магнітні поля різних лінійних струмів взаємно компенсуються, внаслідок чого створюється поле, яке з різних боків площини має протилежні напрямки і однакову величину. Таким чином, напруженість магнітного поля змінюється стрибком при переході через площину із струмом.

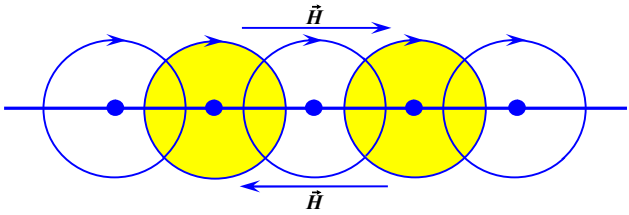


Рис. 5.1.2. Ілюстрація зміни магнітного поля стрибком на межі розділу двох середовищ.

На завершення наведемо табл. 3 із системою макроскопічних рівнянь Максвелла в інтегральній та диференціальній формах у системі одиниць СГС та граничні умови, які одержані з рівнянь Максвелла в інтегральній формі.

Табл. 1.1.2. Макроскопічні рівняння Максвелла в системі одиниць СГС та граничні умови.

Інтегральна форма	Диференціальна форма	Граничні умови
$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int \vec{j}_{\text{пр}} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\text{rot}\, \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\left[\vec{n}, \vec{H}_2 - \vec{H}_1\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}_{\text{пр}}$
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c}\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\text{rot}\, \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$E_{1t} = E_{2t}$
$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi\int \rho_{\text{в}} dV$	$\text{div}\, \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{в}}$	$\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} =$ $\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) \cdot \vec{n} = 4$
$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\text{div}\, \vec{B} = 0$	$B_{1n} = B_{2n}$

1.3. Закони збереження заряду та енергії

Закон збереження заряду є одним із фундаментальних законів фізики. Рівняння Максвелла, в які входить заряд, повинні бути сумісними з цим законом. Для перевірки цього застосуємо операцію дивергенції до лівої та правої частин рівняння (28.1.2). Оскільки $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$, то маємо

$$4\pi \operatorname{div} \vec{j}_{\text{пр}} + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 . \qquad (1.1.3)$$

Користуючись рівнянням Максвелла (18.1.2), одержуємо

$$\frac{\partial \rho_{\text{в}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_{\text{пр}} = 0 . \qquad (2.1.3)$$

Цей вираз є законом збереження заряду в диференціальній формі. Щоб упевнитися в цьому, зведемо рівняння (2.1.3) до інтегрального вигляду, інтегруючи його за довільним об'ємом:

$$\frac{d}{dt}\int \rho_{\text{в}} dV = -\oint \vec{j}_{\text{пр}} \cdot d\vec{f} , \qquad (3.1.3)$$

де інтегрування в правій частині співвідношення (3.1.3) проходить по поверхні, яка охоплює виділений об'єм.

У співвідношенні (3.1.3) ліворуч стоїть кількість зарядів, що змінюються в об'ємі за одиницю часу, праворуч – кількість зарядів, що виходять за одиницю часу через поверхню, яка обмежує об'єм. Рівність цих двох величин і є законом збереження заряду. Знак мінус у формулі (3.1.3) відображає той факт, що коли заряди виходять із об'єму, їх кількість в об'ємі зменшується і похідні за часом є від'ємною величиною.

Обчислимо тепер роботу, яку виконує електричне поле, зміщуючи заряди. Нехай у провіднику рухаються заряди зі швидкістю $\vec{v}$, густина цих зарядів ρ. Сила, що діє з боку електричного поля на одиницю об'єму, дорівнює $\rho\vec{E}$. Тоді робота, виконана полем по переміщенню зарядів за одиницю часу (потужність), дорівнює

$$A = \rho\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} , \qquad (4.1.3)$$

а робота, виконана за одиницю часу в усьому провіднику, визначається інтегралом

$$\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV \,. \qquad (5.1.3)$$

Енергія електромагнітного поля повинна зменшуватись за одиницю часу на величину роботи, виконаної за одиницю часу в усьому провіднику, тобто на величину (5.1.3). При цьому вона переходить в інші види енергії: теплову або магнітну. Сила з боку магнітного поля напрямлена перпендикулярно до швидкості рухомого заряду, тому вона роботи не виконує.

Знайдемо кількісний вираз закону збереження енергії для електромагнітних явищ. Електромагнітні явища описуються рівняннями Максвелла і тому закон збереження енергії повинен міститися у цих рівняннях. Утворюючи скалярний добуток рівняння (28.1.2) з вектором $\vec{E}$, а рівняння (9.1.2) відповідно з вектором $\vec{H}$, а потім віднімаючи від другого знайденого виразу перший, одержуємо

$$\vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{пр}} \cdot \vec{E} \,. \quad (6.1.3)$$

Скориставшись тотожністю із векторного аналізу $\operatorname{div}\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{H}$, рівність (6.1.3) переписуємо у вигляді

$$\operatorname{div}\left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = -\frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{пр}} \cdot \vec{E} \,. \qquad (7.1.3)$$

Нехай $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$. У цьому випадку рівняння (7.1.3) після нескладних перетворень можемо переписати так:

$$\vec{j}_{\text{пр}} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial w}{\partial t} - \operatorname{div} \vec{S} \,, \qquad (8.1.3)$$

де запроваджені позначення

$$w = \frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2 \right), \qquad (9.1.3)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \left(\vec{E} \times \vec{H} \right). \qquad (10.1.3)$$

Рівняння (9.1.3) є диференціальним виразом закону збереження енергії для електромагнітних явищ. Інтегруючи це рівняння за деяким об’ємом, зводимо його до інтегрального вигляду

$$\int \vec{j}_{\text{пр}} \cdot \vec{E} dV = -\frac{d}{dt} \int w dV - \oint \vec{S} \cdot d\vec{f} \,, \qquad (11.1.3)$$

де ми скористались теоремою Остроградського – Гауса (18.1.1) при переході від інтегрування за об'ємом до інтегрування по замкненій поверхні, яка охоплює цей об'єм.

З'ясуємо фізичний зміст окремих доданків правої частини співвідношення (11.1.3). Припустимо спочатку, що фізична система, яка складається з електромагнітного поля і зарядів, є замкненою, тобто вона не може обмінюватись енергією з іншими системами, що містяться зовні виділеного об'єму. Це буває тоді, коли система не взаємодіє з іншими системами і на поверхні, яка обмежує вибраний об'єм, $\vec{E} = \vec{H} = 0$. За таких умов інтеграл по поверхні в правій частині співвідношення (11.1.3) дорівнює нулю і, отже, маємо

$$\int \vec{j}_{\text{пр}} \cdot \vec{E} dV = -\frac{d}{dt} \int w dV \,, \qquad (12.1.3)$$

де $\int w dV$ визначає енергію електромагнітного поля, а величина (9.1.3) тоді є густиною енергії електромагнітного поля, тобто енергією електромагнітного поля в одиниці об'єму простору.

Тепер припустимо, що розглядувана система не є замкненою. Проте в ній немає речовини, в якій електромагнітне поле може збуджувати струм. Поклавши в рівнянні (11.1.3) $\vec{j}_{\text{пр}} = 0$, дістанемо

$$\frac{d}{dt} \int w dV = -\oint \vec{S} \cdot d\vec{f} \,. \qquad (13.1.3)$$

Оскільки втрат енергії на переміщення зарядів у цьому випадку немає, то інтеграл по поверхні в правій частині повинен визначати енергію, що виходить з об'єму за одиницю часу. Тоді вектор $\vec{S}$ дорівнюватиме енергії, яка проходить за одиницю часу через одиничну поверхню, перпендикулярну до $\vec{f}$. Отже, за фізичним змістом $\vec{S}$ – це потік енергії електромагнітного поля. Цей вектор називається вектором Умова – Пойнтінга.

Зазначимо, що співвідношення (11.1.3) показує, що зміна енергії електромагнітного поля в деякому об'ємі дорівнює елек-

тромагнітній енергії, яка вийшла з цього об'єму, і роботі, виконаній електричним полем над зарядами.

1.4. Закони електростатичного поля

Записуємо систему рівнянь, які описують електростатичні явища, разом із граничними умовами.

$$\oint E_l dl = 0\,,\ \operatorname{rot}\vec{E} = 0\,, \tag{1.1.4}$$

$$\oint D_n dS = 4\pi\int \rho_{\text{в}} dV\,,\ \operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{в}}\,, \tag{2.1.4}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma_{\text{в}}\,, \tag{3.1.4}$$

$$E_{2t} = E_{1t}\,. \tag{4.1.4}$$

Добуток $E_l dl$ дорівнює роботі, яку виконує електричне поле при переміщенні одиничного заряду на відрізок dl, а інтеграл в (1.1.4) описує роботу, яку виконує електричне поле при переміщенні одиничного заряду по замкненому контуру. Ця роботі дорівнює нулю. **Векторні поля, які задовольняють таку умову, називаються *потенціальними* (*безвихровими*, що випливає із рівняння** $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$). Оскільки $\operatorname{rot}\operatorname{grad} = 0$, то вектор $\vec{E}$ можна записати наступним чином:

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = -\nabla\varphi\left(\vec{r}\right) = -\left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi\left(\vec{r}\right). \tag{5.1.4}$$

Тоді робота A електричних сил при переміщенні заряду e уздовж деякого контуру l із точки 1 в точку 2 буде такою:

$$A = e\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = -e\int_1^2 \nabla\varphi\cdot d\vec{l} = -e\int_1^2 d\varphi = e\left(\varphi_1 - \varphi_2\right). \tag{6.1.4}$$

Із рівності (6.1.4) випливає, що робота електричних сил не залежить від шляху переміщення заряду, а визначається тільки різницею потенціалів початкової і кінцевої точок.

Одержимо тепер рівняння для електростатичного потенціалу φ, вважаючи, що зв'язок між $\vec{D}$ і $\vec{E}$ визначається формулою $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ (ізотропне середовище). Тому друге рівняння в (2.1.4) можна записати так:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \varepsilon \operatorname{div}\vec{E} + \vec{E}\cdot\nabla\varepsilon = 4\pi\rho_{в}. \qquad (7.1.4)$$

Підставляючи сюди співвідношення (5.1.4), одержуємо

$$\Delta\varphi + \frac{\nabla\varphi\cdot\nabla\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{4\pi\rho_{в}}{\varepsilon}, \qquad (8.1.4)$$

де оператор Лапласа в декартовій системі координат визначається так:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для однозначного розв'язку рівняння (8.1.4) треба додати граничні умови. Записані для потенціалу, граничні умови (3.1.4) і (4.1.4) мають вигляд

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_2, \qquad (9.1.4)$$

$$\varepsilon_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 - \varepsilon_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 = 4\pi\sigma_{в}, \qquad (10.1.4)$$

де через $\partial/\partial t$ і $\partial/\partial n$ позначено похідні відповідно по поверхні розділу середовищ і по нормалі до неї.

В однорідному середовищі діелектрична проникність ε не залежить від координат і рівняння (9.1.4) набуває такого вигляду:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_{в}/\varepsilon. \qquad (11.1.4)$$

Рівняння типу (11.1.4) називається *рівнянням Пуассона.* В окремому випадку, коли зарядів немає ($\rho_{в} = 0$), рівняння (11.1.4) записується так:

$$\Delta\varphi = 0. \qquad (12.1.4)$$

Рівняння (12.1.4) називається *рівнянням Лапласа.*

У вакуумі $\varepsilon = 1$. Отже, рівняння (11.1.4) і граничні умови (9.1.4) і (10.1.4) мають такий вигляд:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_{в}, \qquad (13.1.4)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_2, \qquad (14.1.4)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 = 4\pi\sigma_{\text{в}}. \qquad (15.1.4)$$

Для знаходження розв'язків рівняння Пуассона нагадаємо, що для точкового заряду e, який знаходиться в початку координат $\left(\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r})\right)$ напруженість електричного поля (і потенціал) у відповідності з законом Кулона записуються у вигляді

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e\vec{r}}{r^3} \quad \rightarrow \quad \varphi(\vec{r}) = \frac{e}{r}. \qquad (16.1.4)$$

Отже, можна одержати наступну тотожність, якщо скористатись $\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r})$ і $\varphi(\vec{r}) = e/r$:

$$\Delta(1/r) = -4\pi\delta(\vec{r}). \qquad (17.1.4)$$

Зупинимось на поясненні густини точкового заряду (під точковим зарядом розуміють заряд, який розташований у точці), яка входить у вираз (17.1.4). Для такого точкового заряду у формулі для густини заряду $\rho(\vec{r}) = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$ беремо $\Delta q = q$, якщо заряд міститься в об'ємі ΔV, і $\Delta q = 0$ у випадку, коли заряд міститься зовні цього об'єму. Звідси випливає, що густина точкового заряду дорівнює нулю в усіх точках, крім однієї, яка збігається з місцем розташування заряду, де густина його нескінченно велика. Густина точкового заряду описується за допомогою δ-функції, введеної Діраком. Одновимірна δ-функція визначається так:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases} \qquad (19.1.4)$$

Крім того,

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 1, \qquad (20.1.4)$$

якщо інтервал (a,b) містить точку $x = 0$, і

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 0, \qquad (21.1.4)$$

якщо інтервал (a,b) не містить точки $x = 0$.

У математиці δ-функція належить до класу узагальнених фу-

нкцій. δ-функцію можна розглядати як границю, до якої прямує функція з гострим максимумом, коли її ширина зменшується, а висота зростає так, що площа під кривою залишається незмінною. Одним із таких зображень δ-функції є функція

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ikx)dk=\frac{1}{2\pi}\lim_{K\to\infty}\int_{-K}^{K}\exp(ikx)dk=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\frac{\sin Kx}{x}. \qquad (22.1.4)$$

Функція $f_K(x)=\sin Kx/\pi x$ має гострий максимум, що дорівнює K/π при $x=0$. Якщо $K\to\infty$, то величина цього максимуму збільшується, а положення побічних максимумів наближаються до головного (рис. 1.1.4).

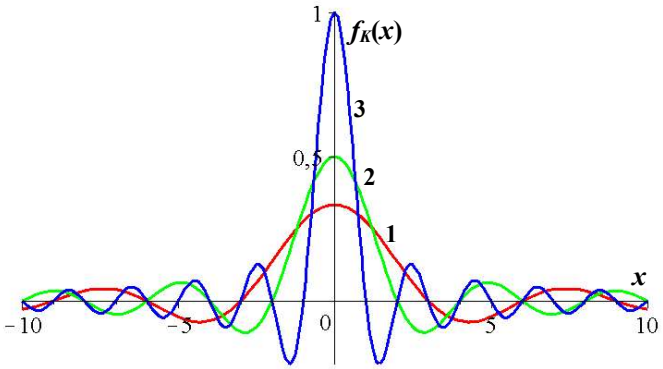


Рис. 12. Графіки функції $f_K(x)=\sin Kx/\pi x$ для $K=\pi/3$ (крива 1), $K=\pi/2$ (крива 2) і $K=\pi$ (крива 3).

Крім того, оскільки

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Kx}{x}dx=1, \qquad (23.1.4)$$

то функція (21.1.4) задовольняє умову нормування δ-функції (19.1.4). Отже, функція (21.1.4) задовольняє умови, накладені на δ-функцію (18.1.4), (19.1.4), тобто є одним із зображень δ-функції.

При інтегруванні добутку δ-функції і якоїсь неперервної функції внесок в інтеграл дає тільки та область, в якій δ-функція має максимум (наприклад, в точці $x = c$, яка входить у цю область). Тому ми можемо винести з-під інтеграла значення неперервної функції в цій точці. Отже, виконується така рівність:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx = f(c), \qquad (24.1.4)$$

якщо $a < c < b$, і

$$\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx = 0, \qquad (25.1.4)$$

якщо точка $x = c$ розміщена зовні інтервалу (a,b).

Для тривимірного простору визначимо δ-функцію так:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \qquad (26.1.4)$$

Користуючись зображенням δ-функції в одновимірному просторі, можна записати її в тривимірному просторі:

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ik_x x)dk_x\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ik_y y)dk_y\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ik_z z)dk_z =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})d\vec{k}, \qquad (27.1.4)$$

де $d\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$.

Порівнюючи поведінку густини точкового заряду і властивості δ-функції, можна написати для заряду, розташованого в початку координат, таке співвідношення:

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}). \qquad (28.1.4)$$

Множник q поставлено перед δ-функцією з тих міркувань, щоб повний заряд системи дорівнював q.

$$\int\rho(\vec{r})dV = q\int\delta(\vec{r})dV = q. \qquad (29.1.4)$$

1.5. Закони магнітостатичного поля

До магнітостатичних належать явища, в яких електричне і магнітне поля не залежать від часу і існує електричний струм.

Поклавши в рівняннях Максвелла похідні за часом рівними нулю, дістанемо

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{пр}}, \tag{1.1.5}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0, \tag{2.1.5}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = 0, \tag{3.1.5}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\rho_{\text{в}}. \tag{4.1.5}$$

Отже, як і у випадку електростатичних явищ, рівняння Максвелла і в цьому разі розбиваються на дві системи: для електричного і магнітного полів. Проте у випадку магнітостатичних явищ ці дві системи вже не є незалежними, оскільки струм, зумовлений електричним полем, створює магнітне поле. Але якщо струм заданий, то системи рівнянь (1.1.5), (2.1.5) разом із граничними умовами і залежністю $\vec{B}\left(\vec{H}\right)$ цілком достатньо для визначення магнітного поля.

Основними рівняннями магнітостатики є рівняння (1.1.5), (2.1.5) з такими граничними умовами:

$$B_{1n} = B_{2n}, \tag{5.1.5}$$

$$\left[\vec{n}, \vec{H}_{2t} - \vec{H}_{1t}\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{i}_{\text{пр}}. \tag{6.1.5}$$

У провіднику електричне поле збуджує струм. Густина струму зв'язана з напруженістю електричного поля законом Ома, який записуємо так:

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma\vec{E}, \tag{7.1.5}$$

де коефіцієнт σ називається провідністю середовища.

Струм, створений таким потенціальним електричним полем, не може бути постійним.

$$\oint \frac{\vec{j}_{\text{пр}} \cdot d\vec{l}}{\sigma} = I\oint \frac{dl}{\sigma S} = IR = \oint E_l dl, \tag{8.1.5}$$

де $R = \oint \frac{dl}{\sigma S}$ – опір провідника, I – сила струму в електричному колі. Для потенціальних полів $\oint E_l dl = 0$ і тому

$$IR = 0\,, \tag{9.1.5}$$

тобто $I = 0$. Отже, потенціальні поля не утворюють постійного струму.

Якщо в системі існують струми, утворені і електричним полем, і непотенціальними полями, закон Ома набуває такого вигляду:

$$\vec{j}_{\text{пр}} = \sigma\vec{E} + \vec{j}_{\text{непот}}\,. \tag{10.1.5}$$

Поділивши співвідношення (135) на σ та інтегруючи за контуром, дістанемо

$$IR = \mathcal{E}\,, \tag{11.1.5}$$

де величина $\mathcal{E} = \oint \dfrac{\vec{j}_{\text{пр}} \cdot d\vec{l}}{\sigma}$ називається *електрорушійною силою електричного кола.*

Оскільки $\partial\rho_{\text{в}}/\partial t = 0$, то із рівняння неперервності випливає така умова стаціонарності струмів:

$$\operatorname{div}\vec{j}_{\text{пр}} = 0\,. \tag{12.1.5}$$

Співвідношення (12.1.5) можна одержати і з рівняння $\operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{пр}}$ (закон Ампера), застосовуючи до обох його частин операцію дивергенції.

Таким чином, стале магнітне поле створюється стаціонарною, але не статичною системою зарядів.

При розподілі магнітних полів від симетричних розподілів струмів корисною є така інтегральна форма рівняння $\operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{пр}}$:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{j}_{\text{пр}} \cdot d\vec{S}\,, \tag{13.1.5}$$

де L – контур, на який спирається поверхня S, а інтеграл у правій частині (13.1.5) являє собою силу струму, що протікає через поверхню S.

Оскільки $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$, рівняння Максвелла $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ дозволяє представити $\vec{B}(\vec{r})$ так: $\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$.

Розділ 2

ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ

2.1. Векторні та скалярні потенціали

Замість того, щоб безпосередньо розв'язувати наступні рівняння Максвелла

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{пр}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1.2.1}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \tag{2.2.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_{\text{в}}, \tag{3.2.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{4.2.1}$$

і знаходити напруженості та індукції електричного і магнітного полів, можна звести задачу до визначення інших величин, рівняння для яких мають простіший вигляд і зв'язок з електромагнітним полем відомий.

Оскільки дивергенція ротора довільного вектора дорівнює нулю, рівняння (4.2.1), буде задовольнятися, якщо покласти

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r},t), \tag{5.2.1}$$

де $\vec{A}(\vec{r},t)$ – довільна векторна функція координат і часу. Якщо співвідношення (5.2.1) підставити у рівняння Максвелла (2.2.1), то одержимо

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0. \tag{6.2.1}$$

Зважаючи на те, що $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) \equiv 0$ (проте існують виключення, коли ця тотожність не справджується), можемо записати

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\nabla\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}, \tag{7.2.1}$$

де $\varphi(\vec{r},t)$ – довільна скалярна функція. Величини $\vec{A}(\vec{r},t)$ і

$\varphi(\vec{r},t)$ необхідно визначати таким чином, щоб задовольнялись і рівняння Максвелла (1.2.1), (3.2.1). Підставляючи (5.2.1) і (7.2.1) в (1.2.1) і (3.2.1) та використовуючи тотожності $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) - \Delta\vec{A}(\vec{r})$ і $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) \equiv \Delta\varphi(\vec{r})$, одержимо

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}_{\text{пр}}, \qquad (8.2.1)$$

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_{\text{в}}. \qquad (9.2.1)$$

Зазначимо, що при одержанні рівнянь (8.2.1) і (9.2.1) були використані співвідношення $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ і $\vec{B} = \mu\vec{H}$, які справедливі в однорідних середовищах. Якщо зв'язати $\vec{A}(\vec{r},t)$ і $\varphi(\vec{r},t)$ співвідношенням

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \qquad (10.2.1)$$

то рівняння (8.2.1) і (9.2.1) перейдуть у **неоднорідні хвильові рівняння**, або **рівняння Даламбера**

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mu\vec{j}_{\text{пр}}, \qquad (11.2.1)$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_{\text{в}}. \qquad (12.2.1)$$

Очевидно, що у вакуумі, коли $\varepsilon = \mu = 1$, рівняння (11.2.1) і (12.2.1) перейдуть у наступні:

$$\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{пр}}, \qquad (13.2.1)$$

$$\Box\varphi = 4\pi\rho_{\text{в}}, \qquad (14.2.1)$$

де $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ – оператор Даламбера. Функції $\vec{A}(\vec{r},t)$ і $\varphi(\vec{r},t)$, за допомогою яких за використанням (5.2.1), (7.2.1) і співвідношень $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$ можна визначити всі векторні поля $\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{D}(\vec{r},t)$, $\vec{H}(\vec{r},t)$ і $\vec{B}(\vec{r},t)$, називаються *векторний*

потенціал і *скалярний потенціал* відповідно. Співвідношення (10.2.1), яке пов'язує потенціали $\vec{A}(\vec{r},t)$ і $\varphi(\vec{r},t)$, називається *умовою Лоренца.* Зазначимо, що вона узгоджується з рівнянням неперервності $\partial\rho_{в}/\partial t+\nabla\cdot\vec{j}_{пр}=0$. Для цього, беручи дивергенцію від обох частин рівняння (13.2.1) і виконуючи наступне диференціювання $\partial/c\partial t$ обох частин рівняння (14.2.1), а потім додаючи ці вирази, одержуємо:

$$\Box\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{4\pi}{c}\left(\operatorname{div}\vec{j}_{пр}+\frac{\partial\rho_{в}}{\partial t}\right). \qquad (15.2.1)$$

За умови Лоренца права частина рівняння (15.2.1) дорівнює нулю, тобто закон збереження заряду є необхідною умовою існування розв'язку. Навпаки, якщо цей закон виконується, то:

$$\Box\left(\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0. \qquad (16.2.1)$$

Співвідношення (16.2.1), якщо його розглядати як рівняння для $f=\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, само по собі не гарантує $f\equiv 0$, оскільки розв`язок рівняння:

$$\Box f=0 \qquad (17.2.1)$$

не є єдиним (воно має, наприклад, хвильові розв'язки). Але за умови відсутності зовнішнього випромінювання, коли розглядається обмежена система зарядів і струмів, рівняння (17.2.1) має тільки тривіальний розв'язок $f=0$. Ця ситуація відповідає запізнювальним розв'язкам рівнянь (13.2.1) і (14.2.1), які розглядаються далі.

Можна показати, що вирази (11.2.1), (12.2.1) (також і (13.2.1), (14.2.1)) і (10.2.1) не визначають потенціали однозначно. Дійсно, якщо додати до вектора $\vec{A}$ вектор $\nabla\chi$, де χ – довільна функція координат і часу, то $\vec{B}$ не зміниться, а якщо, крім того, φ замінити на $\varphi-\dot{\chi}/c$, то $\vec{E}$ також не зміниться. Іншими словами, $\vec{B}$ і $\vec{E}$ інваріантні щодо таких перетворень:

$$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\chi, \qquad (18.2.1a)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}. \qquad (18.2.1б)$$

Із умови Лоренца (10.2.1) і перетворень (18.2.1) одержимо

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \left(\Delta\chi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} \right) = 0. \qquad (19.2.1)$$

Очевидно, $\vec{A}'$ і φ' будуть задовольняти співвідношенню Лоренца, якщо на функцію χ накласти умову

$$\Delta\chi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \qquad (20.2.1)$$

Рівняння (18.2.1), які задовольняють умову (20.2.1), виражають так звані *калібрувальні перетворення.* Ці перетворення можна використовувати для спрощення запису векторів поля. Наприклад, в області з нульовою густиною заряду величина φ задовольняє однорідному хвильовому рівнянню

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \qquad (21.2.1)$$

Тоді величину χ можна вибрати так, щоб скалярний потенціал φ' став рівним нулю. У відповідності з (18.2.1б) і (20.2.1) для цього необхідно покласти

$$\chi = c\int \varphi dt. \qquad (22.2.1)$$

У цьому випадку електромагнітне поле можна знайти за допомогою одного лише векторного потенціалу (штрих над $\vec{A}$ знятий), а саме

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \qquad (23.2.1)$$

тоді як умова Лоренца (10.2.1) переходить у так звану **кулонівську калібрувальну умову:**

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0. \qquad (24.2.1)$$

Ця умова може бути виконана за допомогою підбору калібрувального перетворення. За умовою (24.2.1) із рівняння Максвелла $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho_{\text{в}}$ маємо рівняння Пуассона для потенціалу φ:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho_{в}, \qquad (25.2.1)$$

тобто рівняння, яке аналогічне рівнянню Пуассона в електростатиці.

Із рівняння Максвелла $\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пр} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ за використанням (5.2.1) і (7.2.1), а також тотожності $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}) \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) - \Delta\vec{A}(\vec{r})$ одержуємо:

$$\Box\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пр} - \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \qquad (26.2.1)$$

Для перевірки сумісності (25.2.1) з (26.2.1) обчислимо дивергенцію від обох частин рівняння (26.2.1) з урахуванням кулонівської калібрувальної умови (24.2.1):

$$\Box\operatorname{div}\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}_{пр} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi = \frac{4\pi}{c}\left(\operatorname{div}\vec{j}_{пр} + \frac{\partial\rho_{в}}{\partial t}\right), \qquad (27.2.1)$$

де підставлено $\Delta\varphi$ із (25.2.1). Знов рівняння неперервності – закон збереження заряду – виступає як необхідна умова існування розв'язку за заданої калібрувальної умови. Навпаки, якщо виконується рівняння неперервності, із (27.2.1) маємо $\Box\operatorname{div}\vec{A} = 0$ і за відповідних граничних умов дістаємо $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

Нарешті, розглянемо ще одну калібрувальну умову (Гамільтона)

$$\varphi = 0. \qquad (28.2.1)$$

Співвідношення (28.2.1) також можна задовольнити завжди за допомогою калібрувальних перетворень (18а, б). Тоді за умови (28.2.1) рівняння поля $\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho_{в}$ перепишеться, з урахуванням (7.2.1), так:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\vec{A}\right) = 4\pi\rho_{в}. \qquad (29.2.1)$$

Рівняння ж Максвелла $\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пр} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ перепишеться, з урахуванням (5.2.1) і (7.2.1), так:

$$\Box\vec{A} + \nabla\operatorname{div}\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пр}. \qquad (30.2.1)$$

Перевіримо, чи сумісні рівняння (29.2.1) та (30.2.1). Застосування дивергенції до лівої частини (30.2.1) дає

$$\operatorname{div}\left(\Box\vec{A}+\nabla\operatorname{div}\vec{A}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{div}\vec{A}-\Delta\operatorname{div}\vec{A}+\Delta\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{div}\vec{A}.$$

Отже, дивергенція від (30.2.1) дає:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{div}\vec{A}+\frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\vec{j}_{\text{пр}}=0. \qquad (31.2.1)$$

З урахуванням (29.2.1) рівняння (30.2.1) перепишеться у такому вигляді:

$$\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\partial\rho_{\text{в}}}{\partial t}+\operatorname{div}\vec{j}_{\text{пр}}\right)=0, \qquad (32.2.1)$$

тобто з (32.2.1) знову одержуємо закон збереження заряду, який є необхідною умовою розв`язку (29.2.1) та (30.2.1) за умови (28.2.1).

2.2. Запізнювальні потенціали

Знайдемо тепер розв'язки неоднорідних хвильових рівнянь (11.2.1) і (12.2.1). Загальні розв'язки цих рівнянь складаються із загальних розв'язків однорідних рівнянь і частинних розв'язків неоднорідних рівнянь. Розв'язки однорідних (хвильових) рівнянь можна подати як суперпозицію розв'язків для монохроматичних плоских хвиль. Щоб визначити напруженості електричного і магнітного полів системи, треба знайти розв'язки неоднорідних рівнянь. Почнемо з розв'язку рівняння (12.2.1) для скалярного потенціалу. Спочатку знайдемо потенціал, створюваний елементарним зарядом $de(t)$, що міститься в початку координат. Якщо позначити цей потенціал через $G(\vec{r},t)$, то для густини заряду $\rho_{\text{в}}(\vec{r},t)=de(t)\delta(\vec{r})$ рівняння для нього можна записати так:

$$\Delta G(\vec{r},t)-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 G(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{\varepsilon}de(t)\delta(\vec{r}). \qquad (1.2.2)$$

Очевидно, що скрізь, крім початку координат, $\delta(\vec{r})=0$, і ми

маємо рівняння

$$\Delta G(\vec{r},t)-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 G(\vec{r},t)}{\partial t^2}=0\,. \qquad (2.2.2)$$

Оскільки функція $G(\vec{r},t)$ у даному випадку має центральну симетрію, вона залежить лише від відстані $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Тому рівняння (2.2.2) переходить у таке рівняння:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}=0\,. \qquad (3.2.2)$$

Шукатимемо розв'язок цього рівняння у вигляді $G=\chi/r$. Підставляючи його у рівняння (3.2.2), одержимо наступне рівняння для функції $\chi(\vec{r},t)$:

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0\,. \qquad (4.2.2)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial G}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\chi}{\partial r}-\dfrac{\chi}{r^2},\quad r^2\dfrac{\partial G}{\partial r}=r\dfrac{\partial\chi}{\partial r}-\chi,\\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial G}{\partial r}\right)=\dfrac{\partial\chi}{\partial r}+r\dfrac{\partial^2\chi}{\partial r^2}-\dfrac{\partial\chi}{\partial r}=r\dfrac{\partial^2\chi}{\partial r^2}\end{array}\right\}.$$

Рівняння (4.2.2) – це є рівняння плоских хвиль, розв'язок якого записується у наступному вигляді:

$$\chi(\vec{r},t)=\chi_1(t-r/v)+\chi_2(t+r/v)\,, \qquad (5.2.2)$$

де χ_1 і χ_2 – довільні функції, $v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – швидкість поширення електромагнітних хвиль. Перший доданок в (5.2.2) відповідає сферичній хвилі, що біжить від центра, а другий доданок описує хвилю, що була випромінена на нескінченності й біжить до центра. Для частинного розв'язку вибираємо лише першу функцію. Тоді потенціал $G(\vec{r},t)$ в усіх точках простору (крім початку координат) має вигляд

$$G(\vec{r},t)=\chi_1\left(t-|\vec{r}|/v\right)\Big/|\vec{r}|=\chi_1(t-r/v)/r\,. \qquad (6.2.2)$$

Функція χ_1 визначається при дослідженні поведінки розв'язку рівняння (1.2.2) в області $r\to 0$. У лівій частині цього рівняння

є похідні за координатами і похідні за часом. При $r \to 0$ найбільше значення мають похідні за координатами, що дозволяє знехтувати в рівнянні (1.2.2) доданком $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 G(\vec{r},t)}{\partial t^2}$ у порівнянні з доданком $\Delta G(\vec{r},t)$. Отже, завдяки цьому рівняння (1.2.2) в області поблизу заряду можна переписати так:

$$\Delta G(\vec{r},t) = -\frac{4\pi}{\varepsilon} de(t)\delta(\vec{r}). \qquad (7.2.2)$$

Тоді, якщо покласти $\chi_1 = de(t)/\varepsilon$ в (6.2.2), то рівняння (7.2.2) переходить у рівняння $\Delta(1/r) = -4\pi\delta(\vec{r})$, яке приводить до закону Кулона. Таким чином, частинний розв'язок рівняння (1.2.2) можна записати у такому вигляді:

$$G(\vec{r},t) = \frac{de(t - r/v)}{\varepsilon r}. \qquad (8.2.2)$$

Звідси можна перейти до розв'язання рівняння (12.2.1) для довільного розподілу зарядів $\rho(x,y,z,t)$. Для цього достатньо написати $de = \rho_в dV$ (dV – елемент об'єму) й інтегрувати по всьому простору. Таким чином, маємо

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/v)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \qquad (9.2.2)$$

де $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ – відстань від елемента об'єму $dV' = dx'dy'dz'$ у точці з радіус-вектором $\vec{r}' = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$ до "точки спостереження" P з радіус-вектором $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, у якій шукатимемо значення потенціалу (див. рис. 2, але тепер уже з об'ємною густиною $\rho(\vec{r}',t')$, де $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/v$ – час запізнення або так званий ***ретардерований*** час).

Аналогічним чином можна одержати вираз і для векторного потенціалу

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{v}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/v)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \qquad (10.2.2)$$

Формули (9.2.2), (10.2.2) називаються ***запізнювальними еле-***

ктромагнітними потенціалами. Значення $\vec{A}(\vec{r},t)$ і $\varphi(\vec{r},t)$ у точці спостереження дорівнюють сумі потенціалів, створених окремими частинами тіла. При цьому від різних точок сигнали приходять у точку спостереження із різними запізненнями.

У випадку нерухомих зарядів формула (9.2.2) переходить у формулу $\varphi(\vec{r})=\frac{1}{\varepsilon}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$. Формула ж (10.2.2) переходить у формулу $\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{v}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$ для векторного потенціалу постійного магнітного поля.

Нарешті, для вакууму, коли $\varepsilon=\mu=1$, запізнювальні потенціали записуються у такому вигляді:

$$\varphi(\vec{r},t)=\int\frac{\rho(\vec{r}',t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV', \qquad (11.2.2)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}',t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' \qquad (12.2.2)$$

2.3. Вираження потенціалів через поляризацію (вектор Герца)

Допустимо, що середовище є непровідним ($\sigma=0$) і немагнітним ($\vec{M}=0$); розглянемо поле в області, де $\rho_в=0$ і $\vec{j}_{пр}=0$. Переписуючи рівняння Максвелла (1.2.1) – (4.2.1) за використанням формул $\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}$ (замість "мультиплікативного співвідношення" $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ використовуватимемо "адитивне співвідношення") і $\vec{H}=\vec{B}$, одержуємо

$$\nabla\times\vec{B}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_P+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \qquad (1.2.3)$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad (2.2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_{зв}, \qquad (3.2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \qquad (4.2.3)$$

де *густина поляризаційного струму* $\vec{j}_P$ і *густина зв'язаного заряду* $\rho_{зв}$ визначаються такими співвідношеннями:

$$\vec{j}_P = \partial\vec{P}/\partial t, \qquad (5.2.3)$$

$$\rho_{зв} = -\nabla \cdot \vec{P}. \qquad (6.2.3)$$

Рівняння (1.2.3) – (4.2.3) формально ідентичні рівнянням для поля у вакуумі (див. табл. 1.1.1). Таким чином, як і у випадку вакууму, можна ввести такі ж векторний потенціал $\vec{A}$ і скалярний потенціал φ, що $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$. Крім того, якщо накласти умову Лоренца $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, то аналогічно з (9.2.1) і (10.2.1) ми одержимо наступні рівняння для $\vec{A}$ і φ:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_P, \qquad (7.2.3)$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho_{зв}. \qquad (8.2.3)$$

Зазначимо, що умова Лоренца узгоджується з (7.2.3) і (8.2.3), якщо $\partial\rho_{зв}/\partial t + \nabla \cdot \vec{j}_P = 0$. Це співвідношення задовольняється тотожньо, що легко отримати із (5.2.3) і (6.2.3), використовуючи векторну тотожність $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r},t) \equiv 0$.

У відповідності з (11.2.2) і (12.2.2), а також (5.2.3) і (6.2.3) розв'язки рівнянь (7.2.3) і (8.2.3) можна виражати через поляризацію у вигляді

$$\varphi(\vec{r},t) = -\int\frac{1}{R}\nabla' \cdot \vec{P}_{t'}dV', \qquad (9.2.3)$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int\frac{1}{R}\dot{\vec{P}}_{t'}dV'. \qquad (10.2.3)$$

Тут оператор div' береться для координат (x', y', z') точки інтегрування $\vec{r}'$ в елементі об'єму dV'. Прямий розрахунок дозволяє

одержати наступну тотожність:

$$\nabla'\cdot\vec{P}_{t'}=\frac{\partial P_{t'x}\left(\vec{r}',t'\right)}{\partial x'}+\frac{\partial P_{t'y}\left(\vec{r}',t'\right)}{\partial y'}+\frac{\partial P_{t'z}\left(\vec{r}',t'\right)}{\partial z'}=\nabla'\cdot\vec{P}_{t'}+\frac{\partial P_{t'x}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x'}+$$

$$+\frac{\partial P_{t'y}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial y'}+\frac{\partial P_{t'z}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial z'}=\nabla'\cdot\vec{P}_{t'}+\frac{\partial P_{t'x}}{\partial t'}\frac{\left(x-x'\right)}{cR}+\frac{\partial P_{t'y}}{\partial t'}\frac{\left(y-y'\right)}{cR}+$$

$$+\frac{\partial P_{t'z}}{\partial t'}\frac{\left(z-z'\right)}{cR}=\nabla'\cdot\vec{P}_{t'}+\frac{\partial P_{t'x}}{\partial t'}\frac{\left(x-x'\right)}{cR}+\frac{\partial P_{t'y}}{\partial t'}\frac{\left(y-y'\right)}{cR}+$$

$$+\frac{\partial P_{t'z}}{\partial t'}\frac{\left(z-z'\right)}{cR}=\nabla'\cdot\vec{P}_{t'}+\frac{1}{cR}\vec{R}\cdot\dot{\vec{P}}_{t'}\,. \qquad (11.2.3)$$

Отже, скориставшись тотожністю (11.2.3), потенціал (9.2.3) можна переписати у такому вигляді:

$$\varphi\left(\vec{r},t\right)=-\int\left(\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{P}_{t'}-\frac{1}{cR^2}\vec{R}\cdot\dot{\vec{P}}_{t'}\right)dV'\,. \qquad (12.2.3)$$

Скориставшись далі тотожністю $\nabla\cdot\left(\vec{A}\varphi\right)=\varphi\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla\varphi$, а також теоремою Остроградського – Гауса (18.1.1), від виразу (12.2.3) переходимо до такого:

$$\varphi\left(\vec{r},t\right)=\int\left(\vec{P}_{t'}\cdot\nabla'\frac{1}{R}+\frac{1}{cR^2}\vec{R}\cdot\dot{\vec{P}}_{t'}\right)dV'\,, \qquad (13.2.3)$$

Вирази (10.2.3) і (13.2.3) дозволяють зрозуміти фізичний сенс величини $\vec{P}$. Дійсно, розглянемо випадок, коли вектор $\vec{P}$ рівний нулю скрізь, окрім нескінченно малого об'єму поблизу точки з радіус-вектором $\vec{r}_0$. Формально це можна записати за допомогою дельта-функції Дірака у вигляді

$$\vec{P}\left(\vec{r}',t\right)=\vec{p}\left(t\right)\delta\left(\vec{r}'-\vec{r}_0\right). \qquad (14.2.3)$$

Тоді (13.2.3) і (10.2.3) перейдуть в

$$\varphi\left(\vec{r},t\right)=\vec{p}_{t'}\cdot\nabla_0\frac{1}{R}+\frac{1}{cR^2}\vec{R}\cdot\dot{\vec{p}}_{t'}\,, \qquad (15.2.3)$$

$$\vec{A}\left(\vec{r},t\right)=\frac{1}{cR}\dot{\vec{p}}_{t'}\,, \qquad (16.2.3)$$

де $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}_0$, $R=\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|$, а ∇_0 означає, що оператор береться за координатами x_0, y_0, z_0 точки з радіус-вектором $\vec{r}_0$.

Рівняння (15.2.3) і (16.2.3) допускають просту інтерпретацію. Нехай два заряди $-e$ і e розташовані в точках, радіуси-вектори яких щодо фіксованої точки $Q_0(\vec{r}_0)$ рівні $-\vec{a}/2$ і $\vec{a}/2$ відповідно. Їх кулонівський потенціал рівний $\varphi = e/R_2 - e/R_1$. Якщо a достатньо мале, можна розкласти $1/R_2$ за степенями компонент $\vec{a}$: $1/R_2 = 1/R_1 + \vec{a}\cdot\nabla(1/R_1) + \ldots$, де операція градієнта береться за координатами точки, в якій розташований заряд $-e$. Отже, потенціал φ можна наближено записати у вигляді $\varphi \approx e\vec{a}\cdot\vec{R}_1/R_1^3$. Нехай тепер $\vec{a}$ поступово зменшується, а e необмежено збільшується таким чином, що $e\vec{a}$ прямує до скінченого значення $\vec{p}$, тобто $\lim\limits_{a\to 0} e\vec{a} = \vec{p}$. Тоді R_1 наближається до R і потенціал φ набуває вигляду $\varphi = \vec{p}\cdot\nabla_0(1/R)$, який за постійного $\vec{p}$ ідентичний (15.2.3). У випадку ж, коли заряди залежать від часу, потенціал $\varphi = e(t - R_2/c)/R_2 - e(t - R_1/c)/R_1$ при граничному переході збігатиметься з (15.2.3). Таким чином, (14.2.3) можна інтерпретувати як скалярний потенціал ***розподілу електричних диполів з моментом*** $\vec{P}$ ***в одиниці об'єму.*** Потенціал же (16.2.3) є магнітним потенціалом, створюваним цими диполями.

Кількість невідомих функцій можна зменшити, якщо замість потенціалів $\vec{A}(\vec{r},t)$ і $\varphi(\vec{r},t)$, пов'язаних умовою Лоренца $\nabla\cdot\vec{A} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$, ввести одну векторну функцію $\vec{Z}(\vec{r},t)$, через яку наступним виражаються електромагнітні потенціали:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{Z}(\vec{r},t)}{\partial t},\ \varphi(\vec{r},t) = -\nabla\cdot\vec{Z}(\vec{r},t). \qquad (17.2.3)$$

Величина $\vec{Z}(\vec{r},t)$ називається *вектором Герца* або *поляризаційним потенціалом*.

Із формул (17.2.3) видно, що $\vec{Z}(\vec{r},t)$ пов'язані з $\vec{A}(\vec{r},t)$ і $\varphi(\vec{r},t)$ такими ж співвідношеннями, як поляризація $\vec{P}$ з $\vec{j}_P/c$ і $\rho_{зв}$ (див. формули (16.2.1) і (21.2.1)).

Нехай вектор Герца задовольняє наступному неоднорідному рівнянню Даламбера:

$$\Delta\vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -4\pi\vec{P}\,. \qquad (18.2.3)$$

Застосовуючи до обох частин рівняння (18.2.3) поперемінно оператори $\partial/c\partial t$ і $-\mathrm{div}$, ми одержимо рівняння (7.2.3) і (8.2.3) відповідно для потенціалів $\vec{A}(\vec{r},t)$ і $\varphi(\vec{r},t)$, що доводить правильність вибору рівняння (18.2.3) для вектора Герца. По аналогії з запізнювальними потенціалами (11.2.2) і (12.2.2) можна записати розв'язок рівняння (18.2.3) для обмеженої системи у вільному просторі:

$$\vec{Z}(\vec{r},t) = \int \frac{\vec{P}\left(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'\,. \qquad (19.2.3)$$

Вектори поля можна виразити безпосередньо через $\vec{Z}(\vec{r},t)$ простим диференціюванням. Із $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ і першої формули в (17.2.3) одержимо

$$\vec{B} = \vec{H} = \frac{1}{c}\nabla \times \dot{\vec{Z}} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{Z}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial\, \mathrm{rot}\,\vec{Z}}{\partial t}\,. \qquad (20.2.3)$$

Із $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$ і (17.2.3) знаходимо

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\dot{\vec{Z}}\right) + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{Z}\right) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{Z} + \left(\Delta\vec{Z} - \frac{1}{c^2}\ddot{\vec{Z}}\right) =$$

$$= \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{Z} - 4\pi\vec{P}\,, \qquad (21.2.3)$$

де була використана тотожність $\mathrm{grad}\,\mathrm{div} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot} + \Delta$, а також рівняння (18.2.3). Нарешті, за використанням $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ і формули (21.2.3) знаходимо

$$\vec{D} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{Z}\right) = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{Z}\,. \qquad (22.2.3)$$

Вектор $\vec{Z}$, як і потенціали $\vec{A}$ і φ, є неоднозначним. До нього можна застосувати наступне перетворення, яке залишає вектори поля незмінними:

$$\vec{Z}' = \vec{Z} - \nabla G\,, \qquad (23.2.3)$$

де скалярна G функція є довільними розв'язком однорідного хвильового рівняння

$$\Delta G - \ddot{G}/c^2 = 0\,. \qquad (24.2.3)$$

Інваріантність векторів поля щодо таких перетворень легко показати, підставляючи (23.2.3) в (17.2.3). Величини $\vec{A}$ і φ при цьому перетворюються в $\vec{A}'$ і φ' відповідно (15) з

$$\chi = -\dot{G}/c\,. \qquad (25.2.3)$$

Крім того, підстановка (23.2.3) в (18.2.3) показує, що $\vec{Z}'$ також задовольняє неоднорідному хвильовому рівнянням.

2.4. Поле лінійного електричного диполя та його випромінювання у хвильовій зоні

Нехай лінійний електричний диполь знаходиться в точці $\vec{r}_0$ і коливається у фіксованому напрямку, який визначається одиничним вектором $\vec{\tau}$. Такий диполь характеризується електричною поляризацією

$$\vec{P}(\vec{r},t) = p(t)\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{\tau}\,, \qquad (1.2.4)$$

де $p(t)$ – функція часу, $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ – функція Дірака. У загальному випадку диполь із орієнтацією $\vec{n}$, також залежною від часу, еквівалентний трьом лінійним диполям, дипольні моменти яких орієнтовані вздовж трьох взаємно перпендикулярних напрямків. Підставляючи вираз (1.2.4) у формулу (19.2.3), одержимо такий вектор Герца для цього диполя:

$$\vec{Z}(\vec{r},t) = \vec{\tau}\int \frac{p(t')\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' = \vec{\tau}\int \frac{p(t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c)\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV' =$$

$$= \vec{\tau}\frac{p(t-|\vec{r}-\vec{r}_0|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} = \frac{p(t-R/c)}{R}\vec{\tau}\,, \qquad (2.2.4)$$

де $R = |\vec{r}-\vec{r}_0|$ – відстань точки $\vec{r}$ від точки $\vec{r}_0$.

Оскільки $\vec{Z}(\vec{r},t)$ задовольняє скрізь (крім початку координат) однорідному хвильовому рівнянню для вакууму, поля $\vec{E}$,

$\vec{D}$, $\vec{B}$ і $\vec{H}$, як випливає із формул (20.2.3) – (22.2.3), записуються у такому вигляді:

$$\vec{E} = \vec{D} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}, \tag{3.2.4}$$

$$\vec{B} = \vec{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}. \tag{4.2.4}$$

Користуючись тотожністю $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$ і співвідношенням $\Delta\vec{Z} = \ddot{\vec{Z}}/c^2$, можна переписати (3.2.4) у вигляді

$$\vec{E} = \vec{D} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}. \tag{5.2.4}$$

Далі розраховуватимемо $\operatorname{div}\vec{Z}$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}$ і $\operatorname{rot}\vec{Z}$, вважаючи при цьому, що $\vec{r}_0 = 0$ ($R = |\vec{r}| = r$), тобто диполь розташований в центрі декартової системи координат (див. рис. 1.2.4).

$$\operatorname{div}\vec{Z} = \nabla\cdot\left[\frac{p(t-r/c)}{r}\vec{\tau}\right] = \vec{\tau}\cdot\nabla\left[\frac{p(t-r/c)}{r}\right] = -\frac{p(t-r/c)}{r^2}(\vec{\tau}\cdot\nabla r) -$$

$$-\frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr}(\vec{\tau}\cdot\nabla r) = -\frac{p(t-r/c)}{r^3}(\vec{\tau}\cdot\vec{r}) - \frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr^2}(\vec{\tau}\cdot\vec{r}) =$$

$$= -\left[\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right](\vec{\tau}\cdot\vec{r}), \tag{6.2.4}$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z} = -\nabla\left\{\left[\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right](\vec{\tau}\cdot\vec{r})\right\} =$$

$$= -\nabla\left[\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right](\vec{\tau}\cdot\vec{r}) - \left[\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right]\times$$

$$\times\nabla(\vec{\tau}\cdot\vec{r}) = \frac{3p(t-r/c)}{r^5}\vec{r}(\vec{\tau}\cdot\vec{r}) + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr^4}\vec{r}(\vec{\tau}\cdot\vec{r}) + \frac{2\dot{p}(t-r/c)}{cr^4}\times$$

$$\times\vec{r}(\vec{\tau}\cdot\vec{r}) + \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{c^2r^3}\vec{r}(\vec{\tau}\cdot\vec{r}) - \left[\frac{p(t-r/c)}{r^3} + \frac{\dot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right]\vec{\tau} =$$

$$= \left[\frac{3p(t-r/c)}{r^5} + \frac{3\dot{p}(t-r/c)}{cr^4} + \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{c^2r^3}\right]\vec{r}(\vec{\tau}\cdot\vec{r}) -$$

$$-\left[\frac{p\left(t-r/c\right)}{r^3}+\frac{\dot{p}\left(t-r/c\right)}{cr^2}\right]\vec{\tau}\,, \qquad (7.2.4)$$

$$\operatorname{rot}\vec{Z}=\nabla\times\left[\frac{p\left(t-r/c\right)}{r}\vec{\tau}\right]=-\vec{\tau}\times\nabla\left[\frac{p\left(t-r/c\right)}{r}\right]=$$

$$=\left[\frac{p\left(t-r/c\right)}{r^3}+\frac{\dot{p}\left(t-r/c\right)}{cr^2}\right]\left(\vec{\tau}\times\vec{r}\right). \qquad (8.2.4)$$

Тут при розрахунку $\operatorname{rot}\vec{Z}$ ми скористались тотожністю $\operatorname{rot}\left(f\vec{F}\right)=\nabla f\times\vec{F}+f\operatorname{rot}\vec{F}$.

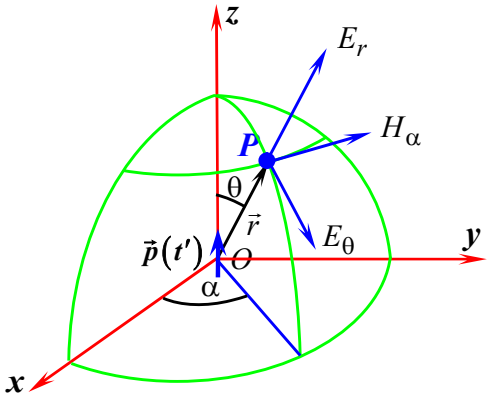


Рис. 1.2.4. Розрахунок поля лінійного електричного диполя з дипольним моментом уздовж осі z.

Підставляючи вирази (6.2.4), (7.2.4) і (8.2.4) у формули (4.2.4) і (5.2.4), одержимо формули для векторів поля, а саме

$$\vec{E}=\vec{D}=\left[\frac{3p\left(t-r/c\right)}{r^5}+\frac{3\dot{p}\left(t-r/c\right)}{cr^4}+\frac{\ddot{p}\left(t-r/c\right)}{c^2r^3}\right]\vec{r}\left(\vec{\tau}\cdot\vec{r}\right)-$$

$$-\left[\frac{p\left(t-r/c\right)}{r^3}+\frac{\dot{p}\left(t-r/c\right)}{cr^2}+\frac{\ddot{p}\left(t-r/c\right)}{c^2r}\right]\vec{\tau}\,, \qquad (9.2.4)$$

$$\vec{B} = \vec{H} = \left[\frac{p\left(t - r/c\right)}{cr^3} + \frac{\dot{p}\left(t - r/c\right)}{c^2 r^2} \right] \left(\vec{\tau} \times \vec{r} \right). \qquad (10.2.4)$$

Знайдемо тепер вирази для $\vec{E}$ і $\vec{H}$ у сферичних координатах. Вибираючи напрямок $\vec{\tau}$ уздовж осі z ($\vec{\tau} = \vec{e}_z$) і позначаючи через $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ і $\vec{e}_\alpha$ одиничні вектори у напрямках збільшення $\vec{r}$, θ і α, одержимо

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \ \vec{e}_z = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta, \ \vec{e}_z \cdot \vec{r} = r\cos\theta,$$

$$\vec{e}_z \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\alpha \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\sin\theta \vec{e}_\alpha. \qquad (11.2.4)$$

Тоді, скориставшись співвідношеннями (11.2.4), для (9.2.4) і (10.2.4) одержимо наступні формули:

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta, \ \vec{H} = H_\alpha \vec{e}_\alpha, \qquad (12.2.4)$$

де

$$\begin{cases} E_r = 2\left[\dfrac{p\left(t - r/c\right)}{r^3} + \dfrac{\dot{p}\left(t - r/c\right)}{cr^2} \right] \cos\theta, \\ E_\theta = \left[\dfrac{p\left(t - r/c\right)}{r^3} + \dfrac{\dot{p}\left(t - r/c\right)}{cr^2} + \dfrac{\ddot{p}\left(t - r/c\right)}{c^2 r} \right] \sin\theta, \\ H_\alpha = \left[\dfrac{\dot{p}\left(t - r/c\right)}{cr^2} + \dfrac{\ddot{p}\left(t - r/c\right)}{c^2 r} \right] \sin\theta. \end{cases} \qquad (13.2.4)$$

Таким чином, електричний вектор лежить у меридіональній площині, яка проходить через вісь диполя, а магнітний вектор перпендикулярний цій площині.

Розглянемо спочатку поле в області, яка настільки віддалена від диполя, що в наведених вище рівняннях можна знехтувати всіма доданками, крім доданків першого порядку щодо $1/r$. Ця *хвильова* (або *радіаційна*) *зона* характеризується тим, що для неї

$$r >> c\left|p/\dot{p}\right|, \ r >> c\left|\dot{p}/\ddot{p}\right|. \qquad (14.2.4)$$

У цій області

$$E_\theta \sim H_\alpha \sim \frac{\ddot{p}(t-r/c)}{c^2 r}\sin\theta\,, \qquad (15.2.4)$$

а інші компоненти дуже малі. Отже, у хвильовій зоні вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ за величиною рівні між собою і перпендикулярні один одному, а також до радіус-вектора $\vec{r}$ (якщо $\vec{r}_0 \neq 0$, то до радіус-вектора $\vec{R}$), який збігається там із напрямком вектора Умова – Пойнтінга. Тому в цій зоні структура поля лінійного електричного диполя наближається до структури поля плоскої хвилі. Проте у випадку диполя на кожній "хвильовій поверхні" (сфері з центром у точці $\vec{r}_0$) вектори поля змінюються від точки до точки, зменшуючись за величиною від екватора до полюсів, причому на осі осцилятора вони рівні нулю. Тому диполь не випромінює енергії в напрямку своєї осі.

Розрахуємо кількість енергії, яка випромінюється за одну секунду через кожну сферичну хвильову поверхню. Вона буде рівна інтегралу від величини вектора Умова – Пойнтінга $\vec{S}$, взятому по цій поверхні. У хвильовій зоні, в якій, як випливає із (13.2.4), $E_r \approx 0$, $E_\theta \approx \ddot{p}(t')\sin\theta/c^2 r$, $H_\alpha \approx \ddot{p}(t')\sin\theta/c^2 r$, маємо

$$S = \frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}\times\vec{H}\right| = \frac{c}{4\pi}\begin{Vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\alpha \\ 0 & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & H_\alpha \end{Vmatrix} = \frac{c}{4\pi}\left|E_\theta H_\alpha\right| =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2 c^3}\,\ddot{p}^2\left(t-r/c\right)\sin^2\theta\,. \qquad (16.2.4)$$

Таким чином, загальна кількість енергії, яка протікає через сферичну поверхню в секунду, рівна ($d\sigma$ позначає елемент поверхні)

$$I = \int S d\sigma = \frac{\ddot{p}^2\left(t-r/c\right)}{4\pi r^2 c^3} r^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta =$$

$$= \frac{\ddot{p}^2\left(t-r/c\right)}{2c^3}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx = \frac{2\ddot{p}^2\left(t-r/c\right)}{3c^3}. \qquad (17.2.4)$$

Розглянемо тепер випадок, коли $p(t)$ є періодичною функці-

єю часу t з кутовою частотою ω, тобто

$$p(t) = p_0 \exp(-i\omega t), \qquad (18.2.4)$$

де p_0 – комплексна постійна. Вважатимемо, що дійсна частина (18.2.4) представляє $p(t)$. Вона знаходиться так:

$$\operatorname{Re} p(t) = \operatorname{Re}\left[p_0 \exp(-i\omega t)\right] = \operatorname{Re}\left[(\operatorname{Re} p_0 + i \operatorname{Im} p_0)(\cos\omega t - i \sin\omega t)\right] =$$

$$= \operatorname{Re} p_0 \cos\omega t + \operatorname{Im} p_0 \sin\omega t = \sqrt{(\operatorname{Re} p_0)^2 + (\operatorname{Im} p_0)^2} \times$$

$$\times \left[\frac{\operatorname{Re} p_0}{\sqrt{(\operatorname{Re} p_0)^2 + (\operatorname{Im} p_0)^2}} \cos\omega t + \frac{\operatorname{Im} p_0}{\sqrt{(\operatorname{Re} p_0)^2 + (\operatorname{Im} p_0)^2}} \sin\omega t \right] =$$

$$= |p_0| \cos(\omega t - \alpha),$$

де $\alpha = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im} p_0 / \operatorname{Re} p_0)$ – фаза p_0. Дві умови (14.2.4) тепер зводяться до однієї

$$r >> \lambda/2\pi \quad (\lambda = 2\pi c/\omega), \qquad (19.2.4)$$

а (15.2.4) для незникаючих компонент поля у хвильовій зоні дає вираз

$$E_\theta \sim H_\alpha \sim -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 p_0 \sin\theta \frac{\exp\left[-i\omega(t - r/c)\right]}{r}. \qquad (20.2.4)$$

Вважається, що береться дійсна частина виразу, яка стоїть у правій частині (20). Кількість енергії, яка проходить у секунду через одиничну площу сферичної поверхні у хвильовій зоні, рівна

$$W = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \frac{|p_0|^2}{r^2} \sin^2\theta \cos^2\left[\omega(t - r/c) - \alpha\right]. \qquad (21.2.4)$$

Помножаючи вираз (21.2.4) на елемент поверхні $d\sigma$, знаходимо інтенсивність $dI = W d\sigma$, яка проходить через цей елемент, і далі, поділивши її на елемент тілесного кута $d\Omega = d\sigma / r^2$, приходимо до кутового розподілу

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |p_0|^2 \sin^2\theta \cos^2\left[\omega(t - r/c) - \alpha\right]. \qquad (22.2.4)$$

Виконаємо тепер усереднення за інтервал часу, великий у порівнянні з періодом $T = 2\pi/\omega$, тобто здійснюємо наступну процедуру:

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dI}{d\Omega} dt = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 |p_0|^2 \sin^2\theta \times$$

$$\times \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2\left[\omega(t - r/c) - \alpha \right] dt = \frac{|p_0|^2 \omega^4}{8\pi c^3} \sin^2\theta \,. \qquad (23.2.4)$$

На рис. 2.2.4 зображений 3D-графік кутового розподілу $\langle dI/d\Omega \rangle$ інтенсивності дипольного випромінювання.

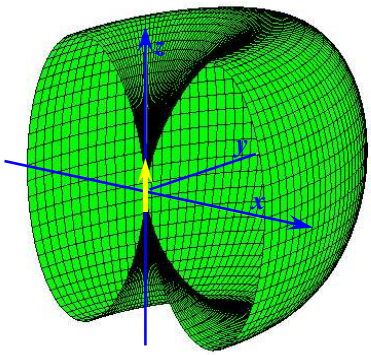


Рис. 2.2.4. Кутовий розподіл $\langle dI/d\Omega \rangle$ інтенсивності дипольного випромінювання у хвильовій зоні.

Нарешті, інтегруючи (23.2.4) за кутами α і θ, знайдемо повну інтенсивність (усереднену за часом) дипольного випромінювання:

$$\langle I \rangle = \int \left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle d\Omega = \frac{|p_0|^2 \omega^4}{8\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta =$$

$$= \frac{|p_0|^2 \omega^4}{4c^3} \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \frac{|p_0|^2 \omega^4}{3c^3} \,. \qquad (24.2.4)$$

2.5. Електромагнітне поле у ближній зоні та енергія дипольного випромінювання

Запишемо знову вирази (9.2.4) і (10.2.4) для напруженостей електричного $\vec{E}(\vec{r},t)$ і магнітного $\vec{H}(\vec{r},t)$ полів, але у дещо іншому вигляді:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\left\{\frac{3\vec{n}\left[\vec{p}(t')\cdot\vec{n}\right]}{r^3}+\frac{3\vec{n}\left[\dot{\vec{p}}(t')\cdot\vec{n}\right]}{cr^2}+\frac{\vec{n}\left[\ddot{\vec{p}}(t')\cdot\vec{n}\right]}{c^2r}\right\}-$$

$$-\left[\frac{\vec{p}(t')}{r^3}+\frac{\dot{\vec{p}}(t')}{cr^2}+\frac{\ddot{\vec{p}}(t')}{c^2r}\right], \qquad (1.2.5)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{\dot{\vec{p}}(t')\times\vec{n}}{cr^2}+\frac{\ddot{\vec{p}}(t')\times\vec{n}}{c^2r}, \qquad (2.2.5)$$

де $\vec{n}=\vec{r}/r$ – одиничний вектор у напрямку на точку спостереження *P* (рис. 1.2.4). Зазначимо, що на відміну від хвильової зони, у якій ми враховували у виразах (1.2.5) і (2.2.5) тільки доданки, які пропорційні $1/r$, у ближній зоні тепер необхідно враховувати й доданки, які пропорційні $1/r^2$ і $1/r^3$ (тим більше, що у цій області вони і суттєвіші). Звернемо увагу і на відмінність фізичних чинників: якщо поля у дальній зоні визначаються $\ddot{\vec{p}}$ (тобто контролюються прискоренням), то у ближній зоні вони будуть відмінними від нуля навіть при $\ddot{\vec{p}}=0$ (але швидкості частинок $\vec{v}\neq 0$ і $\dot{\vec{p}}\neq 0$).

Для випадку, коли $\vec{p}(t')$ є періодичною функцією часу t' з кутовою частотою ω, тобто коли $\vec{p}(t')=\vec{e}_z p_0\exp(-i\omega t')$, а також $\dot{\vec{p}}(t')=-i\omega\vec{p}(t')$ і $\ddot{\vec{p}}(t')=-\omega^2\vec{p}(t')$, формули (1.2.5) і (2.2.5) переписуються у наступному вигляді:

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{n}\left[\vec{p}(t')\cdot\vec{n}\right]\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3i\omega}{cr^2}-\frac{\omega^2}{c^2r}\right)-$$

$$\vec{p}(t')\left(\frac{1}{r^3}-\frac{i\omega}{cr^2}-\frac{\omega^2}{c^2 r}\right), \tag{3.2.5}$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)=-\left[\vec{p}(t')\times\vec{n}\right]\left(\frac{i\omega}{cr^2}+\frac{\omega^2}{c^2 r}\right). \tag{4.2.5}$$

Скориставшись співвідношеннями (11.2.4) (або підставляючи у вирази (13.2.4) функцію $\vec{p}(t')=\vec{e}_z p_0 \exp(-i\omega t')$), виписуємо просторові залежності ненульових компонентів для $\vec{E}$ і $\vec{H}$ у сферичних координатах:

$$\begin{cases} E_r(r,\theta)=-2i\dfrac{\lambda}{2\pi r}\left(1+\dfrac{i\lambda}{2\pi r}\right)H^{\infty}\cos\theta, \\ E_\theta(r,\theta)=\left[1-\left(\dfrac{\lambda}{2\pi r}\right)^2+\dfrac{i\lambda}{2\pi r}\right]H^{\infty}\sin\theta, \\ H_\alpha(r,\theta)=\left(1+\dfrac{i\lambda}{2\pi r}\right)H^{\infty}\sin\theta, \end{cases} \tag{5.2.5}$$

де $H^{\infty}(r)=-\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2\dfrac{p_0}{r}$ – величина напруженості магнітного поля у хвильовій зоні при $\theta=\pi/2$.

Зазначимо, що якщо розміри джерела мають величину порядку d, а довжина хвилі $\lambda=2\pi c/\omega$ і $\lambda >> d$, то представляють інтерес такі три зони:

1) ближня (статична) зона: $d << r << \lambda$,
2) проміжна (індукційна) зона: $d << r \sim \lambda$,
3) дальня (хвильова) зона: $d << \lambda << r$.

Властивості полів у різних зонах суттєво відрізняються. У ближній зоні, яка і буде нас у подальшому цікавити, ці поля носять характер статичних полів: як видно із формул (5.2.5), існують відмінні від нуля радіальні складові для електричного поля і воно вже не є чисто поперечним (у той же час, магнітне поле є поперечним при всіх відстанях), і зміна полів із відстанню r залежить від властивостей джерела. Зокрема, проаналізуємо співвідношення між магнітною та електричними компонентами полів з

відстанню r для розглядуваного випадку.

Розглянемо випадок $\theta = \pi/2$, за якого будуть відмінними від нуля тільки кутові компоненти полів: $E_r(r,\pi/2) = 0$, $E_\theta(r,\pi/2) \neq 0$, $H_\alpha(r,\pi/2) \neq 0$. Знайдемо таке відношення:

$$\zeta(\varsigma) = \left|\frac{E_\theta(r,\pi/2)}{H_\alpha(r,\pi/2)}\right| = \left|\frac{1 - 1/\varsigma^2 + i/\varsigma}{1 + i/\varsigma}\right| = \frac{1}{\varsigma}\sqrt{\frac{\varsigma^4 - \varsigma^2 + 1}{\varsigma^2 + 1}}, \qquad (6.2.5)$$

де введено позначення $\varsigma = 2\pi r/\lambda = kr$ (як видно із (5.2.5) функція $\zeta(\varsigma)$ не залежить від кута θ). Як видно із формули (6.2.5), у хвильовій зоні при $r >> \lambda$ ($\varsigma >> 1$)

$$\zeta(\varsigma >> 1) \approx 1. \qquad (7.2.5)$$

При $d << r << \lambda$ (тобто у ближній зоні) параметр ς стає малим, що, у свою чергу, приводить до такої нерівності:

$$\zeta(\varsigma << 1) \sim 1/\varsigma >> 1. \qquad (8.2.5)$$

Графік функції $\zeta(\varsigma)$ показаний на рис. 1.2.5.

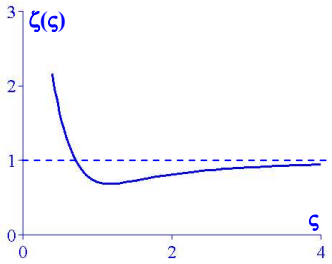


Рис. 1.2.5. Графік функції $\zeta(\varsigma)$.

Як видно із рис. 1.2.5, функція $\zeta(\varsigma)$ при $\varsigma \to 0$ прямує до нескінченності, а при $\varsigma \to \infty$ асимптотично наближається до одиниці (при $\varsigma = 1/\sqrt{2}$ ця функція точно дорівнює одиниці). Функція $\zeta(\varsigma)$ має точку мінімуму $\varsigma_{\min} = \sqrt{(1+\sqrt{3})/2} \approx 1{,}08$, яка є од-

ним із розв'язків наступного рівняння:

$$\frac{d\zeta(\varsigma)}{d\varsigma}=\frac{2\varsigma^4-2\varsigma^2-1}{\varsigma\sqrt{\left(\varsigma^4-\varsigma^2+1\right)\left(\varsigma^2+1\right)}}=0\,. \qquad (9.2.5)$$

Підставляючи $\varsigma_{\min}$ у функцію $\zeta(\varsigma)$, знаходимо її мінімальне значення:

$$\varsigma_{\min}=\zeta(\varsigma_{\min})=\sqrt{\frac{\varsigma_{\min}^4-\varsigma_{\min}^2+1}{\varsigma_{\min}^4+\varsigma_{\min}^2}}=\sqrt{\frac{3}{1+4\varsigma_{\min}^2}}\approx 0{,}68\,. \quad (10.2.5)$$

Загалом же, коли кут $\theta\neq\pi/2$ з'являється поздовжня компонента електричного поля, взаємний вплив якої характеризується коефіцієнтом

$$\eta(\varsigma,\theta)=\left|E_r(r,\theta)/E_\theta(r,\theta)\right|=2\left|\operatorname{ctg}\theta\right|\sqrt{\left(1+\varsigma^2\right)/\left(1+\varsigma^4-\varsigma^2\right)}. \quad (11.2.5)$$

Із формули (11.2.5) видно, що при $r\to\infty$ $(\varsigma>>1)$ коефіцієнт $\eta(\varsigma,\theta)$ для кутів $\theta\neq 0,\pi$ прямує до нуля:

$$\eta(\varsigma,\theta)\approx 2\left|\operatorname{ctg}\theta\right|/\varsigma\to 0\,. \qquad (12.2.5)$$

Поперечність полів найбільше порушується при $\theta\to 0,\pi$, оскільки саме при наближенні до цих кутів виникають великі поздовжні компоненти електричного поля. Взагалі кажучи, у ближній зоні характер просторової залежності компонент електромагнітного поля електричного диполя суттєво відрізняється від хвильової зони. Для підтвердження сказаному слугує 3D-графік функції (11.2.5), зображений на рис. 2.2.5.

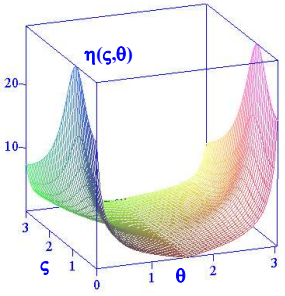


Рис. 2.2.5. Зображення 3D-графіка функції $\eta(\varsigma,\theta)$.

За використанням формул (13.2.4) запишемо величину вектора Умова – Пойнтінга з урахування і поздовжньої компоненти E_r вектора напруженості електричного поля:

$$S = \frac{c}{4\pi}\left|\vec{E}\times\vec{H}\right| = \frac{c}{4\pi}\left\|\begin{matrix}\vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_\alpha \\ E_r & E_\theta & 0 \\ 0 & 0 & H_\alpha\end{matrix}\right\| =$$

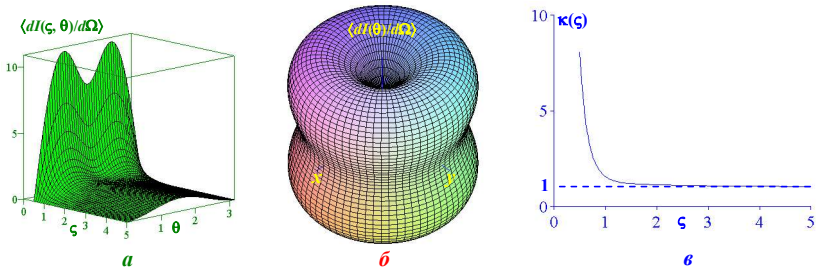
$$= \frac{c}{4\pi}\sqrt{\left|E_\theta H_\alpha\right|^2 + \left|E_r H_\alpha\right|^2}\ . \qquad (13.2.5)$$

Далі, розраховуючи співвідношення (13.2.5) для випадку, коли $\vec{p}(t')$ є періодичною функцією часу t' (використовуємо для компонент E_r, E_θ і H_α формули (5.2.5)), після процедури усереднення за часом одержуємо наступний кутовий розподіл в залежності від параметра ς:

$$\left\langle \frac{dI(\varsigma,\theta)}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\omega^4 |p_0|^2 \sin^2\theta}{8\pi c^3}\left[1 + \frac{1}{\varsigma^6} + \frac{4\,\mathrm{ctg}^2\theta}{\varsigma^2}\left(1+\frac{1}{\varsigma^2}\right)^2\right]^{1/2}. \quad (14.2.5)$$

Видно, що за $\varsigma \to \infty$ вираз (14.2.5) асимптотично наближається до виразу (23.2.4), справедливого у хвильовій зоні, а за $\varsigma \to 0$ одержуємо кутовий розподіл у ближній зоні, який за всіх кутів θ у ς^{-3} разів перевищує кутовий розподіл у хвильовій зоні. У проміжній зоні 3D-графік функції (14.2.5) у декартовій системі координат зображений на рис. 3.2.5а, із якого видно, що за $\theta = \pi/2$ ця функція має мінімум $\langle dI/d\Omega\rangle_{\min} = \omega^4 |p_0|^2 \left(1+1/\varsigma^6\right)^{1/2} \Big/ 8\pi c^3$, а для кутів $\theta_{1\max} = \arcsin\sqrt{2\left(1+\varsigma^2\right)\Big/\left(3+5\varsigma^2-\varsigma^4\right)}$ і $\theta_{2\max} = \pi - \theta_{1\max}$ вона набуває такого максимального значення:

$$\langle dI/d\Omega\rangle_{\max} = \left(\omega^4 |p_0|^2 \Big/ 8\pi c^3\right)\frac{\left[2\left(1+\varsigma^2\right)\right]^{3/2}}{\varsigma^2\left(3+5\varsigma^2-\varsigma^4\right)}. \qquad (15.2.5)$$



а *б* *в*

Рис. 3.2.5. (*а*) – 3D-графік кутового розподілу $\langle dI(\varsigma,\theta)/d\Omega\rangle$ інтенсивності дипольного випромінювання в індуктивній зоні, (б) – 3D-графік кутового розподілу $\langle dI(\theta)/d\Omega\rangle$, який побудований в сферичній системі координат при $\varsigma=1$, (в) – графік функції $\kappa(\varsigma)=\langle I\rangle_{\text{бз}}/\langle I\rangle_{\text{хз}}$.

На рис. 3.2.5б зображений 3D-графік функції (14.2.5) за $\varsigma=1$ в сферичній системі координат, а на рис. 3.2.5в зображений графік відношення повної інтенсивності дипольного випромінювання за малих відстаней до повної інтенсивності дипольного випромінювання в хвильовій зоні (формула (24.2.4)), тобто графік функції $\kappa(\varsigma)=\langle I\rangle_{\text{бз}}/\langle I\rangle_{\text{хз}}$. При $\varsigma\to 0$ функція $\kappa(\varsigma)$ наближається до функції $\dfrac{3}{4\varsigma^3}\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(1+2x^2-3x^4\right)^{1/2}dx\approx 1{,}5/\varsigma^3$, яка стрімко зростає, досягаючи дуже великих значень.

На завершення наведемо приклад з мобільним телефоном. Нехай його паспортна потужність складає $P_0\approx 1\,\text{Вт}$ і нехай він працює на частоті $\omega\approx 10^9\,\text{Гц}$, що відповідає довжині хвилі $\lambda\approx 60\pi\,\text{см}$. Тоді, якщо тримати його на відстані $r\approx(3\div 5)\,\text{см}$ від чутливих органів головного мозку, то ефективна (діюча) потужність складає $P_{\text{еф}}\approx 1{,}5\left(\lambda/2\pi r\right)^3\approx(300\div 1500)\,\text{Вт}$, що суттєво перевищує нормативний поріг безпеки (порядку $1\,\text{Вт/кг}$ біологічної тканини мозку).